Problema di Poisson come problema termico

u = temperatura del mezzo conduttore

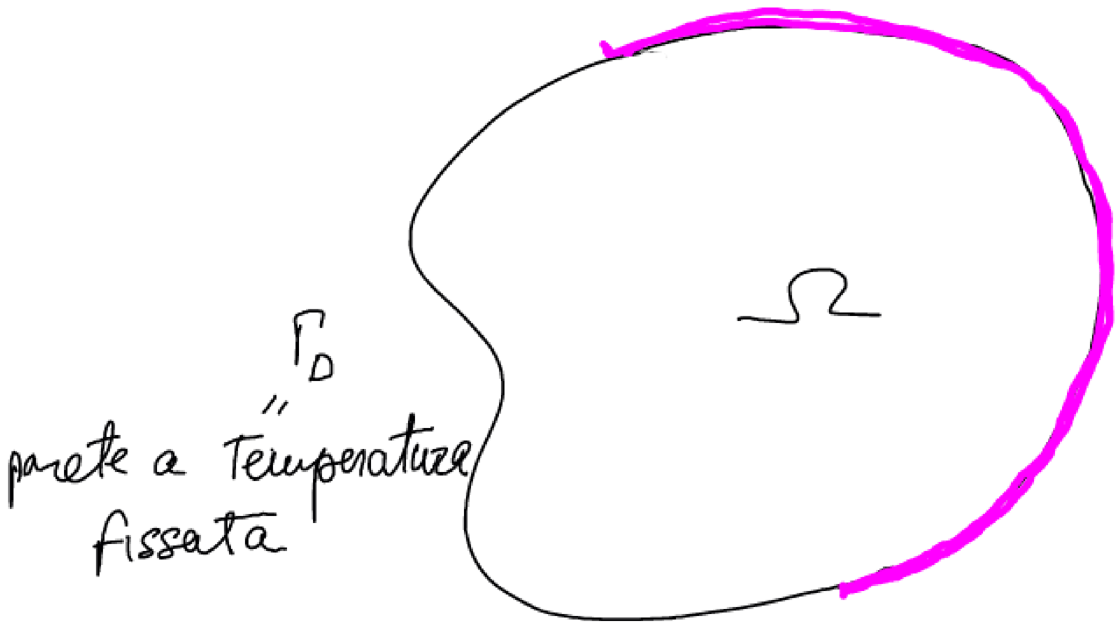
$q = -K \nabla u$ = flusso di calore secondo legge di Fourier

K = coefficiente di conducibilità

eq. di equilibrio termico $\nabla \cdot q = f$ in Ω

condizione al bordo di Dirichlet: $u|_{\Gamma_D} = g$

condizione al bordo di Neumann $q \cdot \underline{n}|_{\Gamma_N} = K \nabla u \cdot \underline{n}|_{\Gamma_N} = 0$



Γ_N = parete isolante

$\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k\,\underline{\nabla} u) = f & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\Gamma_D} = g & \\ k\,\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N} = 0 & \end{cases}$$

per arrivare al metodo di Galerkin moltiplichiamo per v nulla su Γ_D, integriamo su Ω e integriamo per parti, ottenendo

$$\underbrace{-\int_\Omega \mathrm{div}\,(k\,\underline{\nabla} u)\cdot v}_{\int_\Omega (k\,\underline{\nabla} u)\circ\underline{\nabla} v \;+\; \underbrace{\int_{\partial\Omega} (k\,\underline{\nabla} u\circ\underline{n})\, v}_{\int_{\Gamma_D}\cdots \;+\; \int_{\Gamma_N}\cdots}} = \int f\cdot v$$

dove

$\int_{\Gamma_D}(k\,\underline{\nabla} u\circ\underline{n})\,v = 0$ per v

e $\int_{\Gamma_N}(k\,\underline{\nabla} u\circ\underline{n})\,v$ lo cancellia**mo** di proposito per imporre $k\,\nabla u\circ n = 0$ su Γ_N

quindi: Cerco u (che verifica le condizioni al bordo su Γ_D, con la solita procedura $u = \tilde{u} + \tilde{g}$ ..., e libera su Γ_N)

tale che

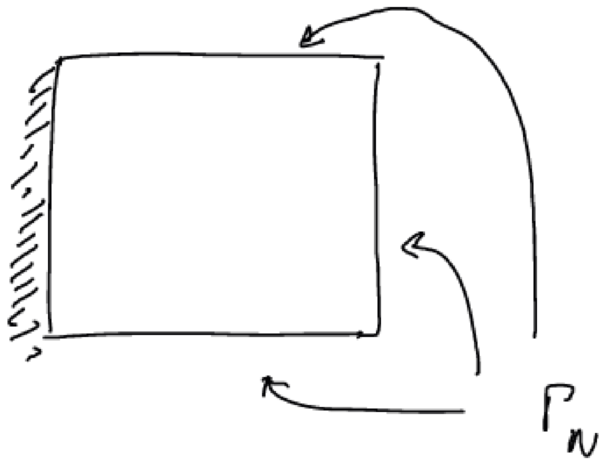
$$\int_\Omega K\, \underline{\nabla u} \cdot \nabla v \; - \cancel{\int_{\Gamma_N} (K\, \underline{\nabla u} \cdot \underline{n})\, v} = \int_\Omega f v \qquad \forall v$$

funzione test nulla su Γ_D

Per programmare tutto ciò bisogna utilizzare lo spazio delle funzioni nulle su Γ_D, dunque invece di distinguere tra indici di bordo e indici interni dovremo distinguere indici di nodi "vincolati" e indici di nodi "attivi"

Esercizio: risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} k \nabla u = f \\ u = 0 \quad \text{su } \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$



$\Omega =$ quadrato $[-1,1]^2$

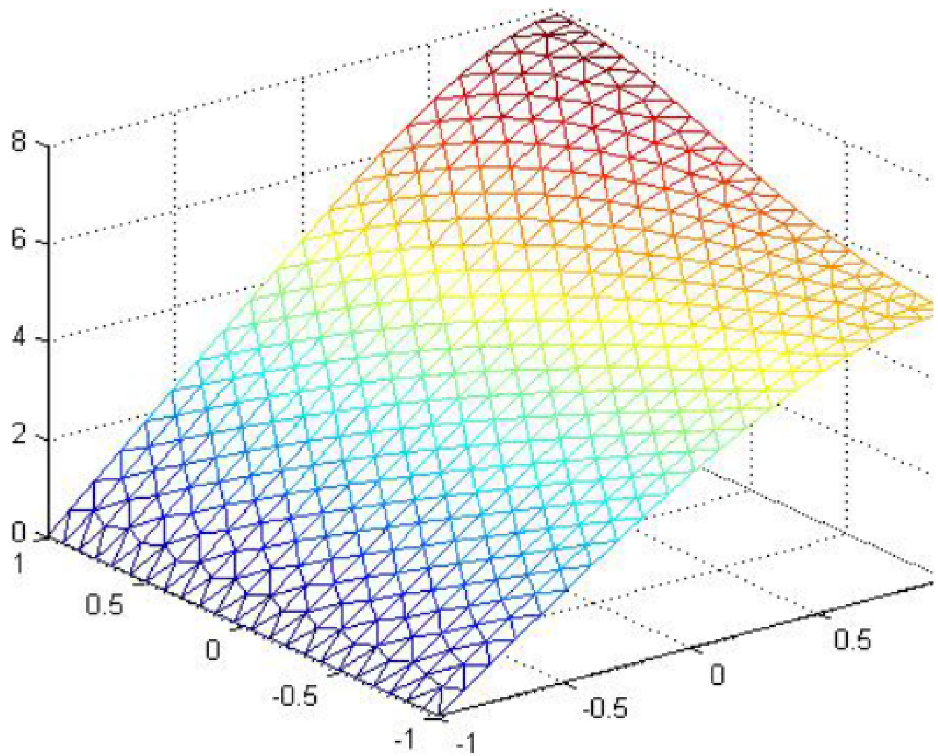
$f(x,y) = e^{2x+y}$

$k(x,y) = 1$ (dunque $\operatorname{div} k\nabla = \Delta$) oppure
$k(x,y) = x^2+y^2+1$ (usare formula di quadratura)

confrontare le soluzioni ottenute con i colleghi...

Il grafico delle soluzioni è riportato qui sotto:

$k(x,y)=1$



$k(x,y) = x^2+y^2+1$