Capitolo 2

Vettori applicati

2.1 Concetti fondamentali

L'obiettivo di questo capitolo è fornire gli elementi della teoria dei vettori applicati, prescindendo da ogni loro eventuale significato fisico. Il ruolo giocato dalla teoria dei vettori applicati in meccanica si comprende osservando, ad esempio, che l'effetto di una forza agente su un corpo dipende dal punto del corpo in cui essa è applicata. A monte della definizione sta l'idea di specificare l'azione di un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ su un punto $p \in \mathcal{E}$ particolare, detto *punto di applicazione* di $\mathbf{v}$.

Definizione 2.1 *Dato $p \in \mathcal{E}$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si definisce vettore applicato la coppia ordinata $(p, \mathbf{v}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{V}$.*

La retta passante per p e diretta come $\mathbf{v}$ (*cfr.* Figura 2.1) gioca un ruolo importante nella teoria e viene definita nel modo seguente.

Definizione 2.2 *La retta di applicazione di un vettore applicato $(p, \mathbf{v})$ è il seguente insieme $\mathcal{R}$ dello spazio euclideo $\mathcal{E}$*

$$\mathcal{R} := \{p' \in \mathcal{E} : p' - p = \lambda \mathbf{v}, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Definizione 2.3 *Assegnato un punto $q \in \mathcal{E}$ ed un vettore applicato $(p, \mathbf{v})$ il momento $\mathbf{m}_q$ di $(p, \mathbf{v})$ rispetto al punto q è il vettore*

$$\mathbf{m}_q := (p - q) \wedge \mathbf{v}. \tag{2.1}$$

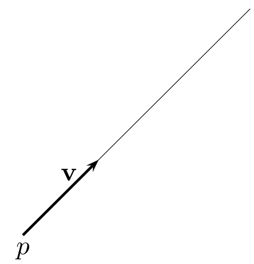

Figura 2.1:

A parte i casi ovvî in cui almeno uno dei fattori della (2.1) è nullo, il momento $\mathbf{m}_q$ di un vettore $\mathbf{v}$ si annulla quando $p - q$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli. Ciò offre la possibilità di cambiare il punto di applicazione di un vettore senza alterarne il momento rispetto al polo scelto. Preso il vettore $(p', \mathbf{v})$ dove p' sta sulla retta di applicazione di $(p, \mathbf{v})$, i momenti di $(p, \mathbf{v})$ e di $(p', \mathbf{v})$ rispetto ad uno stesso punto q coincidono. Infatti $p' - q = (p - q) + (p' - p)$ e, per la definizione di retta di applicazione, $p' - p = \lambda\mathbf{v}$; detto dunque $\mathbf{m}'_q$ il momento di $(p', \mathbf{v})$ rispetto a q si ha

$$\mathbf{m}'_q = (p' - q) \wedge \mathbf{v} = (p - q) \wedge \mathbf{v} + (p' - p) \wedge \mathbf{v} = (p - q) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{m}_q.$$

Esempio 1. Sia $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ un vettore avente momento $\mathbf{m}_q$ rispetto al polo q; vogliamo determinare la retta di applicazione di $\mathbf{v}$, ovvero invertire la (2.1). Grazie al Teorema 1.1 sappiamo che il problema non ha soluzione se $\mathbf{m}_q \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mentre, quando $\mathbf{m}_q \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, dal confronto di (1.9) e (2.1) ricaviamo che

$$(p - q) = \frac{1}{|v|^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{m}_q + \lambda\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Pertanto la retta di applicazione cercata è diretta come $\mathbf{v}$, coerentemente con la Definizione 2.2. Inoltre essa passa per il punto p tale che

$$(p - q) = \frac{1}{|v|^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{m}_q\,.$$

Osservazione. In questo esempio abbiamo individuato la retta di applicazione di $\mathbf{v}$ usando sei coordinate: le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto ad una base ortonormale assegnata, proporzionali ai suoi coseni direttori, e le tre coordinate di p rispetto a q. Queste coordinate sono note in geometria proiettiva sotto il nome di *coordinate plückeriane* della retta.

Ex. 1 Supponiamo che un vettore $\mathbf{v} = \mathbf{e}_3$ abbia momento $\mathbf{m}_O = \mathbf{e}_1$ rispetto all'origine O. Trovarne la retta di applicazione.

Definizione 2.4 *Dato un vettore applicato* $(p, \mathbf{v})$*, un punto* $q \in \mathcal{E}$ *ed una retta* r *passante per* q *e orientata come un versore* $\mathbf{e}$*, il* momento assiale m_r *di* $(p, \mathbf{v})$ *rispetto ad* r *è*

$$\mathrm{m}_r := \mathbf{m}_q \cdot \mathbf{e} = (p - q) \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}.$$

Questa definizione ha senso perché m_r è indipendente dalla scelta del punto $q \in r$. Infatti, se q e q' appartengono ad r deve essere $q - q' = \lambda \mathbf{e}$ e dunque

$$\mathbf{m}_q \cdot \mathbf{e} = (p - q) \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = (p - q') \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} + (q' - q) \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{m}_{q'} \cdot \mathbf{e}.$$

In molte situazioni si ha a che fare con più vettori applicati in punti diversi, cioè con un *sistema di vettori applicati.* In termini formali vale la seguente definizione.

Definizione 2.5 *Un sistema* Σ *di vettori applicati è l'insieme*

$$\Sigma := \{(p_i, \mathbf{v}_i), i = 1, ..., n, p_i \in \mathcal{E}, \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}\} \tag{2.3}$$

Ad ogni sistema di vettori applicati si associa un vettore *libero*, detto *risultante*, così definito:

Definizione 2.6 *Il risultante di un sistema di vettori applicati* Σ *è il vettore libero* $\mathbf{R}$ *dato da*

$$\mathbf{R} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\ . \tag{2.4}$$

Definizione 2.7 *Preso un polo* $q \in \mathcal{E}$*, il momento* $\mathbf{M}_q$ *del sistema di vettori applicati (2.3) è definito come:*

$$\mathbf{M}_q := \sum_{i=1}^{n} (p_i - q) \wedge \mathbf{v}_i\ . \tag{2.5}$$

Anche il momento di un sistema di vettori applicati va pensato come un vettore *libero.* Il prossimo teorema, detto teorema di trasporto, mostra la variazione del momento di un sistema di vettori applicati al mutare del polo.

Teorema 2.1 *Sia* Σ *un sistema di vettori applicati* $\{(p_i, \mathbf{v}_i)\}$ *e siano* q *e* q' *due punti in* $\mathcal{E}$*; detto* $\mathbf{R}$ *il risultante di* Σ *si ha*

$$\mathbf{M}_{q'} = \mathbf{M}_q + (q - q') \wedge \mathbf{R} \tag{2.6}$$

Dim. Dalla (2.5) ricaviamo

$$\mathbf{M}_{q'} = \sum_{i=1}^{n} (p_i - q') \wedge \mathbf{v}_i$$

ed essendo $p_i - q' = (p_i - q) + (q - q')$, si ottiene

$$\mathbf{M}_{q'} = \sum_{i=1}^{n} (p_i - q) \wedge \mathbf{v}_i + (q - q') \wedge \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i$$

dove nell'ultimo addendo abbiamo usato la linearità del prodotto vettoriale ed abbiamo notato che $(q - q')$ non dipende dall'indice di sommatoria i. Usando la (2.4), giungiamo alla tesi. ■

Osservazione. Sfruttando le proprietà del prodotto vettoriale, si può riscrivere (2.6) come

$$\mathbf{M}_{q'} = \mathbf{M}_q + \mathbf{R} \wedge (q' - q) \tag{2.7}$$

Il teorema ora mostrato, pur essendo molto semplice, dà lo spunto per diverse considerazioni che riportiamo come corollari.

Corollario 2.1 *Il momento di un sistema di vettori applicati è indipendente dal polo scelto se e solo se il risultante* $\mathbf{R}$ *del sistema è il vettore nullo.*

Dim. Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ deduciamo immediatamente dalla (2.6) che $\mathbf{M}_{q'} = \mathbf{M}_q$, per ogni scelta di q e q'. Viceversa, se vale $\mathbf{M}_{q'} = \mathbf{M}_q$ qualunque sia la coppia di punti q, q' scelta, sempre dalla (2.6) ricaviamo

$$(q - q') \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \tag{2.8}$$

che, per l'arbitrarietà di q e q' equivale a richiedere l'annullamento di $\mathbf{R}$. ■

Quando un sistema non ha risultante nullo c'è in generale dipendenza del momento dal polo. Dato un sistema di vettori applicati a risultante non nullo e fissato un polo q, possiamo chiederci quali siano i punti q' dello spazio euclideo $\mathcal{E}$ tali che $\mathbf{M}_{q'} = \mathbf{M}_q$. Partendo dalla (2.6) approdiamo ancora alla (2.8) che sancisce il parallelismo tra $\mathbf{R}$ e $(q - q')$, perché il risultante *non è nullo.* Pertanto il luogo cercato è costituito da tutti e soli i punti appartenenti alla retta di applicazione del vettore $(q, \mathbf{R})$.

La conseguenza più importante della (2.6) è data dal seguente corollario:

Corollario 2.2 *Il prodotto scalare* $\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R}$ *non dipende dal polo scelto.*

Dim. Basta moltiplicare la (2.6) scalarmente per $\mathbf{R}$ ed osservare che il vettore $(q - q') \wedge \mathbf{R}$ è ortogonale ad $\mathbf{R}$. ■

Il prodotto $\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R}$ è solitamente chiamato *trinomio invariante* di un sistema di vettori applicati.

L'invarianza di $\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R}$ permette di scomporre il momento $\mathbf{M}_q$ in due componenti

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{M}_q^{\perp} + \mathbf{M}^{\parallel} \tag{2.9}$$

dove $\mathbf{M}_q^{\perp}$ è ortogonale ad $\mathbf{R}$, mentre $\mathbf{M}^{\parallel}$ è parallelo ad $\mathbf{R}$. Dal Corollario 2.2 concludiamo che la dipendenza del momento di Σ dal polo coinvolge solo la componente ortogonale ad $\mathbf{R}$, mentre la componente parallela è caratteristica del sistema di vettori applicati che si sta esaminando. Possiamo dunque scrivere

$$\mathbf{M}^{\parallel} = \mu \mathbf{R}, \tag{2.10}$$

con $\mu := \frac{\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R}}{|R^2|}$, indipendente dal polo considerato.

Corollario 2.3 *Il trinomio invariante di un sistema di vettori applicati si annulla se e solo se* $\mathbf{M}^{\parallel} = \mathbf{0}$.

Dim. Basta applicare la definizione di trinomio invariante. ■

Definizione 2.8 *L'asse centrale di un sistema* Σ *di vettori applicati aventi risultante non nullo è il luogo dei punti* $q \in \mathcal{E}$ *rispetto ai quali*

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{M}^{\parallel} = \mu \mathbf{R}\,. \tag{2.11}$$

La definizione perde di senso per sistemi a risultante nullo perché la direzione di $\mathbf{R}$ non è determinata. In quel caso però sappiamo dal corollario 2.1 che il momento è indipendente dal polo. Occorre ancora verificare che il luogo cercato non sia l'insieme vuoto e per mostrare questo partiamo dalla (2.6) riscritta come

$$\mathbf{M}_{q'} - \mathbf{M}_q = (q - q') \wedge \mathbf{R}\,.$$

Questa equazione è sempre risolvibile in termini di $q - q'$ quando $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ in quanto

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_{q'} - \mathbf{M}_q) = 0\,,$$

per definizione di trinomio invariante. Le sue soluzioni sono

$$q - q' = \frac{1}{|\mathrm{R}|^2} \mathbf{R} \wedge (\mathbf{M}_{q'} - \mathbf{M}_q) + \lambda \mathbf{R}\,.$$

In particolare, richiedendo che q appartenga all'asse centrale, ricaviamo

$$q - q' = \frac{1}{|\mathrm{R}|^2} \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_{q'} + \lambda \mathbf{R}\,,$$

per un arbitrario q'. Dunque, per localizzare l'asse centrale di un sistema di vettori applicati rispetto ad un generico punto q' è sufficiente trovare un punto q tale che

$$(q - q') = \frac{1}{|\mathrm{R}|^2} \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_{q'} \tag{2.12}$$

e poi tracciare la retta passante per q e diretta come $\mathbf{R}$.

La scomposizione (2.9) consente di dare una caratterizzazione interessante dell'asse centrale:

Corollario 2.4 *L'asse centrale di un sistema di vettori applicati Σ è il luogo dei punti rispetto ai quali Σ ha momento minimo.*

Dim. Dalla (2.9), poiché $\mathbf{M}_q^\perp$ e $\mathbf{M}^\parallel$ sono ortogonali, si ha

$$|\mathbf{M}_q|^2 = \left|\mathbf{M}_q^\perp\right|^2 + \left|\mathbf{M}^\parallel\right|^2 \geq \left|\mathbf{M}^\parallel\right|^2$$

dove vale il segno di uguaglianza se e solo se $\left|\mathbf{M}_q^\perp\right|^2 = 0$, cioè quando q giace sull'asse centrale. ■

Esempio 2. Trovare l'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 & \text{applicato in } p_1 - O = (0, a, 0) \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 & \text{applicato in } p_2 - O = (2a, 0, a) \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \text{applicato in } p_3 = O\,. \end{array}$$

Il risultante del sistema è $\mathbf{R} = \mathbf{e}_3$, per cui $|\mathbf{R}|^2 = 1$. Scegliamo come polo q' (*cfr.*(2.12)) l'origine O. Allora

$$\mathbf{M}_O = a\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + (2a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_2\,.$$

Ricordando che[1] $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, nonché le proprietà del prodotto vettoriale, ottieniamo $\mathbf{M}_O = a\mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1$ e la (2.12) diventa

$$(q - O) = \mathbf{e}_3 \wedge (a\mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1) = -a\mathbf{e}_2\,.$$

L'asse centrale è la retta parallela all'asse $\mathbf{e}_3$, passante per il punto $q - O = (0, -a, 0)$ ed ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -a \\ z = t. \end{cases}$$

Esempio 3. Trovare l'asse centrale del sistema di vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ applicati rispettivamente in $p_1 - O = a\mathbf{e}_2$, $p_2 - O = a\mathbf{e}_1$, $p_3 = O$, $p_4 - O = a\mathbf{e}_3$.

Il risultante del sistema è

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

ed il momento rispetto all'origine O è

$$\mathbf{M}_O = a\mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + a\mathbf{e}_1 \wedge (2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + a\mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = a(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\,.$$

Se applichiamo ancora la (2.12) con $q' = O$ otteniamo

$$q - O = \frac{2a}{5}\left(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\right)\,.$$

[1] In seguito, salvo avviso contrario, useremo sempre basi positivamente orientate

Le coordinate del punto q sono $(0, \frac{2}{5}a, -\frac{4}{5}a)$ e l'asse centrale ha equazione

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + \frac{2}{5}a \\ z = t - \frac{4}{5}a\,. \end{cases}$$

Quando abbiamo a che fare con un sistema formato da molti vettori applicati, può essere utile riuscire a "semplificarlo" il più possibile senza ovviamente alterarne le caratteristiche essenziali, cioè il risultante ed il momento rispetto ad un polo arbitrario. Questa semplificazione poggia sulla seguente definizione.

Definizione 2.9 *Due sistemi di vettori applicati Σ e Σ', sono detti mutuamente riducibili se i rispettivi risultanti $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{R}'$ coincidono e se sono uguali i momenti $\mathbf{M}_q$ ed $\mathbf{M}'_q$ rispetto ad un qualunque polo q. In formule:*

$$\begin{array}{l} i)\,\mathbf{R} = \mathbf{R}' \\ ii)\,\mathbf{M}_q = \mathbf{M}'_q\,. \end{array} \tag{2.13}$$

La definizione data è indipendente dal polo q che figura nella $(2.13)_2$) nel senso che, se vale la $(2.13)_1$ e la $(2.13)_2$ è verificata in un punto particolare q, allora essa lo è in tutti gli altri punti q', come segue dal Teorema di trasporto 2.1.

Definizione 2.10 *Un sistema di vettori applicati Σ è detto equilibrato o nullo se è riducibile ad un sistema di vettori applicati tali che*

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_q = \mathbf{0}\,. \end{array} \tag{2.14}$$

Definizione 2.11 *Una coppia è un sistema di vettori applicati del tipo $\Sigma = \{(p, \mathbf{v}), (q, -\mathbf{v})\}$ (cfr. Figura 2.2). La distanza b tra le rette di applicazione dei vettori formanti una coppia è detta braccio della coppia e, quando queste rette coincidono, la coppia viene detta a braccio nullo.*

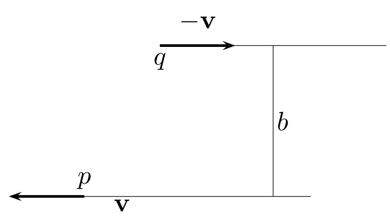

Figura 2.2:

Una coppia ha risultante nullo e pertanto il suo momento non dipende dalla scelta del polo. Possiamo prendere allora il punto q come polo, ottenendo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_q = (p - q) \wedge \mathbf{v} \tag{2.15}$$

Il momento di una coppia è un vettore ortogonale al piano contenente le rette di applicazione dei vettori formanti la coppia. Forti di queste definizioni, possiamo mostrare un teorema sulla riducibilità dei sistemi di vettori applicati.

Teorema 2.2 *Ogni sistema di vettori applicati Σ è riducibile ad un sistema formato da un vettore e da una coppia.*

Dim. Trattiamo dapprima il caso in cui Σ ha trinomio invariante non nullo e denotiamo con $\mathbf{M}_q$ il momento di Σ rispetto ad un punto q. È sempre possibile trovare una coppia con momento $\mathbf{M}_q$. Infatti, basta scegliere un qualunque vettore $\mathbf{v}$ ortogonale a $\mathbf{M}_q$ e trovare la sua retta di applicazione con la tecnica dell'esempio 1, affinché abbia momento rispetto a q pari a $\mathbf{M}_q$. Se p è un qualunque punto di questa retta, la coppia $\Sigma' = \{(p, \mathbf{v}), (q, -\mathbf{v})\}$ ha certamente momento $\mathbf{M}_q$. Detto poi $\mathbf{R}$ il risultante di Σ applichiamolo in q ottenendo il sistema di vettori $\overline{\Sigma} = \Sigma' \cup \{(q, \mathbf{R})\}$ che ha momento e risultante uguali a quelli di Σ. Esaminiamo il caso in cui il trinomio invariante $\mathbf{M}_q \cdot \mathbf{R}$ è nullo. Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, il momento del sistema non dipende dal polo q ed ogni coppia di momento $\mathbf{M}_q$ è equivalente a Σ. Tale coppia ha braccio nullo se $\mathbf{M}_q \equiv \mathbf{0}$. Se invece $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, sappiamo dalle equazioni (2.10) e (2.11) che q appartiene all'asse centrale di Σ se e solo se $\mathbf{M}_q = \mathbf{0}$. Basta allora applicare $\mathbf{R}$ su un punto qualsiasi dell'asse centrale di Σ per avere un sistema equivalente a Σ. $\blacksquare$

Analizzando la dimostrazione ora esposta concludiamo che

Corollario 2.5 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati sia riducibile o ad un unico vettore applicato sull'asse centrale o ad una sola coppia è che si annulli il suo trinomio invariante.*

Le due classi più interessanti di vettori applicati con trinomio invariante nullo sono i *sistemi piani* ed i *sistemi di vettori paralleli.*

Definizione 2.12 *Un sistema di vettori applicati è detto piano se le rette di applicazione dei vettori del sistema giacciono tutte in un unico piano π.*

Osservazione. Il momento $\mathbf{M}_q$ di un sistema piano rispetto ad un punto q di π è ortogonale a π e dunque ad $\mathbf{R}$: ciò dimostra che il trinomio invariante è nullo.

Definizione 2.13 *Un sistema di vettori paralleli è un sistema Σ i cui vettori sono della forma*

$$\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{u}\,, \quad i = 1, ..., n \tag{2.16}$$

ove v_i sono coefficienti numerici ed $\mathbf{u}$ un vettore (Figura 2.3).

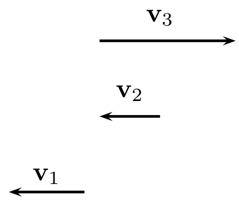

Figura 2.3:

Osservazione. Il momento di un sistema di vettori paralleli è ortogonale ad $\mathbf{u}$, cosicché il trinomio invariante è davvero nullo.

Consideriamo un sistema di vettori paralleli Σ a risultante non nullo, così da poterne definire l'asse centrale. Se $(p_i, \mathbf{v}_i)$ sono i vettori di Σ, i punti a dell'asse centrale sono tali che

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \,(p_i - a) = \lambda \mathbf{u}\,, \tag{2.17}$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$. Sappiamo infatti che $\mathbf{M}_a = \mathbf{0}$ e poiché

$$\mathbf{M}_a = \sum_{i=1}^{n} v_i \,(p_i - a) \wedge \mathbf{u}$$

deve valere l'equazione (2.17). La corrispondenza tra i punti dell'asse centrale e i valori di λ nella (2.17) è biunivoca. Resta dunque giustificata la seguente definizione:

Definizione 2.14 *Si dice centro di un sistema di vettori paralleli il punto C dell'asse centrale che corrisponde al valore $\lambda = 0$ nella (2.17), cioè tale che valga*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \,(P_i - C) = \mathbf{0}\,. \tag{2.18}$$

Introduciamo un'origine O e definiamo lo scalare

$$v := \sum_{i=1}^{n} v_i\,, \tag{2.19}$$

che coincide, a meno di un segno, con il modulo del risultante del sistema in esame. Poiché

$$P_i - C = (P_i - O) - (C - O)$$

ricaviamo dalla (2.18)

$$C - O = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} v_i \,(P_i - O) \tag{2.20}$$

che consente di localizzare il centro rispetto ad un'origine arbitraria, una volta note le posizioni rispetto ad essa dei punti di applicazione dei vettori $\mathbf{v}_i$. Il centro di un sistema di vettori paralleli è in definitiva una sorta di "media pesata" dei vettori del sistema.

Esempio 4. Determinare il centro del sistema di vettori applicati formato da $(P_1, v_1\mathbf{e})$ e $(P_2, v_2\mathbf{e})$, con $v_1 + v_2 \neq 0$ ed $\mathbf{e}$ un versore assegnato.

Dalla definizione (2.18) segue

$$v_1(P_1 - C) = v_2(C - P_2) \tag{2.21}$$

che mostra come il centro C sia sulla retta congiungente i punti di applicazione P_1 e P_2. Inoltre essa evidenzia che le distanze del centro da P_1 e P_2 sono inversamente proporzionali ai moduli dei vettori applicati in tali punti:

$$\frac{|C - P_1|}{|C - P_2|} = \left|\frac{v_2}{v_1}\right| .$$

Il centro C è interno al segmento congiungente P_1 e P_2 se e solo se v_1 e v_2 hanno lo stesso segno.

Esempio 5. Trovare un sistema formato da tre vettori applicati equivalente al sistema seguente:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 & \text{applicato in } p_1 = O \\
\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 & \text{applicato in } p_2 - O = (a, 0, 0) \\
\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 & \text{applicato in } p_3 - O = (0, a, 0) \\
\mathbf{v}_4 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 & \text{applicato in } p_4 - O = (0, 0, a) \,.
\end{array}$$

Il risultante è $\mathbf{R} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ ed il momento risultante del sistema rispetto ad O è

$$\mathbf{M}_O = a\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) + a\mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + a\mathbf{e}_3 \wedge (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = -a\mathbf{e}_3 \,.$$

Possiamo applicare nell'origine un vettore $\mathbf{u}_1 = \mathbf{R}$ e cercare una coppia con momento $-a\mathbf{e}_3$. Basta ricorrere alla (2.15) con $q = O$ e $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore ortogonale ad $\mathbf{M}_O$: ad esempio, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$. A questo punto è l'equazione (2.2) con $q = O$ ed $\mathbf{m}_q = \mathbf{M}_O = -a\mathbf{e}_3$ a fornire un punto P_2 ove applicare $\mathbf{v}$:

$$P_2 - O = -a\mathbf{e}_1$$

Pertanto un sistema di vettori applicati equivalente a quello proposto è

$$\begin{cases}
\mathbf{u}_1 = \mathbf{R} & \text{applicato in } P_1 = O \\
\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} = \mathbf{e}_2 & \text{applicato in } P_2 - O = (-a, 0, 0) \\
\mathbf{u}_3 = -\mathbf{e}_2 & \text{applicato in } P_3 = O \,.
\end{cases}$$

Osservazione. In tutti i problemi ove è richiesta la riduzione di un sistema di vettori applicati, la soluzione non è mai unica. Infatti siamo liberi sia di scegliere il polo rispetto al quale calcolare il momento del sistema, sia di far scorrere il punto di applicazione di ogni vettore lungo la sua retta di applicazione. Per prendere familiarità con i metodi usati, suggeriamo di trovare un'altra riduzione del sistema trattato nell'esempio precedente in cui il risultante sia applicato in un punto dell'asse centrale.

Osservazione. In molti casi è utile saper trattare il caso in cui si ha una *distribuzione continua* di vettori applicati, anziché un numero finito. In altre parole, vi sono situazioni in cui, per ogni punto P di una regione $\mathcal{B}$ di $\mathcal{E}$ è definita una *densità* di vettori applicati $\boldsymbol{f}(P)$. Seguendo le regole per il passaggio al continuo che in analisi permettono di trasformare una serie in un integrale si può affermare che, in questo caso, il risultante $\boldsymbol{R}$ ed il momento $\boldsymbol{M}_O$ rispetto ad un polo O del sistema continuo proposto sono dati da

$$\boldsymbol{R} := \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{f}(P)\mathrm{d}v \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{M}_O := \int_{\mathcal{B}} (P-O) \wedge \boldsymbol{f}(P)\mathrm{d}v \tag{2.22}$$

dove l'integrazione è eseguita sulla regione dove è definita la distribuzione di vettori applicati: a seconda che questa sia uni-, bi- o tri-dimensionale, gli integrali in (2.22) sono da ritenersi integrali di linea, superficie e volume, rispettivamente.

2.2 Esercizi

Esercizio 2.1 *Sia dato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 & \textit{applicato in } P_1 \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \textit{applicato in } P_2 \\ \mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 & \textit{applicato in } P_3. \end{array}$$

Detti $\mathbf{M}_P$ *ed* $\mathbf{M}_Q$ *i momenti del sistema rispetto ai poli di coordinate* $P = (3,1,0)$ *e* $Q = (1,2,1)$, *è possibile scegliere i parametri* α, β *e* γ *in modo che*

$$\mathbf{M}_P - \mathbf{M}_Q = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \ ?$$

Il Teorema 2.1 afferma che

$$\mathbf{M}_P - \mathbf{M}_Q = (Q-P) \wedge \mathbf{R},$$

dove $\mathbf{R}$ è il risultante del sistema di vettori applicati. Utilizzando i dati del testo abbiamo

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = (-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \wedge [((3+\alpha)\mathbf{e}_1 + (\beta+1)\mathbf{e}_2 + (\gamma+1)\mathbf{e}_3)]$$

da cui ottieniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \gamma - \beta = 1 \\ \alpha + 2\gamma = -6 \\ -\alpha - 2\beta = 8\,. \end{cases}$$

Una verifica diretta mostra che le equazioni sono linearmente dipendenti e pertanto esistono infiniti valori dei parametri che risolvono il problema. Gli unici vincoli da soddisfare sono $\gamma = \beta + 1$ e $\alpha + 2\beta + 8 = 0$.

Esercizio 2.2 *Si consideri il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1,0,0) \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (0,0,1) \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0,1,0) \end{array}$$

Calcolare il valore minimo del modulo del momento di questo sistema rispetto ad un polo generico.

Dall'equazione (2.9) sappiamo che il momento di un sistema di vettori applicati rispetto ad un polo P qualsiasi si compone di due termini: uno parallelo, l'altro ortogonale al risultante:

$$\mathbf{M}_P = \mu\mathbf{R} + \mathbf{M}_P^{\perp}. \tag{2.23}$$

Poiché $\mu\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_P^{\perp}$ sono mutuamente ortogonali si ha

$$|\mathbf{M}_P| = \sqrt{(\mu\mathbf{R})^2 + (\mathbf{M}_P^{\perp})^2} \geq |\mu\mathbf{R}|$$

e l'uguaglianza viene raggiunta quando P appartiene all'asse centrale del sistema di vettori in esame. Il minimo valore del modulo è $|\mu\mathbf{R}|$ e da (2.23) otteniamo

$$\mu = \frac{\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{R}}{|R|^2}.$$

Poiché a numeratore compare il trinomio invariante che non dipende dalla scelta di P possiamo prendere $P \equiv O$, ottenendo

$$|\mathbf{M}_P|_{\min} = |\, \mu\mathbf{R}\, | = \frac{|\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}|}{|R|}.$$

In questo caso dove $\mathbf{R} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{M}_O = -\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3$ abbiamo

$$|\mathbf{M}_P|_{\min} = \frac{11}{\sqrt{13}}\ .$$

Esercizio 2.3 *Sul segmento* $[0, \ell]$ *dell'asse* x *di un sistema di coordinate cartesiane è applicato un sistema continuo di vettori avente densità* $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{\ell^3}x(4\ell - x)\mathbf{e}_y$ *per unità di lunghezza. Calcolarne il risultante* $\mathbf{R}$ *ed il momento risultante* $\mathbf{M}_O$ *rispetto all'origine* O*.*

Per definizione, il risultante $\mathbf{R}$ è

$$\mathbf{R} = \int_0^{\ell} \mathbf{f}(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\mathbf{e}_y$$

ed il momento $\mathbf{M}_O$ è

$$\mathbf{M}_O = \int_0^\ell x\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{f}(x)\mathrm{d}x = \frac{13\ell}{12}\mathbf{e}_z,$$

dove $x\mathbf{e}_x$ è il braccio della forza specifica $\mathbf{f}(x)$.

Esercizio 2.4 *Siano $(P_1, \mathbf{v}_1)$ e $(P_2, \mathbf{v}_2)$ due vettori applicati le cui rette di applicazione si intersecano in un punto S e sia O un punto arbitrario nello spazio euclideo. Se $\mathbf{M}_1$ ed $\mathbf{M}_2$ sono i momenti dei due vettori rispetto ad O, quale tra le seguenti relazioni è corretta?*
◯$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_1$ ◯$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_1$ ◯$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_1$
◯$2\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_1$ ◯$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ◯$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$

Poiché le rette di applicazione dei vettori si intersecano in S, il momento risultante del sistema composto da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ rispetto ad S è nullo e dunque è nullo anche il trinomio invariante $\mathcal{I}$. Preso un punto O generico, il momento del sistema rispetto ad esso è $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ per cui

$$0 = \mathcal{I} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

e poiché, per definizione di momento, $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv 0$ concludiamo che

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{v}_1\,.$$

Esercizio 2.5 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -3, 2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -5\boldsymbol{e}_x + 3ey - 4\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 2, 3) \end{cases}$$

il risultante ed il momento risultante; il trinomio invariante; l'equazione dell'asse centrale. Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (2, -1, 0)$.

Esercizio 2.6 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 3, -2) \end{cases}$$

il risultante ed il momento risultante; il trinomio invariante; l'equazione dell'asse centrale. Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto, formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (1, 0, -1)$.