

Capitolo 2

Meno per meno fa più

In qualcuno la regola dei segni:

più per più fa più
più per meno fa meno
meno per più fa meno
meno per meno fa più

può forse scatenare la stessa reazione che generava in S. Agostino la semplice regola di calcolo $2 \times 2 = 4$:

Due e due quattro era per me un'odiosa cantilena...¹ (Confessiones, Liber I)

Per altri, invece, questa regola è qualcosa da accettare e la giustificazione migliore è data dalla coerenza a posteriori dell'edificio dell'algebra. Affinché tale giustificazione sia credibile occorre però avere presente quale sia il motivo alla base della regola: la volontà di *estendere* ai numeri interi, positivi e negativi, la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. A ben vedere vi sono due strade che si possono percorrere e che sono state in effetti percorse da vari autori per introdurre questa regola. O si accetta la regola dei segni e se ne *deduce* la proprietà distributiva anche quando sono coinvolti numeri negativi, oppure si estende *a priori* la proprietà distributiva e si *dimostra*, come conseguenza, la regola dei segni. Quale delle due strade si voglia seguire, il passaggio dall'aritmetica—dove i numeri negativi *non* hanno cittadinanza—all'algebra non è scontato. La parola chiave che consente questo passaggio è *estensione*: l'estensione delle proprietà per le operazioni, dedotte in campo aritmetico. Quando si passa all'algebra, la loro validità è da stabilire *convenzionalmente*. La natura convenzionale di questo processo non deve spaventare: l'algebra *non* è un'opinione. La *scelta* della regola dei segni non è ineluttabile: un'altra scelta fornito un'algebra diversa che, tuttavia, non avrebbe portato lontano in quanto la rinuncia alla proprietà distributiva è un prezzo troppo alto da pagare e la struttura indotta operando questa scelta non è soddisfacente.

¹Duo et duo quattuor odiosa cantio mihi erat...

Questo capitolo vuole ripercorrere le tappe principali nella storia della regola dei segni per mostrare come, quando si tenti di dar conto di tale regola, si vada incontro a difficoltà non dissimili da quelle che, ironicamente, ancora S. Agostino trovava nel dover spiegare ai lettori il tempo:

Che cosa è il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so. Se voglio spiegarlo a qualcuno, non lo so² (Confessiones, Liber XI)

La storia che seguiremo mostra diversi tentativi, alcuni dei quali molto ingegnosi, di *giustificare*, di *dimostrare* la regola dei segni, appoggiandosi a risultati di aritmetica oppure ricorrendo ad argomenti geometrici. Questi tentativi davano *per scontata* la proprietà distributiva non ritenendo necessario precisare che, uscendo dai confini dell'aritmetica, occorre ridiscuterne la validità. Seguiremo un buon numero di questi tentativi che possono essere raggruppati in diverse categorie, a seconda della prospettiva da cui la regola viene visualizzata:

attraverso le regole dell'aritmetica tradizionale estese *tacitamente* al campo numerico dei numeri relativi;

attraverso il ruolo dello zero come elemento neutro dell'addizione;

la regola dei segni non è una regola per il prodotto tra numeri quanto una regola di combinazione tra i segni.

A monte delle giustificazioni della regola dei segni vi sono i modelli utilizzati per introdurre i numeri negativi; storicamente se ne sono utilizzati quattro:

modello *cinematico*: i numeri positivi corrispondono a spostamenti su una retta in un verso, a partire da un'origine fissata una volta per tutte, mentre i numeri negativi corrispondono a spostamenti in *verso* opposto;

modello *contabile*: i numeri positivi corrispondono a *crediti* mentre i numeri negativi corrispondono a *debiti*;

modello *cronologico*: i numeri positivi rappresentano eventi accaduti *dopo* un istante convenzionalmente fissato mentre i numeri negativi corrispondono agli eventi accaduti *prima* di questo istante;

modello *termologico*: i numeri positivi rappresentano temperature *superiori* ad una temperatura di riferimento (lo 0 della scala termometrica) mentre i numeri negativi corrispondono a temperature *inferiori* allo zero.

Se questi modelli hanno un'indubbia efficacia per giustificare la necessità di impiegare i numeri negativi, essi sono del tutto inadeguati a render conto della regola dei segni ed, anzi, possono dar luogo a conseguenze paradossali come quella descritta efficacemente da Marie-Henri Beyle (Stendhal, 1783-1842) nell'autobiografica *Vie de Henry Brulard*

Come è possibile che moltiplicando 1000 franchi di debito per 500 franchi di debito, uno arrivi a possedere una fortuna di 5000000, cinque milioni?

I modelli che meglio si adattano ad una giustificazione della regola dei segni sono quelli geometrici, nei quali si instaura una corrispondenza tra operazioni aritmetiche e particolari trasformazioni geometriche: le rotazioni attorno ad un asse fisso. In questo modo si manifesta una analogia tra i numeri negativi

²Quid est tempus? Si nemo ex me quaerat, scio. Si quaerenti explicare velim, nescio.

ed i numeri complessi e non è un caso se questi modelli geometrici sono stati presentati in opere finalizzate a discutere la natura e le proprietà delle quantità *immaginarie*.

Infine seguiremo lo sviluppo della presentazione assiomatica dei numeri negativi entro la quale la regola dei segni trova la sua definitiva sistemazione. Non deve sorprendere che una questione di principio trovi la sua veste soddisfacente solo nel XIX secolo, dopo almeno 150 in cui i numeri negativi erano stati usati tranquillamente da tutti i matematici. Come osservava Émile Borel, parlando della formulazione assiomatica della geometria:

On sait comment l'on procède pour exposer une science, telle que la géométrie, sous une forme axiomatique; de même que dans le bons romans policiers, on commence par la fin, c'est-à-dire que l'on pose comme définitions les propriétés essentielles que l'expérience a conduit à attribuer aux êtres géométriques points, droites, plans. ([10], p. 80)

La sistemazione assiomatica dei numeri negativi e, di riflesso, la regola dei segni, si collocano al termine di un lungo percorso, nel quadro della revisione dei fondamenti dell'analisi matematica, grazie all'opera di George Peacock ed Hermann Hankel. Vi è però ancora spazio per ulteriori riflessioni che mostrano come introdurre i numeri negativi non sia affatto necessario ma che questi, con le loro operazioni, possono essere surrogati da *coppie* ordinate di numeri *positivi*, a patto di definire opportunamente le operazioni con cui agire su tali coppie. Questo approccio, le cui origini si possono rintracciare in alcuni cicli di lezioni renuti da Weierstrass a Berlino, fu sviluppato e divulgato, tra gli altri, Jules Tannery ed Louis Couturat. Benché esso sia di grande eleganza formale e soddisfi il gusto estetico, d'altro canto mortifica l'intuizione, le lotte secolari per comprendere e far comprendere i numeri negativi.

2.1 I numeri negativi

Una delle distinzioni che balzano all'occhio tra aritmetica e algebra è l'impiego libero di quantità negative che si ha in algebra, a differenza delle restrizioni presenti in aritmetica. Ad esempio, la sottrazione di un numero da uno minore non viene contemplata nell'aritmetica delle scuole elementari mentre è un'operazione lecita in algebra. Così si esprimeva, alla fine dell'Ottocento un matematico francese, Maurice Fouché [23]:

La maggior parte dei matematici di oggi concorda nel riconoscere che la differenza essenziale tra l'algebra e l'aritmetica consista nell'introduzione dei numeri negativi.³

L'impiego delle quantità negative non deve però essere inteso come un fatto scontato: al contrario, la loro introduzione ha rappresentato un ostacolo concettuale rilevante, come testimoniato dai dibattiti di cui ancora si trova traccia

³La plupart des mathématiciens sont aujourd'hui d'accord pour reconnaître que la différence essentielle entre l'Algèbre et l'Arithmétique consiste dans l'introduction des nombres négatifs.

su alcune riviste scientifiche del XIX secolo. La lentezza ad introdurre ed assimilare i numeri negativi è in parte dovuta al significato rivestito dalle radici negative di equazioni algebriche: se l'incognita da determinare è la lunghezza di un segmento, l'estensione di una superficie od il volume occupato da un solido, soluzioni negative non hanno alcun senso. Diverso è il caso in cui il significato sia una quantità di denaro perché appare chiaro che ad una *quantità*—l'ammontare di una somma di denaro—possono affiancarsi due *qualità* distinte: la somma considerata può essere un *credito* oppure un *debito*. È proprio questo significato economico a far capolino in alcuni problemi discussi da Cardano nell'*Artis Magnae sive de Regulis algebraicis Liber unus* o, più semplicemente, nell'*Ars Magna*, pubblicata nel 1545. Per attribuire un significato geometrico a quantità negative come soluzioni di equazioni occorre attendere Albert Girard che, nella sua *Nouvelle invention en l'algèbre*, pubblicata nel 1629, otto anni prima della *Géométrie* di Cartesio, considerò il seguente *Problème d'Inclinaison*:

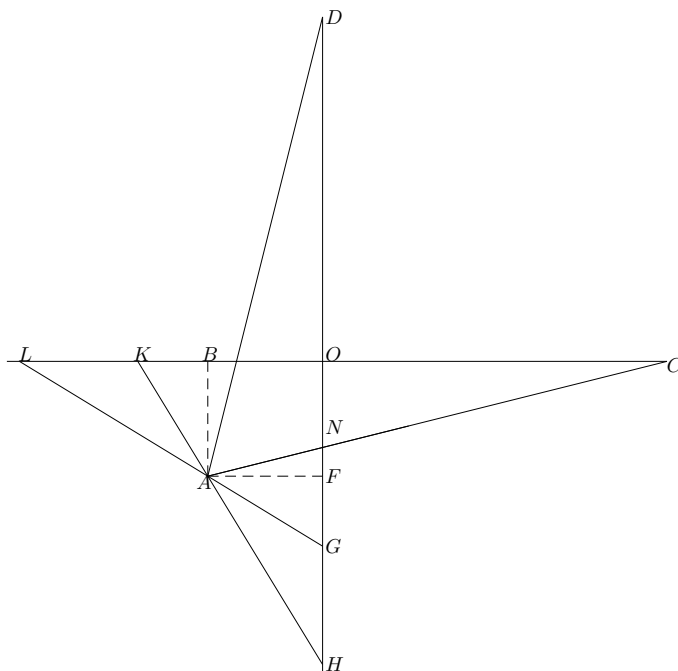


Figura 2.1: Il problema di inclinazione che conduce ad un'equazione di quarto grado con radici negative che Girard interpreta geometricamente ricorrendo all'idea di segmento orientato.

Dato un punto A posto sulla bisettrice del primo e terzo quadrante in modo che $AF = AB = 4$, Girard chiede di tracciare la retta passante per A e tale che la sua intercetta (cioè il segmento CN compreso tra gli assi ortogonali DH e CL) abbia lunghezza $\sqrt{153}$. Posto $FN = x$, Girard nota laconicamente che si

avrà

$$x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256. \quad (2.1)$$

Infatti, dal triangolo rettangolo AFN abbiamo $AN^2 = 16 + x^2$ ed inoltre, dalla similitudine tra i triangoli ANF ed ONC abbiamo

$$\frac{AN}{\sqrt{153}} = \frac{|x|}{|4 - x|},$$

per cui elevando al quadrato e semplificando, si risale all'equazione (5.12) di cui Girard elenca le quattro soluzioni affiancando il significato geometrico: $x = 1$ corrisponde ad FN , $x = 16$ corrisponde ad FD , $x = -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$ che indica il punto G dal punto F ed $x = -\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$ che indica il punto H dal punto F . Ecco la chiara esposizione di Girard:

Queste soluzioni mostano i punti G ed H , come se le distanze FG , FH fossero meno di nulla, presi FN ed FD che crescono mentre FG , FH retrocedono finché le intercette CN , DP , GL , HK , tendono ad inclinarsi a partire da A , facendo ciascuna $\sqrt{153}$, secondo le regole qui stabilite. E per interpretarle ancora meglio, le due soluzioni che sono minori di 0 si debbono scambiare, a seconda dei segni.

$$\text{si otterrà } \begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{per } FG \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{per } FH \end{cases}$$

che vanno contate in verso opposto a quello di FN , FD , come mostra la figura precedente: & dunque si dovranno intendere cosittute le soluzioni negative, che è un osservazione con conseguenze in geometria, sconosciute sinora.⁴ ([8])

È l'idea di verso di percorrenza di un segmento che conferisce ai numeri negativi quella cittadinanza nella geometria, a lungo negata:

Finora non abbiamo ancora spiegato a cosa servano le soluzioni negative, quando ve ne siano. La soluzione negativa si spiega in Geometria procedendo all'indietro, ed il segno meno indietreggia, laddove il segno $+$ avanza.⁵ ([8])

⁴Assavoir monstrant lesdits points G & H , comme si les distances FG , FH estoient moins que rien, en retrogradant, prenant que FN , FD avancement, & FG , FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN , DP , GL , HK , tendent & s'enclinent au point A faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux solutions qui sont moins que 0, se doivent changer, assavoir les signes.

$$\text{viendra } \begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour } FG \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour } FH \end{cases}$$

Lesquels il faut poser au contraire de FN , FD , comme il est exprimé en la figure precedente: & ainsi le faudra-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

⁵Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le $+$ avance.

Il problème d'inclinaison è un'interessante variante di un problema che era stato risolto per via sintetica da Pappo nelle Synagoge (Proposizione LX-XII, Libro VII). Nella versione latina (*Mathematicae Collectiones*) di Federico Commandino il problema è reso, nel 1558⁶, in questi termini:

Dato un quadrato AD , prolungare AC fino ad E e tracciare da esso un segmento con EG di lunghezza assegnata che raggiunga il punto B .⁷ ([37], p. 287)

Vediamo l'evoluzione subita da questo problema nel passaggio da Pappo a Descartes ed alla sintesi tra il problema di Pappo e la variante di Girard, ad opera di due commentatori di Descartes: Claude Rabuel e Frans van Schooten.

La dimostrazione della proposizione in esame presenta, nella versione di Pappo un ostacolo tecnico nella dimostrazione del seguente lemma (Proposizione LXXI, Libro VII)

Sia dato un quadrato AD , si conduca BGE e perpendicolarmente ad esso si tracci EF . Dico che i quadrati costruiti su CD e GE sono equivalenti al quadrato su DF .⁸

Si tratta di dimostrare (Fig. 2.2) che

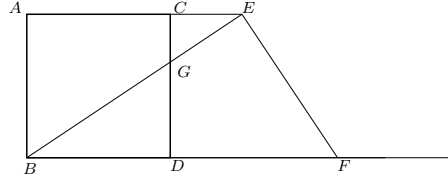


Figura 2.2: Illustrazione del Lemma costituente la Proposizione LXXI del Libro VII delle *Mathematicae Collectiones* di Pappo alessandrino, nella versione di Federico Commandino.

$$CD^2 + GE^2 = DF^2. \quad (2.2)$$

Si conduca da E la parallela al lato CD del quadrato $A[BC]D$, che taglia BF in H . Poiché gli angoli $C\hat{E}H$ e $F\hat{E}G$ ed hanno l'angolo GEH in comune, deve essere

$$C\hat{E}G = F\hat{E}H \quad (2.3)$$

da cui segue che i triangoli rettangoli FEH e BDG sono congruenti per cui, in particolare

$$EF = BG. \quad (2.4)$$

Inoltre, visto che anche il triangolo FEB è rettangolo in E , si ha

$$BF^2 = EF^2 + BE^2. \quad (2.5)$$

⁶L'opera apparve postuma, essendo Commandino morto nel 1575.

⁷*Quadrato existente AD, producere AC in E et facere EG datam quae ad punctum B pertingat.* Ho modificato EF in EG per rendere la notazione conforme a quella della Proposizione LXXI.

⁸Sit quadratum AD , & ducatur BGE , atque ipsi ad rectos angulos EF . Dico quadrata ex CD , GE quadrato ex DF aequalia esse.

La similitudine dei triangoli BGD e BEF fa sì che

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BE}$$

da cui segue

$$BF \times BD = BE \times BG \quad (2.6)$$

che Pappo esprime in questo modo: Il rettangolo di BF e BD è uguale, cioè equivalente, al rettangolo di BE e BG . Pappo osserva anche che i punti G , E , F , D debbono stare su una stessa circonferenza in quanto il quadrilatero $GEFD$ è ciclico, avendo angoli opposti supplementari. Se dal quadrato di lato BF si asporta il rettangolo di lati BF e BD resta il rettangolo di lati BF ed FD . D'altronde per la (2.5) e la (2.6) si ha anche

$$BF^2 - BF \times BD = EF^2 + BE^2 - BE \times BG$$

e siccome, asportando il rettangolo di lati BE e BG dal quadrato di lato BE si ha il rettangolo di lati BE ed EG , si può concludere, grazie a (2.4), che

$$BF \times FD = BG^2 + BE \times EG = GE^2 + BE \times BG$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene riflettendo sulla scomposizione della figura Usando (2.6) si ha poi

$$BF \times FD = BG^2 + BE \times EG = GE^2 + BF \times BD :$$

Se si rimuove il rettangolo di lati BD e FD , a sinistra resta il quadrato di lato FD mentre a destra resta il quadrato di lato EG e quello di lato BD , che è appunto la tesi.

Forte di questo lemma, Pappo passa a dimostrare il teorema che ci interessa, con il metodo *zetetico*: lo si consideri risolto (*Factum iam illud sit*). Si supponga

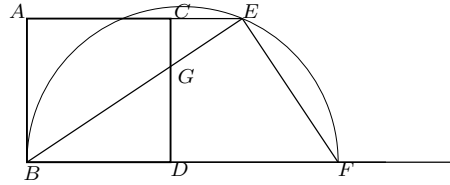


Figura 2.3: Illustrazione della Proposizione LXXII del Libro VII delle *Mathematicae Collectiones*.

cioè di aver trovato un punto E sul prolungamento di AC tale che, condotta da E la congiungente con B , essa intersechi il lato CD del quadrato in un punto G tale che EG abbia lunghezza prefissata. Condotta da E il segmento EF ortogonale a BE (Fig. 2.3), per il lemma appena dimostrato vale la (2.2) per cui DF si può considerare noto, visto che lo sono CD ed GE . Di conseguenza, il segmento BF è esso stesso noto e per questo si può considerare nota la posizione

della semicirconferenza di diametro BF che deve passare per E visto che, per costruzione, l'angolo $\hat{B}EF$ è retto. Il punto E , soluzione del problema si trova intersecando questa circonferenza con il prolungamento di AC .

Descartes considera il problema di Pappo nel III Libro della *Géométrie* come applicazione della regola di soluzione delle equazioni algebriche di quarto grado e della loro possibile riduzione ad equazioni di grado inferiore con la ricerca dei divisori del termine noto. La figura non differisce sostanzialmente da quella di Pappo e Cartesio riformula il problema in questi termini, trattaggiando sommariamente anche la descrizione originale:

Dati il quadrato BD ed il segmento BN , occorre prolungare il lato AC sino ad E , in modo che EF , tracciato da E verso B , sia uguale ad NB . Si sa da Pappo che, se si è prolungato dapprima BD fino a G , di modo che DG sia uguale a DN , ed avendo descritto un cerchio di diametro BG , se si prolunga la retta AC , essa interseca la circonferenza del cerchio nel punto E richiesto.⁹ ([15], p. 189)

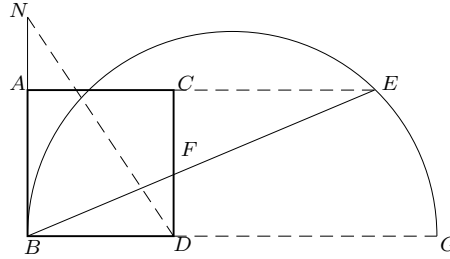


Figura 2.4: Il problema di Pappo nella versione della *Géométrie* di Descartes.

Osserviamo due punti. Cartesio tiene a specificare che EF è tracciato da E verso B , una implicita constatazione che, partendo da E vi sono in effetti due punti sulla retta BE che hanno distanza da E assegnata. Inoltre vediamo come l'aver rappresentato il segmento BN di lunghezza assegnata come in Figura, permette a Cartesio di tradurre immediatamente in forma geometrica il vincolo (??).

Posto $BD = a$ e $BN = EF = c$, Descartes utilizza la similitudine dei triangoli BFD e CFE per scrivere l'equazione risolutiva in termini dell'incognita $x = DF$ nella forma generale

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0$$

da cui ottiene il valore di DF che risolve il problema di Pappo come la radice

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} \frac{a}{2}} \sqrt{a^2 + c^2}$$

⁹Si le quarré BD & la ligne BN etant donnés, il faut prologer la costé AC jusque a E , en sorte qu' EF , tirée d' E vers B , soit esgale a NB . On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD jusques à G , en sorte que DG soit esgale a DN , & ayant descrit un cercle dont le diametre soit BG , si on prolonge la ligne droite AC , elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E , qu'on demandoit.

dell'equazione proposta. Nulla dice Cartesio a riguardo delle radici restanti, come invece aveva fatto Girard: la soluzione incontrata, che non è la sola positiva, è quella che risolve effettivamente il problema di Pappo, se si conviene che il prolungamento del lato AC possa essere effettuato solo da A verso C ; piuttosto egli richiama l'attenzione sul fatto che la scelta di un'incognita alternativa possa condurre ad equazioni risolutive più o meno semplici:

Se si fosse preso BF , o CE , o BE come incognita, si verrebbe ricondotti ad una equazione la quale sarà di quarto grado, ma esse sono più facili da risolvere e si otterranno le incognite molto facilmente; se invece si fosse preso DG come incognita, si otterrebbe molto più difficilmente un'equazione che però sarà anch'essa molto semplice. Affermo ciò per avvertire che quando il problema non è affatto di terzo grado, se si perviene ad un'equazione molto difficile, se ne può di solito ottenere una più semplice, cercando un'altra [incognita].¹⁰ ([15], 190)

Cartesio non approfondisce le varianti che si presentano quando venga scelta un'incognita diversa da DF . Tale compito si trova nel commentario alla *Géométrie*, scritto nel 1730 dal gesuita Claude Rabuel. Il testo di Rabuel è molto meticoloso nella discussione dei vari casi che si possono presentare al variare dell'incognita. In particolare, egli osserva come anche una soluzione positiva possa non risolvere *perfettamente* il problema proposto perché non corrisponde al prolungamento di AC , effettuato dalla parte di C . Riferendoci alla Fig. 2.4 riportiamo questo passaggio di Rabuel:

In ogni caso visti, solo il punto F ed il segmento FE risolvono perfettamente il problema; gli altri segmenti, benché uguali a quello assegnato BN o bN ne forniscono la soluzione solo introducendo qualche cambiamento; infatti il problema richiede un segmento che sia uguale a BN e che tagli il lato AC prolungato dalla parte di E ed il lato CD tra i punti C e D .¹¹ ([42], p. 485)

La modifica necessaria al testo è riportata da Rabuel subito dopo:

Affiché tutti i segmenti tracciati, uguali a quello assegnato BN risolvano il Problema, lo si dovrebbe proporre così. Assegnato il quadrato $ABCD$ e prolungandone i lati AC , CD , trovare tutti i segmenti che: 1° siano tracciati a partire dal punto B , 2° tagliano i lati AC , CD e 3° la cui parte compresa tra questi lati sia uguale ad un segmento assegnato BN .¹² ([42], p. 485)

¹⁰Que si on posoit BF , ou CE , ou BE pour la quantité inconnue, on viendroit dereches à une Equation, en laquelle il y auroit 4 dimensions, mais qui seront plus aysée a démesler, & on y viendront assés ayement; au lieu que si c'estoit DG au'on supposast, on viendront beaucoup plus difficilement à l'Equation, mais aussy elle seroit tres simple. Ce que ie mets icy pour vous avertir, que lorsque le Probleme proposé n'est point solide, si en le cherchant par un chemin ou vient à une Equation fort composee, on peut ordinairement venir à une plus simple, en le cherchant par un autre.

¹¹Dans tous les cas, qu'on vient d'examiner le seul point F & la seule ligne FE resolvent parfaitement le Problème; les autres lignes, quoique égales à la donnée BN ou bN n'en donnent la solution qu'en y mettant quelque changement; puisque le Problème demande une ligne qui soit égale "à BN & qui coupe la côté AC prolongé du côté de E , & le côté CD entre les points C & D .

¹²Afin que toutes les lignes qu'on a tirées égales à la donnée BN satisfissent au Problème, il faudroit le proposer ainsi. Etant donné le quarré $ABCD$, & les côtes AC , CD étant prolongez, trouver toutes les lignes, qui 1° soient tirées par le point B , qui 2° coupent les côtes AC , CD ,

Si è osservato più volte come la presenza di radici negative in un risultato portasse a ritenere come il problema *non* fosse stato formulato correttamente in origine e quindi a provvedere ad una adeguata riformulazione. In questo caso l'atteggiamento è simile e coinvolge non solo le radici negative ma anche quelle positive. Due metodi a confronto, dunque: quello sintetico, tradizionale che porta a trovare nulla più di quanto cercato; il metodo della geometria analitica che, grazie all'abbinamento della geometria con l'algebra permette di ottenere più soluzioni di quelle attese ed obbliga ad una interpretazione del risultato.

Anche Frans van Schooten, nei *Commentarii* allegati alla versione latina della *Géométrie* pubblicata nel 1695, tratta diffusamente del problema di Pappo ma, determinate le quattro soluzioni, osserva

è possibile mostrare qui elegantemente l'impiego delle radici, tanto le false quanto quelle vere, di alcune equazioni hanno in geometria e a quali condizioni possiamo essere da loro condotte alla piena intelligenza di alcuni problemi; affinché non vi siano casi che non scopriamo e di cui non giungiamo alla determinazione. Occorre sapere infatti che, benché (come detto in precedenza) in aritmetica le radici vere indicano una quantità maggiore di nulla e quelle false la mancanza di una certa quantità, ovvero di quanto sono minori di nulla, similmente le radici vere in geometria indicano segmenti [percorsi] nel verso come si propone di trovare mentre le radici false sono da assumere in verso contrario, a partire dallo stesso punto¹³ ([9], p. 310)

Van Schooten aveva probabilmente presente il testo di Girard, anche perché le figure illustrative a pp. 311-312 di [9] coincidono con quella riportata da Girard; tuttavia si coglie una accettazione delle quantità negative meno ampia che in Girard: le soluzioni negative di qualche equazione hanno effettiva utilità a presentare il problema nella sua generalità. Anche per van Schooten, le soluzioni trovate, positive o negative, oltre a *DF* sorgono *post aequationis resolutionem*. ([9], p. 313)

Non vi è prova migliore della difficoltà che il modello economico dei numeri negativi pone prendendolo come base per dimostrare la regola dei segni, del tentativo effettuato in tal senso da Eulero che, nel 1770, scrisse un manuale di introduzione all'algebra che ebbe una certa fortuna, visto anche il prestigio dell'autore. Eulero, che aderisce ad una visione newtoniana di numero spiega la genesi dei numeri naturali e degli interi relativi in questo modo:

I numeri positivi si ottengono aggiungendo 1 a 0, cioè a niente e continuando ad aumentare in questo modo, sempre di una unità. Ecco l'origine dei numeri che vengono

et dont 3^e la partie comprise entre ces deux côtes soit égale à une donnée *BN*.

¹³Potest autem hic eleganter ostendi usus, quem radices tam falsae quam verae alicujus aequationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamus; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim est, quod, quemadmodum verae radices in Arithmetica (ut supra indicavimus) quantitatem aliquam designant majorem quam nihilo, & falsae defectum alicujus quantitatis, seu quanto nihilo sunt minores, sic in Geometria verae radices eas communiter lines designent, sensu illo, quales inveniendae proponuntur, at vero falsae, sensu contrario. Adeo ut si vera accipiantur in data recta indefinita, a dato puncto versus aliquod in ea punctum designatum, falsae in ipsa ab eodem puncto sume debeant versus contrarium punctum.

detti numeri naturali; di seguito, ecco i primi termini

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$$

e via di seguito, all'infinito.

Se però, invece di continuare questa successione con addizioni ripetute, la si continuasse in senso opposto, sottraendo sempre una unità, si otterrebbe la serie seguente, dei numeri negativi

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

e così via all'infinito. ([5], pp. 12-13)

Definite poi le operazioni di somma, sottrazione e prodotto, si sofferma sulla regola dei segni in questo modo:

§31 Sinora abbiamo considerato solo numeri positivi e non vi è alcun dubbio che i prodotti che abbiamo formato non possano essere che positivi: cioè $+a$ per $+b$ deve necessariamente dare $+ab$. Occorrerà però esaminare a parte il risultato della moltiplicazione di $+a$ per $-b$, e di $-a$ per $-b$.

§32 Iniziamo a moltiplicare $-a$ per 3 o $+3$; siccome $-a$ può considerarsi come debito, è chiaro che se si prende tre volte questo debito, esso dovrà diventare tre volte più grande e, di conseguenza, il prodotto cercato è $-3a$. Similmente se si tratta di moltiplicare $-a$ per b , si otterrà $-ba$ o, ciò che è lo stesso, $-ab$. Concludiamo da ciò, che, moltiplicando una quantità positiva per una quantità negativa, il prodotto sarà negativo; prendiamo perciò come regola che $+$ per $+$ fa $+$ o più e che, al contrario, $+$ per $-$, o $-$ per $+$ faccia $-$ o meno.

§33 Resta ancora da risolvere il caso in cui $-$ sia moltiplicato per $-$ o, per esempio, $-a$ per $-b$. È anzitutto evidente che, quanto alla parte letterale, il prodotto sarà ab ; è però ancora incerto se davanti a questo prodotto occorra mettere il segno $+$ o il segno $-$; sappiamo solo che ci vorrà uno o l'altro di questi segni. Ora, io dico che non può essere il segno $-$: perché $-a$ per $+b$ dà $-ab$, e $-a$ per $-b$ non può produrre lo stesso risultato di $-a$ per b ; deve però risultarne l'opposto, cioè $+ab$; come conseguenza abbiamo questa regola: $-$ moltiplicato per $-$ fa più, come $+$ moltiplicato per $+$. ([5], pp. 20-22)

Dal punto di vista pedagogico l'esposizione è lacunosa: senza invocare la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma ed il ruolo dello zero, non si capisce perché $-a \times -b$ debba essere opposto a $-ab$. Osserviamo poi che, se il modello economico è perfetto per sdoganare le quantità negative, esso lascia a desiderare quando lo si voglia usare per dedurre le operazioni: nel caso $-a \times 3$ esso funziona, mentre nel caso $3 \times -a$ non funziona affatto, a meno di dar per scontata la proprietà commutativa del prodotto, come Eulero sembra lasciar intendere al §31 dove, in effetti, egli afferma che occorre esaminare solo *due casi*: $+a \times -b$ e $-a \times -b$. Vi sono altri due modelli che portano ad una introduzione naturale dei numeri negativi: il modello *cronologico* e quello *termologico*. È abbastanza sorprendente, a parere mio, che il primo di questi modelli non abbia avuto una sufficiente fortuna, almeno nei manuali elementari, perché il riferimento al tempo è tanto radicato quanto quello dello spazio e, quindi del movimento. È ben vero che il tempo fluisce in un solo verso; è però

altrettanto vero che il tempo viene contato a partire da un'origine, un punto zero, che fa da spartiacque tra il prima ed il dopo. Così, la nascita di Cristo viene assunta come anno 0, gli anni successivi vengono fatti corrispondere a numeri positivi, quelli precedenti a numeri negativi. Questo modello cronologico venne adoperato da diversi scrittori nel XIX secolo. Tra questi ricordiamo Adrien-Quentin Buée (1748-1826) sacerdote cattolico emigrato in Inghilterra nel 1792 in quanto rifiutò di giurare fedeltà alla Costituzione (*prêtre réfractaire*). Nel 1806 egli pubblicò il suo unico lavoro in matematica [11] che però lo colloca tra i primi ad aver proposto una teoria geometrica per chiarire il significato delle quantità immaginarie. Nella prima sezione di [11] Buée aveva esposto alcune considerazioni sui segni $+$ e $-$ che eserciteranno un certo influsso su Augustin Cauchy e George Peacock. Buée, che considerava l'algebra come un linguaggio matematico (*langue mathématique*), criticando la visione newtoniana di algebra come aritmetica universale, considerava i segni $+$ e $-$ in due accezioni: come segni delle operazioni *aritmetiche* di addizione e sottrazione e come segni di operazioni *geometriche*, nel qual caso essi indicano direzioni *opposte*:

Se uno [di questi segni] significa che un segmento deve essere tracciato da sinistra verso destra, l'altro significa che esso deve essere tracciato da destra a sinistra ([11], p. 23)

L'analisi del significato dei segni $+$ e $-$ diviene interessante procedendo nella lettura del lavoro di Buée:

per conoscere che cosa significhi il segno $-$ davanti ad una lettera, occorre conoscere che cosa significherebbe il segno $+$ davanti alla medesima lettera e prendere per $-$ il significato opposto.

Se, per esempio, $+t$ significa un tempo passato, $-t$ significa un tempo uguale ma futuro. Se $+p$ indica una proprietà, $-p$ indica un debito dello stesso valore, ecc. ([11], p.24)

Infine, il modello termologico venne utilizzato da Joseph Diaz Gergonne per chiarire un equivoco sulla natura dello zero che, a più riprese, aveva reso difficile l'accettazione delle quantità negative: se lo zero indica il *nulla*, le quantità negative sono minori di nulla e dunque non possono esistere:

Mi si chiederà ora se considero le quantità negative isolate come maggiori o minori di zero. (...) Distinguerò dapprima due tipi di zero, cioè lo zero assoluto, simbolo di un puro nulla, al di sotto del quale non può conseguentemente trovarsi alcunché, ed uno zero limite o punto di partenza, puramente convenzionale ed a cui si riferiscono sempre le quantità considerate come positive e negative. Tale è, ad esempio lo zero del termometro; il livello di riferimento da cui si parte per valutare rilievi ed avvallamenti; l'epoca da cui partono le cronologie per fissare la data degli eventi, sia anteriori che posteriori; ed è ancora l'origine delle coordinate in geometria analitica.¹⁴ ([25], pp. 10-11)

¹⁴On me demandera maintenant si je considère les quantités négatives isolées comme plus grandes ou comme moindres que zéro? Avant de répondre à cette question, je distinguerai d'abord deux sortes de zéros le zéro absolu, symbole d'un pur néant, et au-dessous duquel conséquemment rien ne saurait se trouver, et un zéro limite ou point de départ, qui est de pure convention, et auquel se rapportent costamment les quantités considérées comme pouvant être positives et négatives. C'est, par exemple, le zéro du thermomètre; c'est le plan de niveau

Si tratta di una risposta importante anche perché fa emergere con chiarezza il carattere *convenzionale* del concetto di zero come punto di separazione tra due classi numeriche.

2.2 Compensazioni

Iniziamo la storia della regola dei segni dall'*Aritmetica* di Diofanto giuntaci incompleta. Diofanto parte da una definizione euclidea di numero:

Numero è una pluralità composta di unità.¹⁵ ([19], p. 3)

e dunque taglia fuori dal concetto di numero anche l'unità. Nonostante questa restrizione, proprio nell'*Aritmetica* si trova la prima formulazione corretta della regola dei segni:

Meno moltiplicato per meno fa meno e meno per più fa meno.¹⁶ ([19], p. 13)

dove però i termini *minus* e *plus* ($\lambda\epsilon\upsilon\psi\sigma$ e $\upsilon\pi\alpha\rho\xi\iota\sigma$) non indicano numeri relativi ma esprimono i concetti di ciò che manca o non esiste e di ciò che esiste. Oltre ad enunciare la regola, Diofanto ne fa delle applicazioni come, ad esempio, nel Problema 36 del libro quarto

Trovare tre numeri tali che il prodotto di due qualsiasi abbia un rapporto assegnato con la loro somma.¹⁷ ([19], p. 287)

Detti x_1, x_2, x_3 i tre numeri, Diofanto considera il caso numerico in cui

$$x_1x_2 = 3(x_1 + x_2) \quad x_2x_3 = 4(x_2 + x_3) \quad x_3x_1 = 5(x_1 + x_3) :$$

posto $x_2 = x$ ed espressi gli altri due numeri in funzione di x , il problema richiede di esprimere il prodotto $(x - 3)(x - 4)$ che viene correttamente calcolato come $x^2 - 7x + 12$, risultato che si ottiene solo applicando la regola dei segni che Diofanto non giustifica. In epoca moderna, i matematici si sforzeranno spesso di giustificare la regola.

Nel 1494 Pacioli pubblicò la *Summa de aritmetica geometria proportioni et proportionalita* in cui la regola dei segni viene enunciata in questi termini (*cfr.* [22], p. 321)

Più via più sempre fa più
Meno via meno sempre fa più
Più via meno sempre fa meno
Meno via più sempre fa meno.

duquel on part pour estimer les élévations et les abaissemens; c'est l'époque de laquelle partent les chronologistes pour fixer les événements, soit antérieurs soit postérieurs; et c'est encore l'origine des coordonnées dans la géométrie analytique.

¹⁵Omnes numeros compositos esse ex aliqua unitatum quantitate.

¹⁶Minus multiplicatum in minus facit plus et minus in plus facit minus.

¹⁷Invenire numeros tres tales ut binorum quorumvis productum ad summam rationem habeat datam.

Essa viene spiegata ricorrendo ad un esempio numerico, svolgendo il prodotto $(10 - 2) \times (10 - 2) = 64$ e ricorrendo alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: dapprima Pacioli calcola i prodotti parziali $10 \times 10 - 2 \times 10 - 10 \times 2 = 60$ per cui $-2 \times (-2) = +4$, se vogliamo ottenere il risultato corretto.

Quanto a Rafael Bombelli, troviamo la regola dei segni nel Libro I della sua *Algebra* ([8], p. 70):

per più chiarezza di questo atto del moltiplicare se ne daranno più esempj.

Più via più fa più.
Meno via meno fa più.
Più via meno fa meno.
Meno via più fa più.

Questa regola viene illustrata su esempi di moltiplicazioni in cui i fattori sono scritti *some se fossero binomij* ([8], p. 70):

$$(6 + 4) \times (5 + 2) \quad (6 + 4) \times (5 - 2) \quad (6 - 4) \times (5 - 2)$$

i cui risultati sono ovviamente noti e dove, applicando la proprietà distributiva, si vede che la regola dei segni consente di riottenere i risultati corretti. Osserviamo come Bombelli non si allontani sostanzialmente in questi esempi dall'impianto di Diofanto, di cui fra l'altro era profondo conoscitore. Più avanti in [7] Bombelli propone una *dimostrazione come meno via meno faccia più*, di natura geometrica, posta subito dopo che è stata discussa la moltiplicazione di due binomi del tipo $a + \sqrt{b}$. La figura a supporto dell'argomento di Bombelli è sostanzialmente la Fig. qui riportata. Egli considera un segmento (*una linea*) gi di lunghezza $\sqrt{18}$ da cui si vuole sottrarre un segmento m di lunghezza $\sqrt{2}$ che viene riportato sul lato gi tramite il punto h tale che $hg = \sqrt{2}$. Occorre trovare il valore del segmento hi . Per questo si costruisca il quadrato $acgi$, di lato gi e si tracci la parallela hb ad ag ; riportato anche su ag un segmento gd di lunghezza $\sqrt{2}$, si tracci per d la parallela a gi che intersecherà in e il segmento hb , determinando un quadrato $abef$ il cui lato ha lunghezza pari al segmento hi richiesto. Ora, il quadrato $abef$ è equivalente al quadrato $acgi$, di area pari a 18 da cui viene sottratto lo gnomone $bagif$. Poiché sia il rettangolo $bagh$ che il rettangolo $dgif$ hanno area $\sqrt{36} = 6$. A questo punto l'area del rettangolo $feih$ si ottiene sottraendo a questo valore, l'area del quadrato $edgh$ che vale 2, e dunque ha valore 4. Da ciò segue che l'area dello gnomone $bagif$ vale 10 e dunque quella del quadrato $abef$ vale 8, cosicché $hi = \sqrt{8}$. Quella di Bombelli è la traduzione geometrica dell'operazione algebrica

$$8 = (\sqrt{18} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{18} - \sqrt{2})$$

eseguita in modo diverso perché dapprima egli calcola $\sqrt{18} \times \sqrt{18}$, l'area del quadrato $acgi$, per sottrarre quella del rettangolo $bagh$ e $(\sqrt{18}) \times (-\sqrt{2})$ e quella del rettangolo $feih$ pari a quattro. Volendo ripercorrere fedelmente i passaggi

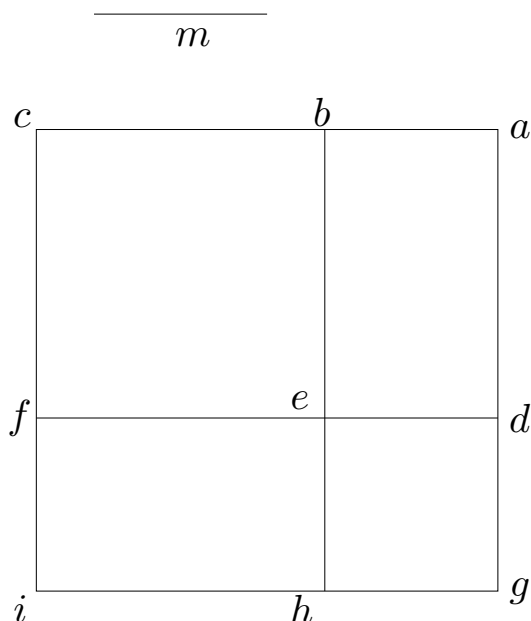


Figura 2.5: Argomento geometrico utilizzato da Bombelli per dimostrare la regola dei segni.

algebrici si sarebbero dovuti sottrarre l'area di $bagh$ e quella, corrispondente a $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{18}$ di $dgif$. Così facendo si sarebbe sottratta due volte l'area del quadrato $edgh$ che va ripristinata una volta, aggiungendo il valore positivo ottenuto da $(-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2})$, per ottenere il risultato corretto. La regola dei segni ha ricevuto il suggello della dimostrazione geometrica che affianca, con pari dignità in Bombelli, la regola enunciata in precedenza. Osserviamo che nel Libro III dell'*Algebra*, Bombelli risolve alcuni problemi che hanno una formulazione simile a quello di Diofanto discusso in precedenza.

Se Bombelli parte ancora da una concezione euclidea di numero, il belga Simon Stevin (Stevino) espone nella *Arithmétique* del 1585 un concetto più estensivo di numero, in quanto comprende l'unità:

Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose. ([51], p. 495)

Stevino aggiunge una spiegazione (*explication*)

Come l'unità è il numero col quale la quantità di una cosa spiegata si dice uno: e due [il numero] col quale la si definisce due: e metà [il numero] col quale la si chiama metà: e radice di tre [il numero] col quale la si chiama radice di tre.¹⁸ ([51], p.495)

¹⁸Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dict un: Et deux par lequel on la nomme deux: Et demi par lequel on l'appelle demi: Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois.

Per quanto vaga la spiegazione data da Stevino, essa evidenzia un punto importante: tutti i numeri *positivi* sono posti sullo stesso piano: naturali, razionali ed irrazionali. Inoltre, il numero è legato al concetto di quantità. Certamente è il distacco dall'impianto euclideo ciò che più colpisce e Stevino ne è consapevole al punto da aggiungere una riflessione sul fatto che l'unità sia un numero ([51], p. 496):

È nota l'opinione comune, che l'unità non sia affatto un numero ma solo il suo principio o inizio e che essa sta al numero come il punto al segmento, ciò che noi neghiamo argomentando in questo modo:

La parte è della stessa materia del tutto,
L'unità è parte della moltitudine di unità,
Ergo l'unità è della stessa materia della moltitudine di unità;
ma la materia della moltitudine di unità è il numero,
Dunque la materia dell'unità è numero.

E chi lo nega, fa come chi neghi che un pezzo di pane sia fatto di pane.

Ora che l'unità è numero e che si è insistito sulla differenza tra punto ed unità, chi prende il posto del punto in campo numerico?

L'unità è parte del numero, il punto non è parte della linea e così ancora: l'unità non rappresenta come numero ciò che il punto è per la linea. Chi dunque gli corrisponde? Io dico che è lo 0 (che viene detto comunemente Nulla, e che noi chiamiamo principio nella successiva definizione 3^a) ciò che non solo testimonia le loro somiglianze ma anche gli innegabili effetti. Le somiglianze sono queste:

Come il punto viene aggiunto ad un segmento senza esserlo, così 0 si aggiunge ad un numero, senza che lo sia.

Come il punto non si divide in parti, così lo zero non si divide in parti.

Come molti punti, fossero pure infiniti non sono un segmento, così tanti 0, anche una moltitudine infinita, non sono un numero.

Come il segmento AB ne si può accrescere aggiungendogli il punto C , così non è possibile aumentare il numero $D[=]6$ aggiungendogli $E[=]0$ perché aggiungendo 0 a 6 non si ha che 6.

Stevino supera la concezione euclidea di numero ma non l'idea euclidea di segmento, in virtù della quale un segmento *non* è composto da (infiniti) punti. La corrispondenza non è tra numeri e punti di una semiretta ma tra numeri e *segmenti* e lo 0 vede sacrificata la propria identità di numero perché nell'analogia gioca il ruolo del punto. Stevino va oltre e, per conservare la corrispondenza tra segmenti e numeri compie un'analogia un po' ardita.

Tuttavia, se si ammette che [il segmento] AB sia prolungabile fino al punto C in modo che AC sia un segmento continuo, allora AB è accresciuta grazie al punto C ; e similmente si si ammette che $D[=]6$ sia prolungato fino ad $E[=]0$ cosicché $DE[=]60$ dia un numero continuo che fa 60 allora $D=6$ si aumenta grazie allo zero.

Il valore [posizionale] delle cifre viene visto in corrispondenza dell'operazione geometrica di prolungare un segmento fino a raggiungere un punto.

Nel libro II della *Arithmétique*, Stevino considera le operazioni tra i numeri interi, razionali ed irrazionali (un nome, quello di irrazionale, che Stevino rifiuta categoricamente) per poi passare alle regole per il prodotto dei *multinomi radicali interi* cioè di espressioni quali $a - b$ o $c - d$. Egli enuncia il *teorema* seguente

Più moltiplicato per più dà più per prodotto, e meno moltiplicato per meno, dà più per prodotto, e più moltiplicato per meno dà meno o meno moltiplicato per più dà meno come prodotto. ([51], p. 560)

La dimostrazione di Stevino segue uno schema ternario, i cui primi due punti sono di natura pedagogica dal momento che costituiscono la spiegazione del dato (*explication du donné*) e della tesi (*explication du requis*). Per spiegare i dati, Stevino considera i binomi interi $8 - 5$ e $9 - 7$ da moltiplicare tra loro. Come Pacioli, utilizza la proprietà distributiva per calcolare il risultato del prodotto. La spiegazione della tesi si riduce ad una riproposizione dell'enunciato utilizzando i simboli $+$ e $-$, invece delle parole. La dimostrazione si articola in due parti: anzitutto Stevino osserva che, essendo $8 - 5 = 3$ e $9 - 7 = 2$, il prodotto vero (*vrai produit*) deve essere 6, che è compatibile solo con la regola dei segni enunciata nel teorema. Egli propone poi una dimostrazione geometrica (Figura

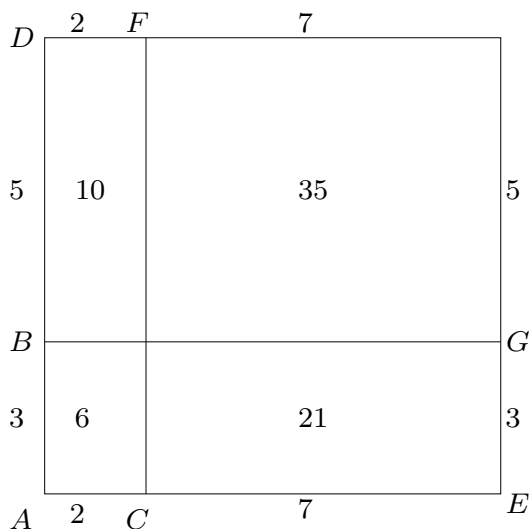


Figura 2.6: Argomento geometrico utilizzato da Stevino a supporto della validità della regola dei segni ([51], p. 561).

2.6) in cui si costruisce il rettangolo DE sui segmenti $AD = 8$ e $AE = 9$ per poi staccare su questi i segmenti $AB = 8 - 5 = AD(= 8) - DB(= 5)$ e $AD = AE(= 9) - CE(= 7)$. Il prodotto richiesto è l'area del rettangolo di lati AB e BC , il cui valore 6 è ciò che serve da aggiungere alle aree dei rettangoli CG e BF per ottenere l'area del rettangolo ED .

Come Bombelli, anche Stevino applica la regola per ricomporre il risultato di un prodotto tra quantità positive che vengono viste come *differenze* tra altre quantità positive.

Come Stevino, anche Newton si distaccherà dalla concezione euclidea di numero ma, a differenza di Stevino, la sua definizione è precisa:

*Intendiamo con numero non tanto una moltitudine di unità, quanto il rapporto astratto di una quantità qualsiasi con un'altra dello stesso genere che viene presa per unità.*¹⁹ ([36], p. 4)

Viète parla della regola dei segni nella *In Artem analyticam Isagoge* [54] dove stabilisce le regole da rispettare nel fare algebra. Nel capitolo IV di questo libretto su cui torneremo in seguito, Viète opera la distinzione fondamentale tra *logistica numerosa* e *logistica speciosa*, cioè tra il calcolo numerico e quello letterale, segnando un confine netto tra aritmetica ed algebra in senso stretto: *il calcolo numerico è quello che si esegue operando tramite numeri, il calcolo delle specie è quello che opera ricorrendo alle specie o alle forme delle grandezze, grazie al ricorso di lettere dell'alfabeto, ad esempio.*²⁰ ([54], p. 4)

Entrambe le *logistiche* ubbidiscono alle regole (*praecepta canonica*), delle quattro operazioni fondamentali di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione: in questa sede è dato rilievo alla regola dei segni.

Parlando della sottrazione, Viète enuncia correttamente che $A - (B + D) = A - B - D$ e, quando deve considerare $A - (B - D)$ afferma, come è giusto che sia, $A - (B - D) = A - B + D$ fornendo questa giustificazione:

Se ora si toglie D da B e $B - D$ viene sottratto ad A , il residuo sarà A meno B più D perché sottraendo B si sottrarrà una grandezza maggiore del dovuto che deve essere compensata dall'addizione della grandezza D .²¹ ([54], p.5)

Passando alla regola dei segni, Viète dapprima enuncia la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma e poi osserva che il prodotto di una quantità positiva per un'altra quantità di segno indeterminato assume il segno di quest'ultima. Come *conseguenza* di questa regola (*praeceptum*) Viète deduce la regola dei segni. Considerando il prodotto $(A - B)(D - G)$ egli richiama che $A(-G) = -AG$ perché altrimenti il prodotto di A con $(D - G)$ non sarebbe svolto in modo accurato in quanto bisogna diminuire $A \times D$; similmente quando si svolge il prodotto $-B(D - G)$, fermandosi a $-BD$ si commetterebbe un errore che occorre *compensare* aggiungendo BG .

Poiché il tutto è uguale alle sue parti, così i prodotti con i segmenti di una certa grandezza sono uguali al prodotto con l'intera grandezza. E quando una grandezza positiva viene moltiplicata per un'altra grandezza positiva, il risultato sarà positivo, per una grandezza negativa, negativo. Conseguenza di questa regola è che il prodotto

¹⁹Per numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem que pro unitate habetur rationem intelligimus.

²⁰Logistice numerosa est quae per numeros, speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, utpote per Alphabetica elementa.

²¹At si iam negetur D de ipsa B , & B minus D ab A subtrahenda sit, Residua erit A minus B plus D , quoniam subtrahendo B magnitudinē subtrahitur plus aequo per magnitudinem D ideò additione illius compensandum.

di due grandezze negative è positivo in quanto se si moltiplica $A - B$ per $D - G$, il risultato del prodotto tra A che è positiva e l'opposto di G , rimane negativo perché altrimenti si sottrarrebbe troppo ed il prodotto con A non sarebbe accurato cosicché per compensare l'errore occorre che il prodotto tra grandezze B e G entrambe negative sia positivo.²² ([54], pp.5-6)

L'argomento di Viète incontrò una certa fortuna, tanto che lo si trova sostanzialmente immutato in testi di molto posteriori: ad esempio nel *Cours de Mathématiques* di Étienne Bezout [7] che si esprime in questi termini, illustrando la regola nel caso del prodotto $(a - b) \times (c - d)$:

In effetti, siccome il moltiplicatore è più piccolo di c di una quantità pari a d , occorre che non si prenda il moltiplicando se non un numero di volte quante unità sono in c diminuito di d ; siccome non è possibile fare questa riduzione prima della moltiplicazione, si può prendere dapprima $a - b$ tante volte quante sono le unità in c , cioè moltiplicare $a - b$ per c e poi sottrarre $a - b$ preso tante volte quante unità sono contenute in d , cioè a dire, togliere il prodotto di $a - b$ per d . ([7], p.18)

Si trova ripetuto l'argomento di Viète anche nelle *Leçons élémentaires des mathématiques* [28] dell'abate e celebre astronomo Nicolas Louis de La Caille (1713-1762). Le *Leçons* furono pubblicate per la prima volta nel 1741 e furono riviste dall'abate Joseph-François Marie (1738-1801). Dopo aver enunciato la regola dei segni, all'articolo 127 Lacaille osserva:

Occorre ora dimostrare la regola dei segni²³

E procede con l'argomento di Viète, corroborato dall'argomento adoperato da Mac Laurin che fa leva sull'introduzione dello zero (si veda Sez. ...). Eppure, dopo tanto sforzo, Marie²⁴ deve riscontrare che gli argomenti e le dimostrazioni (*preuves*) addotte non sono sufficienti a diradare i dubbi di alcuni, poco avvezzi al linguaggio algebrico. Marie abbozza, al §128, anche una possibile causa di questa ostinata resistenza:

Malgrado questi ragionamenti e dinostrazioni, bisogna tuttavia convenire che ad un orecchio poco aduso al linguaggio algebrico risulti piuttosto strano sentire che $-a$ moltiplicato per $-a$ dia $+a^2$.

Quella sorta di imbarazzo e di dubbio che questo risultato caso provoca di prim'acchito, sembra provenire principalmente dall'espressione stessa della parola "moltiplicato" che, non essendo entrata in uso in aritmetica che per

²²Quoniam totum est suis partibus æquale, ideoque facta sub segmentis alicuius magnitudinis æquantur facto sub tota. Et cum adfirmatum unius magnitudinis nomen ducetur in alterius quoque magnitudinis nomen adfirmatum, quod fiet erit adfirmatum, & in negatum, negatum. Cui præcepto etiam consequens est ut ductione negatorum nominum alterius in alterum, factum sit adfirmatum, ut cum $A - B$ ducetur in $D - G$, quoniam id quod fit ex adfirmata A in G negata, manet negatum, quod est nimium negare minuerere, quandoquidem A est ducenda magnitudo producta non accurata. Et similiter quod fit ex negata B in D adfirmata, manet negatum, quod est rursum nimium negare quandoquidem D est ducenda magnitudo producta non accurata, ideo in compensationem dum B negata ducitur in G negata factum est adfirmandum.

²³Maintenant il faut démontrer la règle des signes.

²⁴Credo si tratti di un'aggiunta di Marie all'edizione del 1784 perché nell'edizione del 1770, che Marie aveva già notevolmente ampliato, le considerazioni che seguono non sono presenti.

indicare l'addizione ripetuta di una stessa quantità positiva, deve naturalmente offrire un significato ambiguo, quando se ne faccia uso per indicare una vera sottrazione di quantità negative.²⁵

Mi soffermo ancora un poco sull'opera di Lacaille per notare una circostanza curiosa, legata alla traduzione italiana delle *Leçons* a cura degli scolopii Stanislao Canovai e Gaetano Del-Ricco: in particolare mi riferisco alla traduzione apparsa a Firenze nel 1791. Si tratta di un'edizione con *nuove illustrazioni e aggiunte*, come recita lo stesso frontespizio. Per la regola dei segni, si direbbe però che i traduttori abbiano *tolto* qualcosa, anziché aggiunto. Parlando della sottrazione algebrica essi riconoscono, come Lacaille, che

Non si riconosce egualmente bene che per indicare la sottrazione di una quantità $-a$, bisogna scriver $+a$:

ciononostante, quando si passa alla moltiplicazione, non solo omettono la dimostrazione di Lacaille ma osservano

È però assurdo il dire che $+ \times +$ dà $+$, che $+ \times -$ dà $-$ ec. perché si moltiplicano le quantità, non i segni: ma l'uso autorizza queste espressioni. ([29], p. 50)

Si tratta di un passo indietro rispetto anche a Bombelli che, con la sua formalizzazione, aveva isolato i segni dai numeri. Qui invece i segni sono totalmente assorbiti dai numeri e non hanno, se non per omaggio alla tradizione, la possibilità di ricombinarsi tra loro. Non si tratta di un caso isolato: A. Amiot, nella seconda edizione delle sue lezioni di algebra del 1860 (!), commenta così la formulazione diffusa della regola dei segni:

Nelle applicazioni questa regola dei segni si scompone in quattro parti, enunciate in questo modo:

+ moltiplicato per + dà +
+ moltiplicato per - dà -
+ moltiplicato per - dà -
- moltiplicato per - dà +

²⁶ ([2], p. 28)

²⁵Malgré ces raisonnements et ces preuves, il faut pourtant convenir qu'il est assez étrange pour des oreilles peu faites au langage algébrique, d'entendre dire que $-a$ multiplié par $-a$ donne $+a^2$.

L'espèce d'embarras et de doute que ce résultat occasionne au premier abord, semble venir principlement de l'expression même du mot multiplié, lequel n'ayant été mis en usage dans l'Arithmétique, que pour signifier des additions répétées d'une même quantité positive, doit naturellement offrir un sens louche, quand on le fait servir pour marquer une véritable soustraction des quantités négatives.

²⁶Dans les applications cette règle des signes se décompose en quatre parties q'on énonce de la manière suivante:

+ multiplié par + donne +
+ multiplié par - donne -
+ multiplié par - donne -
- multiplié par - donne +

bien qu'on ne puisse faire aucun opération de calcul sur les signes $+$ et $-$ qui ne sont pas des quantités.

Affermazione che non figura più nella quinta edizione del 1878 anche se l'autore non rinuncia a riformulare la frase che anticipa la regola come: *Dans les applications, on se sert souvent des locutions vicieuses* ([3], p. 29). Sia pure che si tratti di criticare una espressione semplicistica della regola, ciononostante la frase sull'impossibilità di moltiplicare i segni sorprende un poco, se si pensa alla formulazione che ne aveva data Augustin-Louis Cauchy in un testo tanto influente e diffuso come il *Cours d'Analyse Mathématique*, pubblicato nel 1821. Nella prima parte, dedicata all'analisi algebrica, Cauchy introdusse la distinzione tra numero e quantità: per numero, Cauchy intende la definizione aritmetica di stampo newtoniano come *misura assoluta di grandezze*. La nozione di quantità viene collegata ai *numeri preceduti dai segni + o -*. Le quantità servono ad esprimere un accrescimento od un decremento ed *il segno + o - posto davanti ad un numero ne modificherà il significato, come fa un aggettivo con un sostantivo* ([16], p.2): di questa analogia linguistica Cauchy è debitore a Buée. Cauchy afferma che

In algebra non solo i numeri, ma anche le quantità sono rappresentate da lettere. Poiché si è convenuto di porre i numeri assoluti nella classe delle quantità positive, possiamo indicare la quantità positiva che ha A come valore numerico, sia attraverso $+A$ che A soltanto, mentre la quantità negativa opposta viene rappresentata da $-A$. Similmente, nel caso in cui la lettera a rappresenti una quantità si conviene di ritenere sinonimi le due espressioni a e $+a$ e di rappresentare con $-a$ la quantità opposta a $+a$. Queste osservazioni sono sufficienti per stabilire quanto è noto col nome di regola dei segni ([16], pp. 3-4)

Cauchy rimanda alla Nota I al termine del I volume del *Cours* per una discussione della regola. Qui, richiamati i concetti esposti all'inizio del corso, Cauchy si esprime in questi termini:

Se con A rappresentiamo sia un numero sia una quantità qualsiasi, e si pone

$$a = +A \quad , \quad b = -A,$$

si avrà

$$\begin{aligned} +a &= +A & +b &= -A \\ -a &= -A & -b &= +A. \end{aligned}$$

Se nelle ultime quattro equazioni vengono reinseriti, al posto di a e b i loro valori tra parentesi, si otterranno le formule

$$\begin{cases} +(+A) = +A, & +(-A) = -A, \\ -(+A) = -A, & -(-A) = A, \end{cases} \quad (1)$$

In ciascuna di queste formule il segno del secondo membro è quello che si chiama il prodotto dei due segni del primo membro. Moltiplicare due segni tra loro, significa formarne il prodotto. Un solo sguardo alle equazioni (1) basta a stabilire la regola dei segni, compresa nel teorema che ora enuncio:

I TEOREMA. Il prodotto di due segni simili è sempre $+$ ed il prodotto di due segni opposti è sempre $-$. ([16], pp.404-405)

Osserviamo alcuni fatti relativi a questa formulazione. Anzitutto, aumenta il grado di astrazione: Cauchy non sente il bisogno di modelli od esempi numerici

concreti a supporto della regola. Cauchy enuncia ancora la regola all'interno di un teorema, non di una definizione. Egli poi insiste sul fatto che vengono moltiplicati i *segni*, slegando la validità della regola alla natura delle quantità cui essa viene applicata:

Una conseguenza immediata delle definizioni precedenti è che la moltiplicazione dei segni non ha alcun rapporto con la moltiplicazione dei numeri. Ciò non deve sorprendere se si osserva che la nozione di prodotto di due segni si presenta fin dai primi passi che si muovono in analisi, visto che nell'addizione o sottrazione di un monomio, il segno di questo monomio viene veramente moltiplicato per il segno $+$ o $-$. ([16], p. 406)

Credo che questa asserzione evidenzi la distinzione tra gli elementi di un insieme e la *struttura* che viene indotta in esso grazie alle proprietà delle operazioni che mettono in relazione elementi dell'insieme stesso.

L'argomento di Viète fu utilizzato anche in un testo particolare: gli *Éléments d'algèbre* di Alexis Claude Clairaut (1713-1768) che ora esaminiamo basandoci sulla quarta edizione, apparsa nel 1768. Anzitutto si segnala la difficoltà per i principianti e l'imbarazzo dei loro maestri:

Tra tutte queste operazioni [aritmetiche], la moltiplicazione è quella alla quale si arrestano i principianti e la cui spiegazione imbarazza maggiormente i maestri: il principio che essa comprende, che due quantità negative abbiano per prodotto una quantità positiva, è pressoché sempre lo scoglio degli uni e degli altri.²⁷ ([15], p. vj)

Individuato il malanno, il rimedio proposto da Clairaut è quello di posticipare il momento in cui la regola (*ce principe*) viene stabilita, dopo aver fatto svolgere delle operazioni in cui la sua necessità viene avvertita, precisamente:

Inizio con l'insegnare come moltiplicare una quantità composta da più termini positivi e negativi per un solo termine che suppongo sempre positivo, perché è di solito difficile abituarsi a considerare una quantità negativa come esistente da sola.²⁸ ([15], p. vj)

Fatto questo, Clairaut passa al caso in cui anche il moltiplicatore è differenza di quantità positive e negative. A questo punto della trattazione non è difficile notare che Clairaut non sta facendo altro che ripetere la strada battuta da Viète e da molti altri prima di lui. Ciò che è interessante è che egli metta in luce le motivazioni *pedagogiche* che rendono questo modo di procedere adatto a superare lo scoglio della regola dei segni: al termine della lettura di queste pagine di Clairaut si ha l'impressione di un esercizio di maieutica perché il procedimento che egli illustra tende proprio a far gustare gradualmente al discente un contenuto sulle prime indigesto. Clairaut ritiene che

In questo modo, abito i principianti alla moltiplicazione, senza avere necessità di enunciare quelle regole ordinarie, che *meno per più*, *moins per moins* fa *plus*, ecc. le

²⁷La multiplication est de toutes les opérations celle qui arrête le plus les Commencans, & dont l'explication embarasse le plus les maîtres: ce principe qu'elle renferme, que deux quantités negatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

²⁸Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & negatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considerer une quantité négative, comme existant seule.

quali, presentandosi contraddittorie all'orecchio, lasciano quasi sempre credere che ci sia contraddizione effettiva.²⁹ ([15], p. vij)

Insomma, la regola dei segni “suona male” e lascia intendere a chi non è esperto che si stia giocando con le parole, gettando un velo sinistro sul fondamento razionale dell'algebra tutta: porre ogni cura nell'evitare fraintendimenti è importante perché ne va dell'onore di chi insegna i principi dell'algebra!

Eppure vi è un'obiezione che potrebbe essere sollevata:

Si può ritenere senz'altro che non avvia fatto altro che eludere la difficoltà e l'avrei certamente elusa se non parlassi di moltiplicazione tra quantità puramente negative per altre pure totalmente negative, operazione nella quale non si potrebbe evitare la contraddizione apparente di cui ho fatto cenno.³⁰ ([15], p. viij)

Vi è piena consapevolezza del fatto che l'argomento classico *à la Viète* richieda un supplemento per potere essere accettato pienamente in algebra, così come la regola dei segni appariva pienamente legittima in aritmetica. Anche qui l'approccio di Clairaut è, per così dire “dal basso”: egli conduce il lettore ad esaminare un problema in cui egli è obbligato a considerare

quantità negative indipendentemente dalla presenza di quantità positive da cui esse vengano sottratte.³¹ ([15], viij)

A questo punto vi è una nuova virata perché, nel momento in cui presenta un problema che conduce al prodotto tra quantità negative

prendo la decisione che senza dubbio presero i primi analisti che dovettero svolgere queste operazioni, e che vollero seguire una strada completamente sicura: cerco una soluzione del problema grazie alla quale sia possibile evitare ogni tipo di moltiplicazione o divisione tra quantità negative. In questo modo ottengo il risultato senza adoperare ragionamenti se non quelli su cui non ci può essere dubbio alcuno; trovo così ciò che dovevano essere quei prodotti o quozienti di quantità negative ottenuti nella prima soluzione. Non è allora difficile di trarne quei principi tanto noti che *meno per meno* fa *più*, etc.³² ([15], pp. viij-ix)

Vediamo all'opera questo procedimento nel problema riportato all'articolo LVI:

²⁹Par ce moyen, je familiarise les Commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins par plus, moins par moins donne plus, &c. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y a dans les choses.

³⁰On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne sçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler.

³¹quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retrachées.

³²je prends le parti qu'ont sans doute prise les premiers Analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entièrement sure, je cherche une solution au Problème par laquelle je puisse éviter toute espece de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autre raisonnemens, que ceus sur lesquels on ne peut former aucun doute; & je vois ce que doivent être ces produit ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la premiere solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que *moins par moins* donne *plus*, &c.

Due sorgenti che sgorgano ciascuna in modo uniforme, hanno riempito insieme un contenitore a , la prima sgorgando durante un intervallo di tempo b , l'altra durante un intervallo c ; le medesime sorgenti hanno riempito un altro recipiente d ; la prima sgorgando per un tempo e , la seconda per un tempo f : si domanda la portata di ciascuna sorgente.³³ ([15], p. 68)

Dette x ed y le quantità d'acqua erogate dalle due sorgenti al giorno, il problema equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} bx + cy = a \\ ex + fy = d \end{cases} \quad (2.7)$$

che ammette la soluzione

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} \quad y = \frac{ae - bd}{ce - bf}.$$

Per vederne delle applicazioni, Clairaut tratta dei casi particolari e, quando pone $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$, la formula risolutiva (2.7) fornisce $x = \frac{300}{-10}$ e $y = \frac{-400}{-10}$, soluzione che Clairaut commenta in questi termini

La prima volta in cui si sono trovati valori simili, cioè delle quantità negative divise per quantità negative e delle quantità positive, divise per delle negative, si sarà provato imbarazzo nel capire che cosa sovrassero significare e coloro che avessero temuto di compiere dei viziosi argomenti metafisici, avranno tentato di riprendere la questione un po' prima, per evitare questo tipo di divisioni.³⁴ ([15], pp. 71-72)

Nell'esempio considerato, inserendo i valori scelti per i parametri in (2.7), lo si trasforma in

$$\begin{cases} 4x + 6y = 120 \\ 3x + 7y = 190 \end{cases}$$

e si ricava x da entrambe le equazioni come $x = 30 - \frac{3}{2}y$ ed $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$. Uguagliando questi valori si ottiene $y = 40$ che, inserito a sua volta nella prima espressione di x , fornisce $x = -30$, che coincide con il risultato precedente, senza scomodare la regola dei segni. Al contrario, questo argomento serve a Clairaut per corroborare la plausibilità della regola dei segni. Certo, un esempio da solo non è un teorema

Mais s'il est facile qu'on se doute, pour ainsi dire, de ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de réflexions, & il y a apparence que les premiers Analistes n'en auront été sûrs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples. ([15], p. 73)

³³Deux sources qui coulent chacune uniformément, ont rempli ensemble un réservoir a , l'une en coulant pendant un temps b , l'autre pendant un temps c ; les deux mêmes sources ont rempli un autre réservoir d ; la première coulant pendant le temps e , la seconde pendant le temps f : on demande la dépense de chacune de ces sources.

³⁴La première fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est à dire, des quantités négatives divisées par des quantités négatives, & des positives, divisées par des positives, on aura dû être embarrassé à savoir ce qu'elles devoient signifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens métaphysiques, auront cherché à reprendre la question un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes des divisions.

Ed ecco che Clairaut finalmente dimostra alla Viète la regola dei segni arricchito da questa considerazione

Con questo metodo, si vede molto chiaramente che il prodotto di una quantità come $a - b$ per un'altra $c - d$ deve essere $ac - bc - ad + bd$; (...) Non resta dunque altro da sapere se, allorquando due quantità negative come $-b$ e $-d$ non sono precedute da alcuna quantità positiva, il loro prodotto sia ancora $+bd$. Ora, è facile riconoscere che è così, in quanto il metodo grazie al quale si è scoperto che il prodotto di $a - b$ per $c - d$ è $ac - bc - ad + bd$, non specifica alcun valore particolare né per a né per c e dunque deve essere ancora valido quando queste quantità sono uguali a zero.³⁵ ([15], pp. 73-74)

Non ci può essere confessione più piena di questa che dichiarare come la validità della proprietà distributiva venisse considerata come ovvia nel passaggio dai numeri naturali ai numeri relativi. Questo passaggio di Clairaut si pone in sintonia con il modo tenuto da Rolle ottant'anni prima nel dedurre la regola dei segni tra quantità negative che esamineremo più avanti.

2.3 Una singolarità: Gottfried Wilhelm Leibniz

La posizione di Leibniz (1646-1716) sulla regola dei segni merita attenzione perché si distacca dalle presentazioni degli altri contemporanei in diversi punti. Nella *Mathesis Universalis*, egli introduce le quantità negative sul modello dei debiti e crediti e ne mette in luce una particolare virtù: la loro comparsa nella risposta di un problema indica in quale modo la domanda contenuta nel problema dovesse essere formulata e in quale modo si debba rispondere ad essa.

Spesso si presentano nel calcolo delle quantità negative, quando da un numero minore se ne debba sottrarre uno maggiore, e anche se non sembrano rispondere alla questione, in realtà vi rispondono nel modo più adeguato, non soltanto infatti indicano che la domanda era stata mal formulata (benché si debba perdonare, perché non fu possibile prevederlo), ma anche [indicano] in qual modo la si doveva formulare e che cosa occorre rispondere per comprenderla correttamente. ([31], p. 70)

Il problema che Leibniz usa per illustrare quanto appena asserito è quello del solito *Tizio* che ha più debiti che crediti e quindi alla fine dei conti:

È evidente [...] che perda tutta quella somma quale è provvista del segno $-$.

Quindi qui il segno negativo è aderente alla somma (positiva) di denaro e la *trasforma* in un debito. Se la differenza tra crediti e debiti, $a - b$ viene indicata con x , nel caso in esame si ha $x = -c$ dove $c > 0$ è la *grandezza (molem)*, comune sia a $+c$ che a $-c$. Leibniz osserva:

³⁵Suivant cette méthode, on voit très clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$ doit être $ac - bc - ad + bd$; (...) Il ne rest donc plus q'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or, c'est ce donc il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $ac - bc - ad + bd$, ne spécifiant aucune grandeur particuliere ni à a ni à c , doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zero.

Viceversa, appare evidente che, se egli perde x ovvero $-c$, egli guadagna ed un giudice che all'erede tolga tale eredità x , attribuirà allo stesso la somma c ; pertanto la sottrazione di una quantità negativa è l'addizione di una quantità affermativa della stessa grandezza. (...) E ciò è quello che comunemente si dice, [che] $-$ per $-$ fa $+$. ([31], p. 70)

Mi sembra degno di nota che Leibniz distingua i due significati coesistenti nel segno $-$: quello di attributo di una quantità che ne cambia la natura, da positiva a negativa; quello di operazione aritmetica tra due numeri. Inoltre, Leibniz enuncia (parte) della regola dei segni parlando di *sottrazione* e non di *moltiplicazione*: è il condono di un debito—vista come sottrazione di una quantità negativa—che richiede la combinazione di due segni negativi. Leibniz ritorna sulla regola in un altro passo, contenente le *dimostrazioni* degli elementi dell'addizione e della sottrazione, come dell'uso dei segni $+$ e $-$ e dove, un po' a sorpresa per il lettore moderno, partendo dall'assioma $a = a$, egli deduce due *teoremi*: se $a = b$, allora anche $b = a$; se $a = b$ e $b = c$, allora $a = c$. In altre parole, egli ritiene che le proprietà simmetrica e transitiva dell'uguaglianza siano filiazioni della proprietà riflessiva che viene assunta come nozione evidente. Proceda a dimostrare come evidente (Theorema (8)) che $+a + b = +b + a$ ed introduce (Explicatio (10)) il segno di 0 (*signum 0*) per indicare l'elemento neutro dell'addizione: $+0 + a = +a$ per mostrare la proprietà invariantiva: se $a = \ell$ e $b = m$, allora $a \pm b = \ell \pm m$. Grazie ad essa, ed alla definizione di $0 = b - b$, Leibniz dimostra che, da $a + b = e$ deve seguire che $a = b - e$, così come, se $a = -b$, allora si deve avere anche $b = -a$. Infatti, per la proprietà invariantiva, da $a = -b$ segue anche $a + b = b - b = 0$ e dunque, per il risultato appena mostrato, $b = -a$. Da qui Leibniz *dimostra* anche che

$$-a - (-a) = 0$$

in questo modo: se si pone $-a = f$, si ha anche $f = -a$ e siccome $f - f = 0$, ne segue la tesi. Da qui egli ottiene che

$$- - a = a :$$

infatti, già sappiamo che $-a - (-a) = 0 = a - a$ per cui il risultato segue aggiungendo a ad ambo i membri, grazie alla proprietà invariantiva. Anche le restanti porzioni della regola dei segni $- + a = -a$ e $+ - a = -a$ seguono dai risultati ottenuti da Leibniz in questa sezione.

Introdotta la moltiplicazione come addizione ripetuta, Leibniz dà delle giustificazioni economico-giuridiche alle quattro articolazioni della regola dei segni. a) $++ = +$ (*ponere ponens est ponere*): *chi ti dona il diritto di 100 denari, che puoi esigere quando vuoi, egli ti dona 100 denari ovvero $+(+100) = +100$* . Leibniz dimostra poi, servendosi della proprietà dell'unità di essere elemento neutro per il prodotto, che:

b) $+ - = -$ (*ponere tollens est tollere*). Qui la spiegazione è piuttosto originale e curiosa:

come se ti donassi un animale assolutamente di nessun valore alla condizione che tu lo mantenga e nutra, il mio dono sarà piuttosto una pena tanto più grande quanto più vorace è l'animale.

c) $-+ = -$ (*tollere ponens est tollere*). Leibniz è consapevole che questo caso segue dal precedente invocando la commutatività del prodotto, posta come ovvia proprietà in precedenza ma aggiunge ancora una spiegazione: *se ti nego il diritto a cento denari da esigersi tranquillamente, saranno negati cento denari o $-1 \times (+100) = -100$.*

d) $-- = +$ (*tollere tollens est ponere*). Viene spiegata con questo esempio: *se ti togliessi quell'animale inutile e vorace che ti eri preso a condizione di nutrirlo, e ti liberassi da quell'onere, sembrerà che ti doni tanto quanto il danno che quell'animale fino a quel momento fosse in grado di arrecare ad un altro.*

2.4 Il ruolo dello zero

Attorno al 1690, Michel Rolle (1652-1719) pubblicò un *Traité d'Algèbre* dove, dopo aver spiegato con i consueti modelli finanziari o cinematici il senso dell'essere una quantità minore di nulla, egli offre tre argomenti per illustrare la regola dei segni:

I principianti fanno fatica a capire perché il segno $-$ si cambi in $+$ nella sottrazione dei numeri negativi e perché il numero che resta superi quello dal quale si è partiti per la sottrazione. Ecco diversi modi per spiegarlo. ([7], pp. 16-17)

Rolle utilizza la regola sull'esempio numerico $14 - (-2) = 16$ con questi tre argomenti

1) Si suppone dapprima di dover sottrarre da 14 il numero 5-2: $14 - (5 - 2)$. Rolle osserva, come Viète, che se si sottrae 5 da 14 si sottraggono due unità di troppo che vanno ripristinate per cui $14 - (5 - 2) = 14 - 5 + 2$.

Se si sopprime il 5, ovvero se si suppone che al posto del 5 non vi sia niente, allora il 5-2 da sottrarre si cambia in -2 e la sottrazione passa da $14 - 5 + 2$ a $14 + 2$, cioè 16. ([7] p. 16)

2) Il secondo argomento si basa sull'introduzione dello 0: la differenza tra 14 e 0 è 14; quella tra 0 e -2 è 2 e dunque la differenza tra 14 e -2 è 16.

3) L'ultimo argomento è il più interessante perché costruito sulla base di tre principi che Rolle chiama *indubitabili*:

a): Il significato di sottrazione: sottrarre una quantità da un'altra significa trovare una terza grandezza che, aggiunta alla seconda, ridia la prima;

b) se si suppone che il tutto sia l'unione di due parti e che dal tutto si sottrae una parte, allora l'altra parte è ciò che rimane dalla sottrazione;

c) $2-2=0$.

Dal principio c) Rolle deduce che $14 + 2 - 2 = 14$; per b) si ha che, tolta da 14 la prima parte (-2) ciò che rimane è l'altra parte, $14+2$. D'altro canto, sottraendo -2 a 14 si ottiene un risultato che, addizionato a -2 dà 14, per a). Ora, da c) segue che aggiungendo -2 a $14+2$ si ha pure 14 e quindi $14+2$ è il risultato dell'operazione.

Rolle enuncia la regola dei segni senza commenti all'inizio del trattato [7] ma vi torna successivamente per chiarirla. La spiegazione che $-3 \times 4 = -12$ poggia sul significato di moltiplicazione come addizione del moltiplicando ripetuta con sé stesso un numero di volte pari al moltiplicatore: in questo caso

$$-3 \times 4 = -3 + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

Quando occorre mostrare che anche $4 \times (-3) = -12$ Rolle invoca la proprietà commutativa del prodotto che, giova ricordarlo, vale in aritmetica e va *postulata* in algebra, quando entrano in scena quantità negative. Il caso $(-4) \times (-3)$ viene trattato dicendo

si ha il solo scopo di sottrarre -4 tante volte quante sono le unità nel numero 3. Ora -4 , sottratto una volta, dà $- - 4$ per la definizione dei segni. Dunque tre volte $- - 4$ daranno $- - 12$ ricorrendo alla moltiplicazione ordinaria ovvero all'addizione (...). Ma abbiamo visto che due $-$ di seguito valgono un $+$. Da cui segue che -4 moltiplicato per -3 dà 12 . ([7], p. 19)

Inutile dire che questa spiegazione è poco convincente perché il segno $-$ di fronte al moltiplicatore scompare quando a Rolle conviene invocare le proprietà della *moltiplicazione ordinaria* come addizione ripetuta ma così facendo la regola resta misteriosa. Più convincenti rimangono gli esempi numerici prodotti a supporto della regola che, come in Bombelli e Stevino, consistono nello scrivere i fattori di un prodotto tra numeri positivi come differenza di due numeri positivi e mostrare, invocando la proprietà distributiva, come la regola dei segni permetta di riottenere il risultato corretto.

Colin MacLaurin (1698-1746) scrisse un trattato di Algebra che venne pubblicato postumo nel 1748. Nel capitolo iniziale egli traccia un parallelo tra geometria ed algebra osservando che

*Nella geometria, linee vengono rappresentate da una linea, triangoli da un triangolo ed altre figure da una figura dello stesso tipo; in algebra, però, le quantità sono rappresentate dalle lettere dell'alfabeto; segni diversi sono stati pensati per rappresentare ciò che li colpisce, le relazioni e dipendenze. In geometria le rappresentazioni sono più naturali, in algebra più arbitrarie.*³⁶ ([32], p. 2)

A fronte di questa maggior arbitrarietà che può rendere il linguaggio algebrico meno evidente di quello geometrico, corrisponde però una maggiore applicabilità:

Dunque, l'evidenza è più semplice ed ovvia in geometria; l'uso dell'algebra è però più esteso e spesso più pratico: specialmente da quando le scienze matematiche hanno acquisito una tale estensione e sono state applicate a così tante ricerche.³⁷ ([32], p.2)
Dopo aver spiegato che

³⁶In Geometry, lines are represented by a Line, Triangles by a triangle, and other Figures by a Figure of the same kind; but, in Algebra, quantities are represented by the same letters of the alphabet; and various signs have been imagined for representing their affections, relations and dependencies. In geometry the representations are more natural, in algebra more arbitrary.

³⁷Thus, the evidence of Geometry is sometimes more simple and obvious; but the use of Algebra more extensive, and often more ready: especially since the mathematical sciences have acquired so vast an extent, and have been applied to so many enquires.

È una quantità ciò che consta di parti o che è capace di essere maggiore o minore.³⁸ ([32], p. 3)

MacLaurin passa ad introdurre le operazioni, dicendo che una quantità è aumentata dall'addizione, diminuita dalla sottrazione che sono dunque le due operazioni primarie che collegano delle quantità. Si ha così la possibilità di supporre che una quantità entri nei calcoli algebrici in due modi diversi che hanno effetti contrari, o come incremento o come decremento. (...) Il segno + (più) è il segno di addizione, ed il segno - (meno) quello di sottrazione.³⁹ ([32], pp. 3-4)

A questo livello, appare che una quantità a numerica si possa presentare in due *modalità* differenti, come incremento o decremento, e quindi che vi sia un primato dell'operazione che determina come considerare una quantità. Procedendo, troviamo ancora che

Quando a è maggiore di b , allora $a - b$ è esso stesso un incremento; quando $a = b$, allora $a - b = 0$; quando a è minore di b , allora $a - b$ è esso stesso un decremento.⁴⁰ ([32], p. 4)

Ed ora MacLaurin (Fig. 2.7) può distinguere tra l'intensità (*magnitude*) di una grandezza ed il tipo (*kind*):

Come addizione e sottrazione si oppongono o un incremento è opposto ad un decremento, esiste una analoga opposizione tra le affezioni delle quantità che si considerano nelle scienze matematiche. Come tra eccesso e difetto; tra il valore di un bene o del denaro dovuti ad una persona ed il denaro che quella persona deve; tra una linea tracciata verso destra e una linea tracciata verso sinistra; (...). Quando due quantità, uguali quanto a grandezza ma di tipo opposto sono unite tra loro e le si pensa avvenire a riguardo dello stesso soggetto, esse distruggono l'una gli effetti dell'altra ed il loro risultato è *nulla* (...). E quando una quantità più grande è tolta da una minore dello stesso tipo, ciò che resta diviene di tipo opposto. Se sommiamo i segmenti AB e BD , la loro somma è AD ; se però dobbiamo sottrarre BD da AB , allora occorre prendere $BC = BD$ dalla parte opposta verso A e ciò che resta è AC il quale, quando BD o BC supera AB , diventa un segmento dall'altra parte di A .⁴¹ ([32], p. 5)

³⁸Quantity is what is made up of parts, or is capable of being greater or less.

³⁹is increased by Addition, and diminished by Subtraction, which are therefore the two primary operations that relate to quantity. Hence it is, that any quantity may be supposed to enter into algebraic computations two different ways which have contrary effects; either as an Increment or as a Decrement. (...) The sign + (plus) is the Mark of Addition, and the sign - (minus) of Subtraction.

⁴⁰When a is greater than b , then $a - b$ is itself an Increment; when $a = b$, then $a - b = 0$; when a is less than b , then $a - b$ is itself a decrement.

⁴¹As Addition and Subtraction are opposite, or an Increment is opposite to a Decrement, there is an analogous Opposition between the Affections of Quantities that are considered in the mathematical Sciences. As between Excess and Defect; between the Value of Effects or Money due To a Man and Money due By him; a Line drawn towards the Right and a Line drawn to the Left; (...). When two Quantities equal in respect to Magnitude, but of those opposite Kinds, are joined together, and conceived to take place in the same Subject, they destroy each others Effect, and their amount is *Nothing* (...) And when a greater Quantity is taken from a lesser of the same kind, the Remainder becomes of the opposite kind. Thus if we add the Lines AB and BD together, their sum is AD ; but if we are to subtract BD from

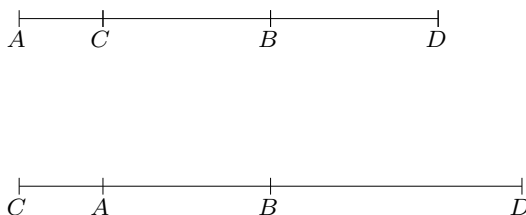


Figura 2.7: Significato delle quantità negative in MacLaurin.

Debiti e crediti, moti su una retta che avvengono in versi opposti: sono modelli per giustificare la natura *reale* e non fittizia o convenzionale delle quantità da sottrarre. Notiamo però che adesso si è dato senso ad una sottrazione in cui il sottraendo abbia grandezza superiore al minuendo ma quest'ultimo è inteso come quantità positiva:

Una quantità da aggiungere è similmente detta quantità positiva ed una da sottrarre è detta negativa: esse sono ugualmente reali ma l'una opposta all'altra, in modo da togliere una l'effetto dell'altra in ogni operazione, quando sono uguali come quantità. Così $3 - 3 = 0$, ed $a - a = 0$. Benché però $+a$ e $-a$ siano uguali in quantità, in algebra non supponiamo che $+a = -a$ siano uguali; per dedurre l'uguaglianza in questa scienza non è sufficiente l'uguaglianza come quantità ma che esse siano della stessa qualità. Un decremento può essere uguale ad un incremento ma in tutte le operazioni ha un effetto contrario; (...) è sulla base di tale opposizione che una quantità negativa è detta essere minore di nulla, perché è opposta a quella positiva e la riduce quando vi è unita, mentre l'aggiunta di 0 non ha effetto. Una quantità negativa deve essere considerata non meno reale di una positiva⁴² ([32], pp. 6-7).

Negli esempi addotti da MacLaurin, ci sono *somme* tra quantità di segni opposti e così pure sottrazioni tra quantità di segno opposto, indice a mio parere di una certa consapevolezza della distinzione tra quantità negative e operazione di sottrazione. D'altronde, nel giustificare la regola in base alla quale sottrarre una quantità negativa è la stessa cosa che aggiungere il suo opposto, MacLaurin si esprime in questo modo:

Sottrarre una quantità qualsiasi, positiva o negativa, è lo stesso che sommarne una di tipo opposto. (...) È evidente che sottrarre o portar via un decremento è lo stesso che

AB, then $BC = BD$ is to be taken the contrary Way towards *A*, and the Remainder is *AC*; which, when BD , or BC exceeds AB , becomes a Line on the other side of *A*.

⁴²A Quantity that is to be added is likewise called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative: They are equally real, but opposite to each other, so as to take away each other's Effect, in any Operation, when they are equal as to Quantity. Thus $3 - 3 = 0$, and $a - a = 0$. But tho' $+a$ and $-a$ are equal as to Quantity, we do not suppose in Algebra that $+a = -a$ are equal; because to infer Equality in this Science, they must not only be equal as to Quantity, but of the same Quality. A Decrement may be equal to an Increment, but it has in all Operations a contrary Effect; (...) it is on account of this Contrariety that a Negative Quantity is said to be less than Nothing, because it is opposite to the Positive, and diminishes it when joined to it, whereas Addition of 0 has no Effect. But a Negative is to be considered no less as a Real Quantity than the Positive.

aggiungere un uguale incremento. Se noi portiamo via $-b$ da $a - b$, rimane a ; e se aggiungiamo $+b$ ad $a - b$, la somma è pure a .⁴³ ([32], p. 11)

Il punto saliente, a mio parere, è che MacLaurin distingue l'azione di sottrarre *subtract or take away* dalla quantità $-b$ che viene sottratta, nella quale il segno negativo fa parte integrante della quantità. Poco dopo, Mc Laurin è pronto per enunciare la regola dei segni che viene illustrata separatamente nei quattro casi che si possono presentare:

Caso I. Quando una quantità positiva, $+a$, è moltiplicata per un numero positivo $+n$, ciò significa che $+a$ va preso tante volte quante sono le unità in n ; ed il prodotto è evidentemente na .⁴⁴ ([32], p. 12) Qui non vi sono problemi particolari: il prodotto di numeri positivi viene introdotto con l'addizione ripetuta dove n è limitato ad essere intero.

Caso II. Quando $-a$ viene moltiplicato per n , allora $-a$ deve esser preso tante volte quante sono le unità in n ed il prodotto deve essere $-na$.⁴⁵ ([32], p. 12)

Caso III. La moltiplicazione per un numero positivo comporta un'addizione ripetuta ma la moltiplicazione per un numero negativo comporta una sottrazione ripetuta. E quando $+a$ deve essere moltiplicato per $-n$, il significato è che $+a$ deve essere sottratto tante volte quante sono le unità in n : quindi il prodotto è negativo e vale $-na$.⁴⁶

MacLaurin non si riferisce come altri, implicitamente, alla proprietà commutativa del prodotto ma interpreta la moltiplicazione per $-n$ come *sottrazione* ripetuta, anziché come addizione ripetuta. Infine, il caso IV, il più spinoso:

Caso IV. Quando $-a$ deve essere moltiplicato per $-n$, allora occorre sottrarre $-a$ tante volte quante sono le unità in n ; ma (§10) sottrarre $-a$ equivale ad aggiungere $+a$ per cui il prodotto è $+na$.⁴⁷ ([32], p. 13)

Al termine dell'elenco dei quattro casi possibili, MacLaurin sente la necessità di *illustrare* (*illustrate*) il Caso II.

Dalle definizioni, $+a - a = 0$; quindi, se moltiplichiamo $+a - a$ per n , il prodotto deve annullarsi od essere 0, perché il fattore $a - a$ è 0. Il primo termine del prodotto è $+na$ (per il Caso I.) Quindi il secondo termine del prodotto deve essere $-na$ che distrugge

⁴³To subtract any Quantity, either Positive or Negative, is the same as to add the opposite Kind. (...) It is evident that to subtract or take away a Decrement is the same as adding an equal Increment. If we take away $-b$ from $a - b$, there remains a ; and if we add $+b$ to $a - b$, the Sum is likewise a .

⁴⁴Case I. When any positive Quantity, $+a$, is multiplied by any positive Number, $+n$, the Meaning is, That $+a$ is to be taken as many times as there are Units in n ; and the Product is evidently na .

⁴⁵Case II. When $-a$ is multiplied by n , then $-a$ is to be taken as often as there are Units in n , and the Product must be $-na$.

⁴⁶Case III. Multiplication by a positive Number implies a repeated Addition: But Multiplication by a Negative implies a repeated Subtraction. And when $+a$ is to be multiplied by $-n$, the Meaning is that $+a$ is to be subtracted as often as there are Units in n : Therefore the Product is negative, being $-na$.

⁴⁷Case IV. When $-a$ is to be multiplied by $-n$, then $-a$ is to be subtracted as often as there are Units in n ; but (by §10) to subtract $-a$ is equivalent to adding $+a$, consequently the Product is $+na$.

$+na$; in questo modo l'intero prodotto sarà $+na - na = 0$. Quindi, $-a$ moltiplicato per $+n$ dà $-na$.⁴⁸ ([32], p. 13)

MacLaurin dà per scontata la proprietà distributiva e pone in evidenza il ruolo privilegiato dello 0 rispetto all'addizione. L'illustrazione del Caso IV è simile

Se moltiplichiamo $+a - a$ per $-n$, il primo termine del prodotto essendo $-na$, l'ultimo termine deve essere $+na$, perché i due insieme debbono distruggere l'un l'altro, ovvero il loro totale essere 0, dal momento che uno dei fattori ($a - a$) è 0. Dunque $-a$ moltiplicato per $-n$ deve dare $+na$.⁴⁹ ([32], p. 13).

Il ruolo dello privilegiato dello 0 emerge in altri due approcci: quello contenuto nelle *Institutiones Analyticae* di Vincenzo Riccati (1707-1775) e Gerolamo Saladini (1731-1816) [44], pubblicato nel 1765 e quello presente nei *The elements of Algebra in Ten Books* di Nicholas Saunderson (1682-1739), pubblicato nel 1790.

Vincenzo Riccati e l'allievo Gerolamo Saladini, dopo aver utilizzato l'analogia cinematica del verso di percorrenza per distinguere tra quantità positive e negative, illustrano la regola dei segni in questi termini:

Siccome il moltiplicatore altro non mostra che il numero di volte in cui bisogna prendere la quantità da moltiplicare, se entrambi sono positivi, lo sarà evidentemente anche il prodotto e lo sarà tanto di più quanto più grande è il moltiplicatore, e tanto meno quanto minore è il moltiplicatore; pertanto, se il moltiplicatore è zero, lo sarà anche il prodotto. Quindi se il moltiplicatore decresce di più, al punto da diventare negativo, cioè minore di zero, occorre che anche il prodotto decresca di più e diventi dunque minore di zero, cioè negativo. Ecco dunque in che modo è evidente che il prodotto di una quantità positiva per una negativa sia negativo. Supponiamo ora che occorra moltiplicare una quantità negativa per una positiva. Da quanto dimostrato, il prodotto sarà negativo e lo sarà tanto di meno in quest'ordine, cioè tanto più minore di 0 quanto più cresce il moltiplicatore, o diventa maggiore, e quanto più piccolo sarà il moltiplicatore, tanto più il prodotto sarà minore nell'ordine delle quantità negative, cioè più vicino allo zero; cosicché il prodotto cresce sempre se il moltiplicatore decresce: pertanto, quando quest'ultimo è zero, il prodotto sarà zero: pertanto se il moltiplicatore diminuisce ancora, cioè se diventa negativo, il prodotto crescerà di più e quindi diverrà maggiore di zero, e di conseguenza positivo; pertanto una quantità negativa, moltiplicata per una quantità negativa darà un prodotto positivo. ([44], p. 3)

L'argomento è piuttosto persuasivo ma in sé non può considerarsi risolutivo perché offre il fianco a critiche come quella di Lazare Carnot (1753-1823) il quale, pur non occupandosi direttamente dell'argomento di Riccati e Saladini,

⁴⁸By the definitions, $+a - a = 0$; therefore, if we multiply $+a - a$ by n , the Product must vanish or be 0, because the Factor $a - a$ is 0. The first term of the Product is $+na$ (by Case I.) Therefore the second Term of the Product must be $-na$ which destroys $+na$; so that the whole Product must be $+na - na = 0$. Therefore, $-a$ multiplied by $+n$ gives $-na$.

⁴⁹If we multiply $+a - a$ by $-n$, the first Term of the Product being $-na$, the latter Term of the product must be $+na$, because the two together must destroy each other, or their Amount be 0, since one of the factors (viz. $a - a$) is 0. Therefore $-a$ multiplied by $-n$ must give $+na$.

considera una situazione simile, allo scopo di mostrare come le quantità negative non possono essere concepite in termini assoluti, come quantità minori di 0:

Sia, si dice A una quantità; sottraiamo da essa una quantità minore a : la differenza $A - a$ sarà minore di A . Se supponiamo ora che a aumenti, $A - a$ diminuirà sempre più, diverrà 0 quando a diventa uguale ad A ; poi, aggiungono, se a continua a crescere, $A - a$ diverrà minore di 0.

Per dimostrare che questo ragionamento è vizioso, basta far vedere che lo si potrebbe applicare allo stesso modo ad $\sqrt{A - a}$. In effetti, assegnato A , $\sqrt{A - a}$ diminuisce gradualmente al crescere di a ; dunque dovrebbe diventare minore di 0, cioè a dire, semplicemente negativo e non immaginario, allorché a diventi maggiore di A . Ciò che è falso. ([12], pp. xi-xii)

Il ragionamento di Carnot mette in luce come un argomento quale quello addotto da Riccati e Saladini non sia *evidente* come sembra a prima vista.

Passando a Saunderson, egli rende plausibile il fatto che le quantità negative siano minori di nulla seguendo un modello continuo di passaggio dal positivo allo zero per giungere alle quantità negative. Dopo aver distinto tra quantità positive e negative avanza una possibile spiegazione per le difficoltà che rendono le quantità negative difficili da assimilare:

Gli ingegni più deboli sono perplessi di fronte a questo modo di pensare perché, nella vita ordinaria, la maggior parte delle quantità perde il proprio significato quando queste cessano di essere affermative e ne acquisiscono un altro non appena cominciano ad essere negative: così chiamiamo beni negativi, debiti; un guadagno negativo, una perdita; un caldo negativo, freddo; una discesa negativa, salita, &c. (...) Le difficoltà che sorgono dall'imporre nomi scarsi e limitati a quantità di per sé illimitate, andrebbero imputate a questi nomi, non alle cose stesse. (...) quantità affermative e negative si distinguono unicamente dal segno, come notato prima, non per il loro nome; la stessa lettera le rappresenta entrambe: questi segni dunque comportano la stessa distinzione operata talora da particelle ed aggettivi nel linguaggio ordinario, come nelle parole conveniente e sconveniente, felice ed infelice, in buona salute e in cattiva salute, &c.⁵⁰ ([47], pp. 50-51)

La dimostrazione della regola dei segni data da Saunderson fa ricorso alle progressioni aritmetiche. Egli richiama il fatto che una progressione aritmetica è *completamente* individuata noti due suoi termini *consecutivi* e, in secondo luogo, che moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per una stessa

⁵⁰That what most perplexes narrow minds in this way of thinking, is, that in common life, most quantities lose their names when they cease to be affirmative, and acquire new ones so soon as they begin to be negative: thus we call negative goods, debts; negative gain, loss; negative heat, cold; negative descent, ascent, &c. (...) Difficulties that arise from the imposition of scanty and limited names, upon quantities which in themselves are actually unlimited, ought to be charged upon those names, and not upon the things themselves. (...) affirmative and negative quantities are only distinguished by their signs, as was observed before, and not by their names; the same letter representing both: these signs therefore in Algebra carry the same distinction along with them as do particles and adjectives sometimes in common language, as in the words convenient and inconvenient, happy and unhappy, good health and bad health, &c.

quantità si ottiene un'altra progressione aritmetica. Ammessi questi due principî—che Saunderson ritiene auto-evidenti—egli illustra i quattro casi. Saunderson *non* usa le progressioni per dimostrare il caso $+\times+=+$ ma fa appello al significato di moltiplicazione come addizione ripetuta. Nel caso $-\times+=-$ Saunderson considera un caso numerico specifico, quello di -4×3 ed afferma:

Se moltiplichiamo i termini della progressione aritmetica 4, 0, -4 per $+3$, i prodotti saranno in progressione aritmetica; i primi due prodotti sono 12 e 0; dunque il terzo sarà -12 ; pertanto -4 moltiplicato per $+3$ dà -12 .⁵¹ ([47], p. 57)

Osserviamo in dettaglio la costruzione: la regola autoevidente (almeno per Saunderson) che, moltiplicando i termini di una progressione aritmetica per un numero si ottiene un'altra progressione aritmetica è accettabile se i termini della progressione ed il fattore comune sono tutti positivi o, al più, se un termine è nullo, altrimenti si cadrebbe in una *petitio principii*. Per il caso $-\times+=-$, egli si ferma quando raggiunge lo 0 e poi genera la parte negativa della progressione così ottenuta dalla conoscenza dei termini $+12$ e 0. Quando identifica -12 con -4×3 egli in qualche modo *estende* il principio da cui è partito al caso di progressioni con termini negativi, senza dichiararlo.

Nel caso $+\times=-$, Saunderson considera l'esempio $+4\times -3$ partendo dalla progressione 3, 0, -3 : i primi due termini, moltiplicati per 4 danno la progressione 12, 0, che ha come termine successivo -12 , *identificabile* con -3×4 . Infine, utilizzando i risultati appena dimostrati, Saunderson moltiplica 3, 0 per -4 , ottenendo la progressione -12 , 0, il cui termine successivo è $+12$, identificabile con -3×-4 . A conclusione del capitolo Saunderson offre un'altra spiegazione:

Questi 4 casi si dimostrano più brevemente così: $+4$ moltiplicato per $+3$ dà $+12$; quindi -4 per -3 deve produrre qualcosa contrario a $+12$, cioè -12 ; se però -4 per 3 dà -12 , allora -4 moltiplicato per -3 deve produrre qualcosa di contrario a -12 , cioè $+12$; in questo modo l'ultimo caso, quanto mai difficile per i giovani principianti, appare in fin dei conti come nulla più di un principio della grammatica, cioè, che due negazioni sono un'affermazione; ciò è indubbiamente vero in grammatica, benché non sempre osservato nelle lingue.⁵² ([47], p. 58)

Una simile suggestione linguistica era già stata menzionata, oltre che da Leibniz, anche dall'olandese Wilhelm 's Gravesande ([49], pp. 12-13) e lo stesso farà, tra gli altri, Paolo Ruffini nel *Corso di Matematiche*: [46], pp. 24-26.

2.5 Una proporzione “terribile”

Le proporzioni cui siamo avvezzi coinvolgono sempre grandezze rappresentati da numeri positivi ma per la nostra storia occorre soffermarsi alquanto su proporzioni che coinvolgono anche grandezze negative. Il motivo di questo interesse risiede nel fatto

⁵¹multiply the terms of this arithmetical progression 4, 0, -4 into $+3$, and the products will be in arithmetical progression; but the two first products are 12 e 0; therefore the third will be -12 ; therefore -4 multiplied into $+3$, produces -12

⁵²These 4 cases may also be more briefly demonstrated thus: $+4$ multiplied into $+3$, produces $+12$; therefore -4 into $+3$, or 4 into -3 ought to produce something contrary to $+12$, that is, -12 : but if -4 into $+3$ produces -12 , then -4 multiplied into -3 ought to produce something contrary to -12 , that is, $+12$; so that this last case, so very formidable to young beginners, appears at last to amount to no more than a common principle in Grammar, to wit, that two negatives make an affirmative; which is undoubtedly true in Grammar, though perhaps it may not always be observed in languages.

che, con la *Géométrie* di Descartes, la moltiplicazione viene *definita* per il tramite delle proporzioni. Precisamente, il prodotto di a e b è il quarto proporzionale x della proporzione

$$1 : a = b : x \quad (2.8)$$

Questa definizione permette anche una interpretazione geometrica del prodotto grazie al teorema di Talete ([15], p. 4).

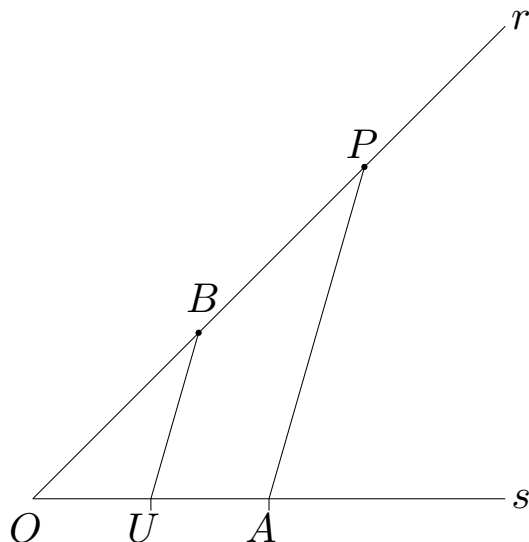


Figura 2.8: Argomento geometrico, basato sul teorema di Talete ed introdotto da Cartesio, per definire il prodotto di due numeri positivi a e b . Il segmento OU ha lunghezza unitaria, $OA = a$, $OB = b$. Congiungendo U con B e tracciando la parallela ad UB passante per A si ottiene sulla retta r un segmento OP di lunghezza ab , in virtù del teorema di Talete $OU : OB = OA : OP$.

Essa si incontra nella *Geometria Speciosa* di Pietro Mengoli, pubblicata nel 1659 [33], precisamente nella definizione 28 che dell'*Elementum Quintum*, dedicato alla teoria dei logaritmi:

Se quattro grandezze sono proporzionali e l'unità è la prima: la quarta si dirà prodotto tra la seconda e la terza.⁵³, ([33], p. 207)

Si trova poi nella seconda edizione (1683) dei *Nouveaux Éléments de géométrie* pubblicati da Antoine Arnauld (1612-1694) per la prima volta nel 1667.

Il punto critico è quando si cerca di applicare questa proporzione al caso in cui una delle due quantità a o b sia espressa da un numero negativo. Qui Arnauld confessa di avere avuto dei problemi a ritenere valida la regola dei segni, soprattutto nel caso $- \times - = +$:

Non sono riuscito ad adattare a questo tipo di moltiplicazione la nozione di moltiplicazione in generale, quella più naturale secondo cui l'unità (o determinata come tra i

⁵³Si quatuor proportionalium, rationalis fuerit prima: quarta, dicetur, productus secundae et tertiae

numeri o arbitraria nell'estensione) debba stare al moltiplicatore come il moltiplicando sta al prodotto, in quanto ciò è visibilmente falso per la moltiplicazione tra due numeri.⁵⁴ ([4], p. 19)

La riluttanza di Arnauld deriva dal fatto che, applicando la proporzione al caso -5×-3 si otterrebbe che l'unità sta ad un numero minore come -3 sta ad un numero maggiore, se il prodotto deve essere $+15$. Per uscire dallo stallo, Arnauld ritiene che la via giusta sia quella di distinguere tra moltiplicazioni operate *par voie d'addition* o *par voie de soustraction*: il primo caso è adatto alle situazioni in cui il moltiplicatore è positivo ed il risultato si ottiene addizionando il moltiplicando (*multiplié*) tante volte quanto indicato dal moltiplicatore (*multipliant*), il secondo è indicato quando il moltiplicatore è negativo e consiste nel sottrarre il moltiplicando tante volte quanto indicato dal moltiplicatore: poiché sottrarre un numero negativo equivale a considerare il numero come positivo, ecco che agli occhi di Arnauld anche il caso problematico $- \times - = +$ risulta giustificato. Va osservato che, dopo aver reso conto faticosamente della regola dei segni, Arnauld se ne serva per giustificare, a guisa di corollario, una regola di calcolo rapido da applicarsi quando i fattori sono compresi tra 5 e 10. Se chiamiamo m ed n tali fattori, allora Arnauld li riscrive come $10 - m'$ e $10 - n'$ e svolge i prodotti parziali appellandosi alla regola dei segni: anche se in un caso particolare, Arnauld utilizza il classico esempio del prodotto $(a - b)(c - d)$ non per dimostrare la regola dei segni ma come una sua conseguenza.

Oltre al libro di Arnauld, un altro testo molto influente furono i *Nouveaux Éléments de mathématique* [38] del prete oratoriano Jean Prestet (1648-1691), allievo di Malebranche che finì per contrapporsi proprio ad Arnauld. Nella premessa alla seconda edizione degli *Éléments*, Prestet dichiara di volere cercare il giusto bilanciamento tra la concisione e la chiarezza, evitando gli estremi di un'eccessiva stringatezza, che seleziona a priori l'uditorio ad una ristretta cerchia di addetti ai lavori, ed un'inutile verbosità che stanca il lettore. Tra gli argomenti che intende trattare vi sono alcuni ritenuti elementari ma che al contrario non lo sono affatto e renderne ragione può essere problematico

Nulla dovrebbe essere più chiaro di questa proposizione: 2 per 4 è lo stesso che 4 per 2. Ma ci potrebbe essere dell'imbarazzo nel momento in cui si voglia spiegarne la ragione autentica.⁵⁵ ([38], Preface)

Prestet dichiara l'algebra superiore alla geometria, non solo perché ha una maggiore estensione ma anche perché la geometria, ad esempio, abbisogna del concetto di numero per trarre profitto dalla teoria delle proporzioni che ha un ruolo centrale in quanto tratta dei rapporti e per Prestet una scienza può dirsi esatta quando sa assegnare valori precisi ai rapporti tra grandezze. Comunque sia, la matematica è

la scienza esatta delle grandezze. E si dirà grandezza in generale tutto ciò che è passibile di più e di meno, ovvero che può essere aumentato o diminuito.⁵⁶ ([38], Preface)

⁵⁴C'est que je ne pouvois ajuster à cette sorte de multiplication, la notion la plus naturelle de la multiplication en general; qui est que l'unité (où déterminée dans les nombres, ou arbitraire comme dans l'étendue) doit être au multipliant, comme le multiplié est au produit. Car cela est visiblement faux dans la multiplication de moins en moins.

⁵⁵On jugera d'abord qu'il n'y a rien de plus clair que cette proportion : 2 fois 4 est la même chose que 4 fois 2. Mais on feroit peut-être assez embarrassé, si l'on en vouloit apporter la véritable raison.

⁵⁶la science exacte des grandeurs. Et on dira que la grandeur en général est tout ce qui est Capable du plus & du moins, ou ce qui peut recevoir quelque augmentation ou diminution.

Si tratta di grandezze percepite non in modo assoluto ma una relativamente ad un'altra ed il modo per confrontarle è cercandone la differenza oppure il rapporto. L'accettazione di proporzioni fornate con termini di segni opposti non fu universale. Dubbi sulla loro validità incondizionata furono avanzati da Pierre de Varignon, altro esponente, come Prestet del circolo sorto attorno alla figura di Malebranche. Secondo la testimonianza di Charles Reyneau (1656-1728) ([50], pp. 80-81) Varignon distingueva in una proporzione il concetto quantitativo di rapporto e quello qualitativo di direzione, che non doveva entrare in contatto con il primo. Nella proporzione

$$2 : -4 :: -4 : 8$$

i rapporti che sono eguali sono quello di 2 a 4 = $|-4|$ e di $|-4| = 4 : 8$, entrambi pari ad $\frac{1}{2}$. In questo modo si evitano gli assurdi legati alla pretesa di applicare le regole delle proporzioni ordinarie, tra quantità positive.

Nel XVIII secolo si ritrova la definizione cartesiana di prodotto in diversi testi. Ad esempio, Reyneau stesso la propose nella *Science du Calcul de grandeurs* [43], sottolineandone la generalità, tanto da premettere queste parole al §72

Definizione generale della moltiplicazione relativa ad ogni tipo di grandezza. Occorre rendersela assai familiare⁵⁷ ([43], p. 51)

Osserviamo che, dalla possibilità di permutare i medi senza alterare una proporzione, Reyneau deduce la proprietà commutativa del prodotto:

il prodotto di b per a è la stessa grandezza del prodotto di a per b ; infatti, nel primo caso vale la proporzione $1 : a = b : c$ e nel secondo caso si ha la sua alternata $1 : b = a : c$; ed essendo nell'uno e nell'altro caso determinati i primi tre termini, il quarto è sempre la stessa grandezza. Dunque $a \times b = b \times a$. ([43], p. 51)

Reyneau, fornì due dimostrazioni della regola, a seconda che i termini del prodotto fossero interi o frazionari. È possibile che questo testo di Reyneau abbia influenzato Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) che nel 1748 pubblicò le *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* dove, nel capitolo iniziale, introduce le quantità negative e discute la regola dei segni ancora a partire da (11.15):

La moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, di cui il primo termine sia l'unità; il secondo, e il terzo termine le due quantità, che devonsi moltiplicare; ed il quarto il prodotto. ([1], p. 6)

Che Maria Gaetana Agnesi potesse aver presente il testo di Reyneau non mi sembra improbabile visto che aveva studiato sulla sua *Analyse démontrée* sotto la guida del monaco olivetano Ramiro Rampinelli. La spiegazione della regola dei segni data dalla Agnesi è la seguente:

poiché il quarto [termine], per la natura della proporzione geometrica, deve essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo; se il secondo, e terzo termine sono positivi, cioè se, per esempio, è $1, a :: b$, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia $1, -a :: b$, al quarto; dovendo il quarto essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo, ed essendo negativo il secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia $1, a :: -b$, al quarto; dovendo il quarto essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo, ed

⁵⁷Définition générale de la Multiplication par raport à toutes sortes de grandeurs. Il faut se la rendre très familière.

essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia $1, -a :: -b$, al quarto; essendo il secondo multiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia multiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, e dunque dovrà il quarto essere positivo. ([1], pp. 6-7).

Il tentativo di dimostrazione della Agnesi, per quanto originale, lascia un po' a desiderare dal punto di vista logico in quanto dire che, poichè a è multiplo positivo dell'unità, allora il prodotto di $a \times -b$, essendo $-b$ negativo, dovrà esso pure risultare negativo, sembra presupporre ciò che si vuole dimostrare. Osserviamo come sarebbe più convincente un argomento geometrico basato sul teorema di Talete che estenda la definizione di prodotto data da Cartesio ed illustrata nella Figura 2.8. Se orientiamo r ed s in modo da riportare segmenti come OA di lunghezza a ed accettiamo che rappresenti il numero $-a$ e prendendo $OB = b$ ma nel verso negativo. in modo da rappresentare $-b$, il punto P giacerà dalla parte opposta rispetto a B o meno, fornendo un ausilio intuitivo alla validità della regola dei segni.

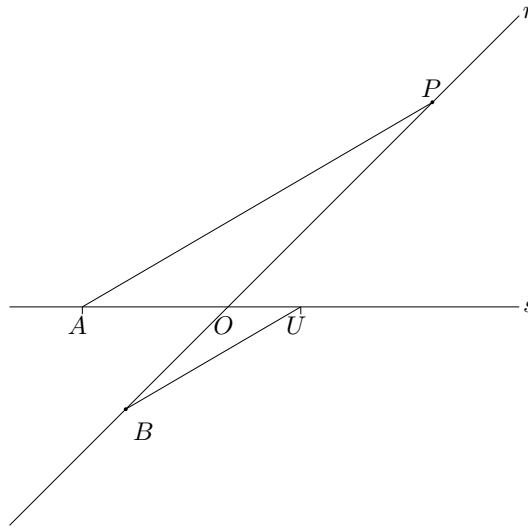


Figura 2.9: Argomento geometrico, basato sul teorema di Talete, per “giustificare” la regola dei segni. Il segmento OU ha lunghezza unitaria, $OA = a$, $OB = b$. Siccome sia A che B giacciono dalla parte negativa delle rette r ed s , congiungendo U con B e tracciando la parallela ad UB passante per A si ottiene sulla retta r un segmento OP di lunghezza ab che, trovandosi dalla parte positiva di r , giustifica la regola dei segni.

La proporzione, introdotta da Arnould,

$$1 : -1 :: -1 : 1 \quad (2.9)$$

fu utilizzata da Jean Le Ronde D'Alembert per *negare* che i numeri negativi fossero minori di 0. Commentando la controversia tra Gottfried Wilhelm Leibniz e Johann Bernoulli I sui logaritmi dei numeri negativi, d'Alembert ad un certo punto scrive

Mi sia dunque permesso di sottolineare come sia falsa l'idea che talvolta viene presentata a proposito delle quantità negative, dicendo che esse sono sotto lo 0. Prescindendo dall'oscurità di questa idea intesa metafisicamente, coloro i quali la vorranno refutare grazie al calcolo, potranno accontentarsi di questa proporzione $1 : -1 :: -1 : 1$; proporzione reale perché il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi e che dunque $\frac{1}{-1} = -1$ e $\frac{-1}{1} = -1$. Tuttavia se si pensasse alle quantità negative come al di sotto dello zero, 1 sarebbe > -1 , & $-1 < 1$; così non potrebbe sussistere la proporzione. ([17], p. 201)

2.6 Il carattere convenzionale della regola

La matematica non è un'opinione ma si appoggia a delle convenzioni e ciò si evidenzia quando occorre operare una estensione di un campo della matematica, come succede nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. Abbiamo sinora visto come molti matematici si siano sforzati di dimostrare la regola dei segni come conseguenza *necessaria* di ovvie proprietà geometriche o di evidenti regole commerciali ma vi è stata accanto a questa tendenza anche un atteggiamento diametralmente opposto, quello di fornire la regola dei segni senza la ricerca di una sua deduzione. Questo silenzio può essere visto come il primo passo verso quella che sarà la linea vincente: la regola dei segni va accettata come una convenzione, una regola del gioco da accettare all'inizio, motivandone la scelta.

Il primo esponente di spicco di questa *corrente del silenzio* fu Isaac Newton che, come come già avevano fatto i matematici indiani, non giustificò affatto la regola dei segni. Egli nella *Arithmetica Universalis* pubblicata, a sua insaputa, nel 1707, scrisse⁵⁸:

*I termini semplici algebrici⁵⁹ si moltiplicano facendo il prodotto tra i coefficienti numerici e fra le parti letterali e stabilendo che il prodotto sia positivo se entrambi i fattori sono positivi o entrambi negativi, e negativo in caso opposto.*⁶⁰ ([36], p. 18)

Osserviamo come Newton separi i tre tempi nella moltiplicazione di due monomi: dapprima il prodotto dei coefficienti numerici, quindi quello delle parti letterali e, infine, la combinazione dei segni introdotta con un secco *stabilendo* (*statuendo*).

Colin Mac Laurin, che si sforzò di chiarire i principi del calcolo infinitesimale newtoniano, volle anche chiarire la regola dei segni, ricollocandosi sulla scia di altri matematici per i quali una qualche forma di giustificazione era necessaria.

Non credo di forzare troppo il testo di Newton dicendo che, dato il suo tenore normativo, Newton possa aver intravisto il fatto che la regola dei segni andasse stabilita in base ad una convenzione il cui valore emerge dai risultati ottenuti. Nella spiegazione della regola, all'inizio del XIX secolo, Robert Woodhouse opera una distinzione importante

Poiché questa regola per il prodotto crea problemi ai principianti ed è spesso stata oggetto di discussione, ho indagato a lungo su di essa, desideroso di distinguere nella regola ciò che si può dire essere dimostrato da principi evidenti e ragionamenti

⁵⁸Seguo qui il testo latino dell'edizione del 1732.

⁵⁹cioè i monomi

⁶⁰*Simplices temini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & species in species ac statuendo factum Affirmativum si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, & Negativum si secus.*

stringenti, da quanto è arbitrario o frutto di convenzione, e di dimostrare perché sia desiderabile rendere generale tale regola generale per nostro agio.⁶¹ ([55], pp. 5-6)

Il ruolo delle convenzioni nell'introduzione delle quantità negative è importante nell'impostazione di Woodhouse. Egli, introdotto il principio di trasposizione, grazie al quale da $a - b = c$ si passa a $a = b + c$, aggiungendo la stessa quantità b ad ambo i membri, osserva

Se su queste due operazioni si dovesse stabilire una regola per trasportare quantità algebriche, essa non dovrebbe, in senso strettamente logico, annunciare più di quanto sia stato dimostrato: ma annuncerebbe di più, se stabilisse il cambio dei segni $+-$ alle quantità da trasferirsi da un membro dell'equazione all'altro, perché in questo modo si dedurrebbe per il suo tramite che $-c - b = -a$, proposizione incomprensibile e che non si sarebbe potuto ottenere da principi evidenti e stretta inferenza: se allora, per agio dei calcoli, si scrive questa regola, ciò è arbitrario in parte e presuppone delle convenzioni prestabilite.⁶² ([55], pp. 1-2)

Woodhouse è piuttosto severo con le tradizionali dimostrazioni delle proprietà delle operazioni condotte su quantità negative, come $a - (-b) = a + b$:

Si richiede di sottrarre $-b$ da a ; $a = a + b - b$, si sottrae $-b$ e resta $a + b$; questa sottrazione però è di fatto una cancellazione, una soppressione e non un'operazione che segua necessariamente dal significato della parola sottrazione e dalla nostra nozione di $-b$; cancellare una quantità negativa può essere usato come locuzione che indichi l'addizione di una quantità positiva, ma non ha necessariamente questo significato: in altre parole, questa equivalenza tra le due espressioni non è una conseguenza necessaria e sicura a partire dalle nostre nozioni di quantità negativa.⁶³ ([55], p. 2)

Come dimostrare allora la proprietà cercata? Woodhouse fa leva sul principio di trasposizione applicato all'equazione $y = b + d$ per ottenere $-y = -b - d$ che viene poi sottratto dall'equazione $x = a$ giungendo così a $x - (-y) = a - (-b) - (-d)$. Se, al posto di $--$ sostituiamo $+$, ricaviamo $x + y = a + b + d$

che è vera, come si vede sommando le due equazioni originali: dunque, in tutti i casi $x - (-a)$ è espresso appropriatamente da $x + a$.⁶⁴ ([55], p. 3)

⁶¹As this rule for multiplication of signs embarrasses beginners, and has been frequently made the subject of discussion, I have dwelt rather long upon it, desirous to distinguish in the rule, what may be said to be proved from evident principles and strict reasoning, from what is arbitrary or results from convention, and to shew why it is desirable on the grounds of commodiousness to make such a rule general.

⁶²If on these two operations, a rule be founded for the transposition of Algebraical quantities, it ought not in logical strictness, to announce more than has been proved: but it would announce more, if it ordered quantities to be transferred, from one side of the equation to the other, changing the signs $+-$, for then by this rule there might be deduced $-c - b = -a$, an unintelligible proposition, and which from evident principles and strict inference, could never have been obtained: If then, for the sake of commodiousness in calculation, such a rule be laid down, it is partly arbitrary, and supposes some previous convention.

⁶³It is required to subtract $-b$ from a ; $a = a + b - b$ subtract $-b$, and there remains $a + b$; but this subtraction is in fact an effacing, or blotting out, and is not an operation that necessarily follows from the meaning of the word subtraction and from the notion we have of $-b$; to subtract a negative quantity, may be used as a phrase to signify the addition of a positive quantity, but it does not necessarily signify it: that is, this equivalence of the two expressions is not a sure and necessary consequence, from the notions we have of subtraction and of a negative quantity.

⁶⁴which is true, as appears by adding the two original equations: Hence in all cases $x - (-a)$ is properly expressed by $x + a$.

Non vi è alcun tentativo di giustificare la regola dei segni che viene assunta e la sua validità sottoposta al controllo della coerenza con un risultato su cui non possono esservi dubbi. Woodhouse è anche esplicito nel dichiarare che l'unico caso in cui si può dimostrare da principi evidenti la regola dei segni si ha nella deduzione di

$$(a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by$$

quando $a > b$ ed $x > y$. Se ciò non è vero, occorre postulare la regola ed applicare il principio di trasposizione alle uguaglianze

$$x - y = v - w \quad a = b \quad (2.10)$$

ottenendo

$$y - x = w - v \quad -a = -b$$

che, moltiplicate tra loro *supponendo valida* la regola dei segni forniscono

$$xa - ya = vb - wb$$

che è un'ovvia conseguenza delle equazioni (2.10). Dunque il principio di trasposizione, accettato come fondamento della teoria diventa il banco di prova della coerenza dei risultati ottenuti supponendo valida la regola dei segni.

Woodhouse critica anche la dimostrazione alla MacLaurin, basata sullo sviluppo $(a - a)b$ perché non è possibile assumerlo uguale a 0, dal momento che la sottrazione richiede che il sottraendo sia strettamente minore del minuendo. Infine, le analogie utilizzate solitamente per introdurre quantità negative sono passate al vaglio della critica e per Woodhouse l'analogia commerciale con i debiti è semplicemente assurda mentre quella basata sulla nozione di segmento orientato è meramente illustrativa e nulla dimostra, bensì elude il problema in quanto

non è per nulla evidente che, se una quantità positiva rappresenta un segmento tracciato in una direzione, una quantità negativa debba essere utilizzata per indicare un segmento nella direzione opposta.⁶⁵ ([55], p. 8)

Piuttosto, si tratta di una conseguenza della definizione convenzionale, grazie alla quale l'applicazione dell'algebra alla geometria è resa possibile.

La parola convenzione ritorna più volte in un'opera di indole didattica, il *Traité d'Algèbre* di Joseph Bertrand, nel momento in cui occorre introdurre le operazioni sulle quantità negative, queste ultime intese semplicemente come quelle precedute dal segno -, inteso come segno della sottrazione. L'intento di Bertrand è di servirsi di un certo numero di convenzioni per semplificare, unificandoli, alcuni enunciati appena riportati: Questa convenzione consiste nel *pensare la differenza $a - b$ come risultato dell'addizione di a con $(-b)$*

$$a - b = a + (-b).$$

L'espressione isolata $(-b)$ che è detta numero *negativo non acquista per questo alcun significato; si dice solamente: aggiungere $(-b)$ invece di dire: sottrarre b . Si conviene ugualmente che sottrarre $(-b)$, significhi aggiungere $+b$*

$$a - (-b) = a + b$$

⁶⁵that, a positive quantity representing a line drawn in one direction, a negative quantity must be used to denote a line in the opposite direction, is by no means a self-evident truth.

Tacitamente, anche Bertrand gioca sull'ambivalenza del segno – che da simbolo di sottrazione, denota un tipo di quantità, quelle negative. Le due uguaglianze precedenti non vanno dimostrate, sono definizioni ma la seconda è *conseguenza* della prima nel senso che, se non la si assumesse, sarebbe possibile aggiungere $(-b)$ ad a e poi sottrarre $(-b)$ al risultato, e *non* riottenere più a . A questo punto serve un'altra convenzione per dar senso ad $a - b$ nel caso in cui $b > a$:

Si conviene allora di concepire l'espressione $(a - b)$ come rappresentante un numero negativo uguale all'eccesso di b su di a .⁶⁷ ([6], p. 22)

È però bene che la convenzione sia giustificabile ed infatti Bertand sottolinea subito che

Questa convenzione è del tutto naturale; se non la si ponesse, si distruggerebbe l'analogia completa che esiste tra le operazioni relative ai numeri positivi e negativi.⁶⁸ ([6], p. 22)

Ciò che si dimostra è la naturalezza, la convenienza della convenzione adottata, non la validità della convenzione stessa, che rimane arbitraria. Non dovrebbe allora sorprendere che Bertrand adotti la regola dei segni come una *definizione* ([6], pp. 32-33).

2.7 Abbasso il segno -!

Abbiamo visto come già Leibniz avvertisse l'ambiguità presente nel duplice uso del segno - come segno di sottrazione e come prefisso che, anteposto ad un numero, lo trasforma in una quantità negativa e ritenuta responsabile delle difficoltà pedagogiche nell'introduzione all'algebra degli allievi alle prime armi con questa disciplina e fu sottolineata da diversi matematici nella seconda metà del XIX secolo. Per esempio, anche senza occuparsi direttamente della regola dei segni, George Boole chiarì l'importanza dell'univocità dei segni in generale:

un segno è un tratto arbitrario, avente un'interpretazione fissa, suscettibile di combinazione con altri segni ubbidendo a leggi fisse che dipendono dalla loro mutua interpretazione.⁶⁹ ([9], p. 25).

Di fronte all'ambiguità vi furono reazioni diverse che esaminiamo di seguito partendo da Lazare Carnot (1753-1823) che fu un fiero oppositore delle quantità negative

⁶⁶Cette convention consiste à regarder la différence $a - b$ comme résultat de l'addition de a avec $(-b)$

$$a - b = a + (-b).$$

L'expression isolée $(-b)$, que l'on nomme nombre négatif n'acquiert pour cela aucune signification; seulement on dit: ajouter $(-b)$, au lieu de dire: retrancher b .

On convient de même que retrancher $(-b)$, signifie ajouter $+b$

$$a - (-b) = a + b$$

⁶⁷On convient alors de regarder l'expression $(a - b)$ comme représentant un nombre négatif égal à l'excès de b sur a .

⁶⁸Cette convention est toute naturelle; et, en ne la faisant pas, on détruirait l'analogie complète qui existe entre les opérations relatives aux nombres négatifs et positifs.

⁶⁹*A sign is an arbitrary mark, having a fixed interpretation, and susceptible of combination with other signs in subjection to fixed laws dependent upon their mutual interpretation.*

contro cui scrisse molte pagine contenute nelle *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* e soprattutto nella *Géométrie de position* le cui tesi saranno ribadite in una *Digression sur la nature des quantités dites négatives*. La posizione di Carnot è quella ereditata da D'Alembert:

la natura delle quantità dette negative è sempre stata fonte di una delle maggiori difficoltà concettuali dell'analisi.⁷⁰ [Carnot, 1806, 96]

La difficoltà di Carnot è quella consueta, conseguenza della concezione dello 0 come nulla, al di sotto del quale nulla esiste, per cui non ci può essere alcun posto per delle quantità minori di nulla:

Il principio cardine della mia teoria è che la nozione di quantità negativa isolata è inammissibile; ad esempio, per fissare le idee in modo più preciso, dirò che *la geometria di posizione è quella in cui la nozione di quantità positiva e negativa è sostituita da quella di quantità diretta od inversa*.⁷¹ [Carnot, 1803, xxxv]

Nell'idea di Carnot la geometria di posizione è un modo per attribuire una maggiore estensione alle applicazioni dell'algebra alla geometria ordinaria, una teoria

il cui scopo precipuo è di esprimere in effetti, grazie a tabelle di confronto, le diversità nelle posizioni delle parti corrispondenti di figure dello stesso genere, dopo aver preventivamente formato la tabella generale delle loro proprietà comuni.⁷² [Carnot, 1803, xxxvii-xxxviii]

Se in alcuni punti la critica di Carnot alle quantità negative può lasciare sorpresi, in altri passaggi le sue obiezioni ad alcuni argomenti impiegati per giustificare la regola dei segni possono essere, almeno in part, condivise.

L'ambiguità insita nel segno $-$ fu il punto da cui prese le mosse un Carneade della matematica francese: C.V. Mourey, di cui non si dispone di sostanziali dati biografici certi ed è stato solo possibile congetturare un candidato: Claude-Victor Mourey (1791-1830), un *mécanicien à Paris* che avrebbe potuto pubblicare *La vraie Théorie des quantités négatives et des quantités prétendue imaginaires* nel 1828. Questo volume, di cui ci occupiamo ora, fu ripubblicato nel 1861 ed è su questa edizione che mi sono basato.

Introduzione ha un sottotitolo che è già un programma: *Source des difficultés de l'Algèbre* e la fonte responsabile dei problemi nello studio dell'algebra è proprio l'assurdità della sottrazione quando il sottraendo supera il minuendo. Per questo

Ne segue l'impossibilità di esprimere la differenza tramite il segno $-$, quando uno dei termini è incognito od arbitrario.⁷³ ([35], p. 1)

Se a è un numero assegnato ed x è incognito, quale senso dare ad $a - x$? Esso cambia da $a - x$ a $x - a$, a seconda che $a > x$ oppure $a < x$. La conseguenza tratta da Mourey è drastica

⁷⁰La nature des quantités dites négatives a toujours été le sujet d'une des principales difficultés métaphysiques de l'analyse.

⁷¹Le principe fondamentale de ma théorie est que la notion des quantités négatives isolée est inadmissible; ainsi pour fixer les idées d'une manière précise, je dirai que *la géométrie de position est celle où la notion des quantités positives et négatives est supplée par celle des quantités directes et inverses*.

⁷²dont l'objet spéciale est d'exprimer en effet, par des tableaux comparatifs, dans des figures de même genre la diversité des positions de leurs parties correspondantes, après avoir préalablement formé le tableau général de leurs propriétés communes.

⁷³Il suit de là qu'il est impossible d'exprimer la différence par le moyen du signe $-$, lorsque l'un des termes est inconnu ou arbitraire.

Ne consegue che il segno $-$, considerato come simbolo della sottrazione, non può essere ammesso in algebra. L'algebra dovendosi occupare di nient'altro che quantità incognite o arbitrarie, non può ammettere la sottrazione.⁷⁴ ([35], pp. 1-2)

Il rimedio proposto da Mourey è quello di ricorrere all'idea di segmento orientato ed è dunque la geometria a costituire l'habitat delle quantità negative. La specificazione del verso di un cammino può surrogare il segno negativo. Se, muovendomi su una retta, passo dal punto A al punto B e da questo al punto C potremo sempre dire che il percorso effettuato da A a B , addizionato a quello svolto da B a C è equivalente a quello fatto per andare direttamente da A a C , quale che sia la posizione relativa dei tre punti A, B, C sulla retta:

$$AB + BC = AC.$$

Lo spostamento di 6 leghe verso sud seguito da quello di 4 leghe verso nord si può esprimere benissimo con

$$6 \text{ leghe verso sud} + 4 \text{ leghe verso nord} = 2 \text{ leghe verso sud}$$

anziché il consueto

$$6 \text{ leghe verso sud} - 4 \text{ leghe verso sud} = 2 \text{ leghe verso sud} :$$

In generale, invece di sottrarre un cammino, si aggiungerà l'*inverso*⁷⁵.

Il segno $-$, smarrita la propria identità come simbolo della sottrazione, ne riacquista dunque un'altra: quella di *inverso*. L'inverso di un cammino AB (che conduce cioè da A a B) è un altro cammino BA , che conduce da B ad A e che va considerato distinto dal precedente: in questo si mostra con evidenza la natura *vettoriale* dei cammini introdotti da Mourey. Il cammino nullo è rappresentato dal punto A o, meglio, da un segmento come AA , per cui si può scrivere

$$AB + BA = AA = 0$$

che si può anche riscrivere come

$$AB + \text{inverso di } AB = AB - AB = 0$$

dove ora il segno $-$ significa l'*inverso* e riscrivere la relazione precedente come

$$AB + -AB = 0,$$

bandendo ancora una volta la sottrazione. Procedendo, Mourey osserva

È evidente che l'inverso dell'inverso di AB , essendo l'inverso di BA , è AB stesso; dunque

$$- - AB = -BA = AB.$$

Così, la combinazione di due segni $-$ è nulla e deve essere eliminata.⁷⁶ ([35], p.11)

⁷⁴Il suit de là que le signe $-$, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en Algèbre. L'Algèbre, étant censée ne s'occuper que de quantités inconnues ou arbitraires, ne peut point admettre de soustraction.

⁷⁵En général, au lieu de retrancher un voyage, on en ajoutera l'*inverse*

⁷⁶Il est évident que l'inverse de l'inverse de AB , étant l'inverse de BA , est AB lui-même; donc

$$- - AB = -BA = AB.$$

Ainsi, le rúnion de deux signes $-$ est nulle, et doit être supprimée.

Il modello cinematico utilizzato da Mourey come base delle sue considerazioni viene utilizzato anche per compendiare altri modelli utilizzati per introdurre quantità negative, da quello commerciale a quello cronologico, tutto viene tradotto in termini di cammini ([35], p. 16-19).

Un'idea sviluppata da Mourey è quella di numero diretto (*nombre directif*), grazie alla quale i segmenti orientati escono da un contesto unidimensionale per svilupparsi nel piano. Consideriamo due segmenti orientati di ugual lunghezza AB ed AC e sia $r > 0$ l'angolo compreso tra di essi, dove $r = 1$ corrisponde ad un angolo retto. Per portare AB a sovrapporsi su AC occorre effettuare una rotazione nel piano, per convenzione antioraria, di ampiezza r . La relazione indotta tra AB ed AC viene indicata da Mourey in questi termini:

$$AC = AB_r$$

ed una rotazione oraria corrisponderebbe ad un valore negativo di r . Si può scrivere allora

$$AD = AB_1, \quad AF = AB_2 \quad AH = AB_3 \quad AB_4 = AB.$$

dove l'ultima uguaglianza esprime l'equivalenza modulo $2\pi = 4\frac{\pi}{2}$ delle ampiezze angolari. In particolare, siccome $AF = -AB$ possiamo dire che

$$-AB = AB_2.$$

Indicate per semplicità con a e b le lunghezze di due segmenti, ed r s le ampiezze di due angoli, si vengono a creare dei numeri orientati (*nombres directifs*) che è possibile moltiplicare secondo la regola seguente:

$$a_r \times b_s = (a_r \times b)_s = [(ab)_r]_s = ab_{r+s} \quad (2.11)$$

Grazie a questa definizione, nel caso particolare in cui $r = s = 2$ si ha

$$a_2 \times b_2 = ab_4 = ab_0$$

mentre se $r = 0$ e $s = 2$ o, $r = 2$ e $s = 0$ si ottiene

$$a_0 \times b_2 = ab_2 \quad a_2 \times b_0 = ab_2$$

che, nel loro complesso, traducono in linguaggio geometrico la regola dei segni. Osserva Mourey:

Rispetto a questa definizione di moltiplicazione, farò la stessa osservazione già fatta relativamente a quella di addizione; non occorre pensarla come verità da dimostrare ma solo come convenzione da ammettere. La si deve ammettere se è utile⁷⁷ ([35], p. 31)

Può sembrare paradossale che si dedichi un paio di righe ad avvertire il lettore che una definizione non va dimostrata ma se Mourey come Bertrand si sofferma su questo punto è perché avverte una cesura tra due modi di concepire la matematica: uno (*more antiquo*) ancora le definizioni a dei dati di fatto verificabili o quantomeno plausibili; l'altro (*more moderno*) sconnette la validità delle definizioni da una immediata rispondenza con una qualche forma di evidenza sensibile, rivendicando per la

⁷⁷Par rapport à cette définition de la multiplication, je ferai la même observation que j'ai faite relativement à celle de l'addition; il ne faut pas la regarder comme une vérité à démontrer, mais seulement comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention si elle est utile.

matematica la libertà di darsi le proprie regole, il cui metro di giudizio sarà l'utilità e, soprattutto, la coerenza interna.

Comunque sia, Mourey ha tutta l'intenzione di eliminare la regola dei segni con le sue difficoltà, sostituendola con il calcolo geometrico. Per questo, commentando il prodotto tra due binomi, egli scrive

Osserviamo come non sia in discussione la regola dei segni perché, per esempio $a - b$ significa $a + -b$ che si può ancora mutare in $a + b_2$.⁷⁸ ([35], p. 34)

Il processo di normalizzazione delle quantità negative che vengono private della loro ambiguità con il ricorso alla geometria prosegue con la definizione di proporzione che fa seguito, ovviamente, a quella di divisione:

$$\frac{d_z}{a_r} := \left(\frac{d}{a} \right)_{z-r}$$

la cui coerenza va ora discussa, dimostrando che inverte la moltiplicazione definita più in alto. La proporzione (o equi-quoziente, *équi-quotient*) tra quattro numeri orientati a , b , c , d è l'uguaglianza dei rapporti a/b e c/d , $a : b :: c : d$. L'inciso, ovvio all'apparenza:

Dunque nella proporzione—o uguaglianza di quozienti—tra quantità orientate, il terzo termine si deve dedurre dal quarto, a seguito di moltiplicazione, divisione e cambio di verso, nello stesso modo in cui il primo è dedotto dal secondo.⁷⁹ ([35], p. 36) permette di far passare inosservata la pericolosa proporzione $-1 : 1 = 1 : -1$, riscritta nella forma

$$1_2 : 1 = 1_4 = 1_2 :$$

per andare da $AF = 1_2$ ad $AB = 1_4$ si effettua una rotazione di due retti in verso antiorario come si fa per sovrapporre $AB = 1 = 1_0$ ad $AF = 1_2$: l'algebra torna, circa tre secoli dopo Bombelli, sotto la tutela della geometria.

In un lavoro di poco posteriore, Ambroise Faure [21] vede nella regola dei segni un caso particolare della moltiplicazione tra numeri complessi: all'unità positiva si associa l'inclinazione nulla, a quella negativa l'inclinazione di due retti e quindi, non diversamente da Mourey, la regola dei segni emerge come conseguenza delle proprietà delle rotazioni del piano.

Il problema dell'ambiguità del segno — era molto sentito anche da Charles Meray (1835-1911), noto per i suoi lavori sui fondamenti dell'analisi, nelle prime pagine del suo ciclo di lezioni in analisi matematica in quattro volumi, la cui parte relativa alla spiegazione delle quantità negative era già apparsa nel 1890 [34]. Qui leggiamo:

Una confusione precoce e troppo assoluta tra i segni *operatori* di addizione e sottrazione e quelli *costitutivi* di quantità positive e negative, fatta ancora tra le quantità positive ed i loro valori numerici, rende i principii di questa teoria pressoché incomprensibili ai principianti. Le applicazioni alla specificazione matematica di grandezze opportune prese in versi opposti e la pratica del calcolo algebrico, finiscono certamente per inse-

⁷⁸Remarques qu'il n'est pas question ici de la règle des signes; car $a - b$, par exemple, signifie $a + -b$; ce qui peut encore se changer dans $a + b_2$.

⁷⁹Ainsi dans la proportion ou l'équi-quotient, entre quantités directives, le 3^e terme doit se déduire du 4^e, par multiplication, division et version, de la même manière que le 1^{er} se déduit du 2^e.

2.8. IL PRINCIPIO DI PERMANENZA DELLE PROPRIETÀ FORMALI 63

gnare a maneggiare queste quantità; tuttavia si giunge assai di rado a rendersi conto perfettamente dei motivi di tutto ciò.⁸⁰ ([34], p. 50)

La via perseguita da Meray presuppone la distinzione tra *quantità assolute* (i numeri naturali ed i razionali positivi) e *quantità qualificate* (*quantités qualifiées*) che sono quantità assolute cui vengono aggiunte delle qualità artificiali (*factices*) che le rendono idonee a subire delle operazioni, anch'esse dette artificiali ([34], p. 51). Ad una quantità assoluta $a > 0$ corrispondono due quantità qualificate, una detta positiva e l'altra negativa che hanno entrambe a come *valore assoluto* e, questo è il punto, vengono indicate con i simboli $\overleftarrow{a}$ e $\overrightarrow{a}$, rispettivamente e sono dette tra loro *opposte*: allo 0 corrisponde la quantità qualificata $\overleftrightarrow{0}$, detta neutra. Ora si può introdurre l'addizione tra quantità qualificate come l'operazione attraverso cui si sommano (come nell'aritmetica ordinaria) i valori assoluti delle quantità positive e, separatamente, tutti i moduli delle quantità negative. Si sottragga il minore dal maggiore dei risultati così ottenuti. Esso costituisce il modulo del risultato della somma che avrà la stessa natura della quantità qualificata di modulo maggiore, cioè esattamente come la somma algebrica tradizionale, salvo il fatto della nuova notazione: una definizione tradizionale che ricalca quella di Meray si trova, ad esempio, nel trattato ([14], p.13) di Charles Choquet (1798-?). Se i valori assoluti sono uguali, il risultato dell'operazione è la quantità neutra. Dunque, per calcolare il valore di

$$\overrightarrow{3} + \overleftarrow{7} + \overleftarrow{2} + \overleftrightarrow{0} + \overrightarrow{10} + \overleftarrow{0}$$

si considerano separatamente $\overrightarrow{3} + \overrightarrow{10} = \overrightarrow{13}$ e $\overleftarrow{7} + \overleftarrow{2} = \overleftarrow{9}$ e si sottrae aritmeticamente 9 da 13, ottenendo come risultato $\overrightarrow{4}$. Con la notazione di Meray, vi è il pregio di una immediata rintracciabilità dell'effetto del segno sulla quantità qualificata. Definita infatti la sottrazione come l'operazione che permette di trovare una terza quantità che, aggiunta alla seconda, riproduce la prima, se ne ha anche una definizione operativa perché il risultato della sottrazione si ottiene aggiungendo alla prima quantità l'opposto della seconda:

$$\overrightarrow{5} - \overleftarrow{6} = \overrightarrow{5} + \overrightarrow{6} = \overrightarrow{11}$$

ed è possibile trasformare addizioni e sottrazioni ad una certa quantità qualificata in sottrazioni ed addizioni delle quantità opposte:

$$\overleftarrow{5} - \overleftarrow{11} + \overrightarrow{6} - \overleftarrow{3} = \overleftarrow{5} + \overrightarrow{11} + \overrightarrow{6} + \overrightarrow{3} = \overrightarrow{15}.$$

2.8 Il principio di permanenza delle proprietà formali: Peacock, Hankel

Abbiamo già visto con Buée come la visione newtoniana di algebra come aritmetica universale non fosse ritenuta pienamente soddisfacente all'inizio dell'Ottocento. La critica si fa più serrata nelle opere di George Peacock: nel *Treatise on Algebra* del

⁸⁰Une confusion trop prématurée et trop absolue faite entre les signes opératoires de l'addition et de la soustraction et les signes constitutionnels des quantités positives et négatives, faite encore entre les quantités positives et leurs valeurs numériques, rend les principes de cette théorie à peu près intelligibles pour les commençants. Ses applications à la spécification mathématique des grandeurs convenables dans deux sens contraires, et la pratique du calcul algébrique, finissent sans doute par leur apprendre le maniement de ces quantités; mais il parviennent bien rarement à se rendre un compte parfaitement raisonné de ce qu'ils font ainsi.

1830 e poi nella riedizione in due volumi della stessa opera, pubblicati nel 1842 e 1845: il primo dedicato all'*algebra aritmetica*, l'altro all'*algebra simbolica*. Ecco come iniziava il *Treatise* del 1830:

Si è sempre considerata l'algebra come una modifica dell'aritmetica sorta per l'uso di un linguaggio simbolico e le operazioni di una scienza sono state trasferite all'altra senza menzionare il loro significato ed applicazione: in questo modo i simboli si assumono come rappresentanti generali ed illimitati di ogni specie di quantità: le operazioni di addizione e sottrazione intese nel loro semplice significato aritmetico si suppongono indicate dai segni $+$ e $-$ utilizzati per collegare tali simboli tra loro: moltiplicazione e divisione, due operazioni inverse in aritmetica, si suppongono applicabili ugualmente a tutte le quantità che questi simboli possono indicare, senza alcuna necessaria modifica del loro significato; se però l'impiego originario di questi segni ed operazioni è così limitato attentamente nell'estensione del loro significato, non vi è una limitazione simile imposta all'estensione della loro applicazione: così, non si ritiene necessario confinare le operazioni di addizione e sottrazione a quantità dello stesso tipo, o che le quantità sottratte debbano essere minori di quelle da cui esse sono sottratte; (...) È questa immediata deduzione dell'algebra dall'aritmetica e lo stretto legame che si è tentato di stabilire tra tali scienze, che ha condotto a credere che una sia davvero *fondata* sull'altra. (...) Credo appropriato mostrare in dettaglio le tappe successive che hanno portato dai principi e dalle operazioni dell'aritmetica a quelle dell'algebra per dimostrare che il loro legame non è necessario ma convenzionale e che l'aritmetica è una Scienza del Suggerimento, a cui i principi e le operazioni dell'algebra sono adattate ma da cui essi non sono né limitati né determinati.⁸¹ ([39], p. vi-viii)

Questa analisi mette in luce la necessità di non subordinare le regole dell'algebra a modelli validi solo in aritmetica (che Peacock chiama *Arithmetic Algebra*, quando i numeri sono rappresentati da lettere). Occorre certo richiedere che, quando le quantità algebriche si riducono ai numeri trattati in aritmetica, vi sia coincidenza delle regole dell'algebra (*Symbolic Algebra*) con l'aritmetica ma quest'ultima non può avere un ruolo fondazionale per l'algebra:

⁸¹ Algebra has always been considered as merely such a modification of Arithmetic as arose from the use of symbolical language, and the operation of one science have been transferred to the other without any statement of an extension of their meaning and application: thus symbols are assumed to be the general and unlimited representatives of every species of quantity: the operations of Addition and Subtraction in their simple arithmetical sense, are assumed to be denoted by the signs $+$ and $-$, and to be used in connecting such symbols with each other: Multiplication and Division, two inverse operations in Arithmetic, are supposed to be equally applicable to all quantities which symbols may denote, without any necessary modification of their meaning: but at the same time that the primitive assumption of such signs and operations is thus carefully limited in the extent of their signification, there is no such limitation imposed upon the extent of their application: thus it is not considered necessary that the operations of Addition and Subtraction should be confined to quantities of the same kind, or that the quantities subtracted should be less than the quantities from which they are subtracted: (...)

It is this immediate derivation of Algebra from Arithmetic, and the close connection which it has been attempted to preserve between those sciences, which has led to the formation of the opinion, that one is really *founded* upon the other. (...) It may be proper to exhibit at some length the successive transitions which are made from the principles and operations of Arithmetic to those of Algebra, in order to shew that their connection is not necessary but conventional, and that Arithmetic can only be considered as a Science of Suggestion, to which the principles and operations of Algebra are adapted, but by which they are neither limited nor determined.

2.8. IL PRINCIPIO DI PERMANENZA DELLE PROPRIETÀ FORMALI 65

Dunque $a - (a + b)$ esprimerebbe ovviamente un'operazione impossibile in un tale sistema di algebra; ma, se $(a + b)$ fosse sostituito da un unico simbolo c , l'espressione $a - c$, benché impossibile come $a - (a + b)$, non la rappresenterebbe più. Tuttavia, l'ipotesi di un'esistenza indipendente dei segni $+$ e $-$ rimuove una tale limitazione e rende possibile eseguire l'operazione indicata da $-$ in tutti i casi: è questo assunto che separa l'aritmetica dall'algebra simbolica e che rende necessario stabilirne i principi su base propria.⁸² ([39], p. ix)

Dopo questa preparazione, Peacock enuncia il principio di permanenza delle forme equivalenti:

Il principio di equivalenza delle forme equivalenti, che mi sembra di grande importanza nella generalizzazione dei risultati delle operazioni algebriche, deve ricevere la sua autorità dal punto di vista che ho assunto circa i principi dell'algebra e il loro legame con l'aritmetica, considerata come scienza del suggerimento: infatti, in primo luogo il principio suppone l'indipendenza delle operazioni algebriche e dei risultati ottenuti dai valori particolari dei simboli e presuppone le forme equivalenti come valide indipendentemente dai valori che tali simboli possono avere, fintantoché essi hanno una forma generale: in secondo luogo, ci permette di considerare le forme equivalenti ottenute nell'algebra aritmetica, dove i simboli hanno forma generale ma valori particolari, come necessariamente gli stessi dell'algebra simbolica, se alcuna di tali forme si presenta come risultato di operazioni algebriche.⁸³ ([39], pp. xvii-xviii)

Peacock trae le conseguenze immediate di questo cambio di prospettiva:

Una delle conseguenze più importanti di questo modo di vedere i principi e le operazioni dell'algebra è la completa separazione che si ottiene tra le leggi di combinazione dei simboli ed i principi della loro interpretazione: nelle consuete impostazioni dell'algebra, l'interpretazione originaria delle operazioni algebriche determina o si suppone determinare, esplicitamente o implicitamente, i risultati che si ottengono e le leggi di combinazione dei simboli: nell'impostazione che mi sono spinto a proporre la situazione è ribaltata, perché le leggi di combinazione dei simboli sono assunte non ad arbitrio ma con riferimento generale all'interpretazione che avevano originariamente nella scienza subordinata dell'aritmetica mentre le interpretazioni dei risultati ottenuti

⁸²Thus $a - (a + b)$ would obviously express an impossible operation in such a system of Algebra; but if $(a + b)$ was replaced by a single symbol c , the expression $a - c$, though equally impossible with $a - (a + b)$, would cease to express it. The assumption however of the independent existence of the signs $+$ and $-$ removes this limitation, and renders the performance of the operation denoted by $-$ equally possible in all cases: and it is this assumption which effects the separation of arithmetical and symbolical Algebra, and which renders it necessary to establish the principles of this science upon a basis their own.

⁸³The principle of the permanence of equivalent forms, which appears to me so important in generalizing the results of algebraical operations, must derive its authority from the view which I have taken of the principles of Algebra and of their connections with Arithmetic, considered as a science of suggestion: for in the first place, this principle assumes the operations of Algebra and their results altogether independent of the specific values of the symbols, and equivalent forms as existing therefore whatever values such symbols may be supposed to possess, so long as they are general in form: and in the second place, it enables us to consider the equivalent forms obtained in arithmetical Algebra, where the symbols are general in form, though specific in value, as necessarily the same likewise in symbolical Algebra, if any such forms exist as the result of algebraical operations.

sono determinate completamente in accordo a quelle leggi grazie ad un riferimento a specifici valori dei simboli.⁸⁴ ([39], pp. xx-xxi)

Peacock concepisce l'algebra come *la scienza del ragionamento generale mediante un linguaggio simbolico*⁸⁵ ([39], p. 1). La regola dei segni non è più un teorema da dedurre ma una regola posta a fondamento dell'edificio algebrico:

I simboli possono essere *accorporati* tra loro in modo da rappresentare una nuova quantità dello stesso o di un altro tipo, come nelle operazioni di *moltiplicazione* e *divisione*: in questo caso, la quantità che è risultato dell'operazione deve avere un segno determinato, dipendente dai segni dei simboli incorporati. Similmente, *combinando* tra loro simboli come nelle operazioni di addizione e sottrazione, indicate dagli stessi segni $+$ o $-$, da cui i simboli stessi sono affetti, segni simili o dissimili si presentano insieme ed è dunque utile, per evitare confusione, incorporarli in un unico simbolo. In entrambi i casi, essi sono soggetti a questa regola, che deve essere *assunta* e non *dimostrata*, e che può considerarsi essere uno dei più importanti principi primi di questa scienza.

Ogni volta in cui, per l'accorpamento di due simboli, due segni simili sono vicini tra loro, siano essi $+$ e $+$ o $-$ e $-$, essi sono sostituiti dal solo segno $+$: se però i due segni sono dissimili, siano essi $+$ e $-$ o $-$ e $+$, occorre sostituirli con il solo segno $-$.⁸⁶ ([39], p. 3)

Vediamo all'opera il principio di permanenza formulato da Peacock nel caso della regola dei segni.

Art. 566 1°. *Simboli generali in forma sono parimenti generali nella rappresentazione e nel valore.*

2°. *Le regole delle operazioni di moltiplicazione e divisione nell'algebra aritmetica, quando vengono applicate a simboli generali in forma ma ristrette quanto a valore, lo sono senza alterazioni alle operazioni che portano lo stesso nome nell'algebra simbolica, quando i simboli sono generali tanto in valore che in forma.*

⁸⁴One of the most important consequences of this view of the principles and operations of Algebra, is the complete separation which it effects of the laws for the combination of symbols from the principles of their interpretation: in common systems of Algebra, the previous interpretation, assumed or understood, of the operations of Algebra, determines, or is supposed to determine, the results which are obtained, and the laws of symbolical combinations: but the case is reversed in the system which I have ventured to propose, where the laws of symbolical combinations are assumed, not arbitrarily, but with a general reference to their anticipated interpretation in the subordinate science of arithmetic, whilst the interpretations of the results obtained are entirely determined in accordance with those laws by a reference to the specific values of the symbols.

⁸⁵the science of general reasoning by symbolical language.

⁸⁶Symbols may be *incorporated* into each other, so as to represent a new quantity of the same or a different kind, as in the operations of *Multiplication* and *Division*: in this case, the quantity which is the result of the operation, must have some determinate sign, dependent upon the signs of the symbols incorporated. In like manner, in *combining* symbols together by the operations of Addition and Subtraction, which are denoted by the same signs $+$ or $-$, by which the symbols themselves are affected, similar or dissimilar signs must come together, which it is expedient, in order to prevent confusion, to incorporate them into one. In both cases, they are subject to the following rule, which is *assumed* and not *proved*, and which may be considered as constituting one of the most important first principles of this science.

Whenever by the incorporation or combination of two symbols, two similar signs come together, whether $+$ and $+$ or $-$ and $-$, they are replaced by the single sign $+$: but if the two signs are dissimilar, whether $+$ and $-$ or $-$ and $+$, they are replaced by the single sign $-$.

2.8. IL PRINCIPIO DI PERMANENZA DELLE PROPRIETÀ FORMALI⁶⁷

Segue dalla seconda ipotesi che tutti i risultati delle operazioni di moltiplicazione e divisione in algebra aritmetica saranno anche risultati di algebra simbolica, ma non il viceversa.

Art. 567. Nell'algebra simbolica ed in quella aritmetica si presentano gli stessi tre casi dell'operazione di moltiplicazione: essi sono i seguenti:

- 1°. Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore sono monomi.*
- 2° Quando il moltiplicando è un polinomio ed il moltiplicatore un monomio.*
- 3° Quando sia il moltiplicando che il moltiplicatore sono polinomi.*

Nell'algebra aritmetica, la regola di occorrenza dei segni simili o dissimili è richiesta solo nel secondo e nel terzo caso: in algebra simbolica, però, la presenza di simboli o di termini singoli affetti dai segni + e - utilizzati indipendentemente rende necessario applicare la regola in tutti e tre i casi in esame.

Art. 568. Per dimostrare che la regola dei segni è conseguenza necessaria delle ipotesi fatte all'Art. 566, considereremo il prodotto di $a - b$ e $c - d$ come viene determinato in base ai principii dell'algebra aritmetica, cioè

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd. \quad (1)$$

Assumendo pertanto la permanenza di questo risultato o, in altre parole, l'equivalenza dei due membri che lo compongono per tutti i valori dei simboli, possiamo supporre che due dei numeri si annullino successivamente: dunque, se supponiamo $b = 0$ e $d = 0$, il prodotto (1) in oggetto diventa

1°. $(a - 0)(c - 0) = ac - a \times 0 - 0 \times c + 0 \times 0$, o $a \times c = ac$, dimenticandosi dei termini che coinvolgono lo zero.

Se supponiamo $b = 0$ e $c = 0$, otteniamo

2°. $(a - 0)(0 - d) = a \times 0 - ad - 0 \times 0 + 0 \times d$, o $a \times -d = -ad$.

Se supponiamo $b = 0$ e $c = 0$, otteniamo

3°. $(0 - b)(c - 0) = 0 \times c - 0 \times 0 - bc + b \times 0$, o $-b \times c = -bc$.

Se supponiamo $a = 0$ e $c = 0$, otteniamo

4°. $(0 - b)(0 - d) = 0 \times 0 - 0 \times d - b \times 0 + bd$, o $-b \times -d = bd$.

Segue dunque in generale come conseguenza necessaria delle ipotesi (Art. 566), che formano il fondamento dei risultati della moltiplicazione nell'algebra simbolica, che "quando due segni, siano essi + e + o - e -, sono presenti in una moltiplicazione, occorre rimpiazzarli nel prodotto dal solo segno +: e che quando due segni dissimili sono presenti, siano essi + e - o - and +, essi vanno sostituiti nel prodotto con il solo segno -".⁸⁷ ([41], pp. 17-18)

⁸⁷Art. 566 1st. Symbols which are general in form, are equally general in representation and value.

2nd. The rules of the operations of multiplication and division in Arithmetical Algebra, when applied to symbols which are general in form though restricted in value, are applied without alteration to the operations bearing the same names in Symbolical Algebra, when the symbols are general in their value as well as in their form.

It will follow from the second assumption that all the results of the operations of multiplication and division in Arithmetical Algebra, will be results likewise of Symbolical Algebra, but not conversely.

Art. 567. The same three Cases of the operation of multiplication present themselves in Symbolical and in Arithmetical Algebra: they are as follows:

1st. When the multiplicand and the multiplier are monomials⁸⁸.

2nd. When the multiplicand is a polynomial and the multiplier is a monomial.

Quindi, l'idea dietro al principio di permanenza usato da Peacock è quella di servirsi di risultati ottenuti nell'ambito dell'algebra aritmetica, *supporre* di estenderne la validità quando i simboli sono slegati dalle limitazioni proprie dell'aritmetica e porli a fondamento dell'algebra simbolica. Tutte le pretese dimostrazioni della regola avanzate nei secoli precedenti lasciavano inespressa quest'estensione e pretendevano di dimostrare in generale un risultato ottenuto nello spazio ristretto dell'aritmetica, fosse pure simbolica. Per concludere questa lunga esposizione dell'approccio di Peacock, osservo che nella *Arithmetic Algebra* egli aveva dedotto *in campo aritmetico* la regola $(a - b)c = ac - bc$ con un argomento *alla Viète*:

È evidente che il prodotto di $a - b$ per c sarà inferiore rispetto al prodotto di a per c , per l'ammontare del prodotto di b per c .⁸⁹ ([40], Art.26, p. 25)

Quanto al prodotto $(a - b)(c - d)$, Peacock è più formale e procede ponendo $x = a - b$, in modo da eseguire il prodotto richiesto in base a quanto stabilito all'Art. 26:

$$(a - b)(c - d) = x(c - d) = cx - dx = c(a - b) - d(a - b)$$

ed iterare il procedimento per giungere a

$$(a - b)(c - d) = c(a - b) - d(a - b) = ca - bc - (da - db)$$

ed infine arrivare al risultato cambiando i segni ai termini tra parentesi, secondo la regola che aveva spiegato all'Art. 21 (*cfr.* [40], p. 29).

3rd. When both the multiplicand and multiplier are polynomials.

In Arithmetical Algebra, the rule for the concurrence of like and unlike signs is required in the 2nd and the 3rd Cases only: but in Symbolical Algebra, the occurrence of symbols or single terms affected by the signs $+$ and $-$ used independently renders its application necessary in all the three Cases under consideration.

Art. 568. In order to shew that the Rule of signs is a necessary consequence of the assumptions made in Art. 566, we shall consider the product of $a - b$ and $c - d$ as determined by the principles of Arithmetical Algebra, which is

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd. \quad (1)$$

Assuming, therefore, the permanence of this result, or in other words, the equivalence of the two members of which is composed, for all values of the symbols, we may suppose two of their number to become successively equal to zero: thus, if we suppose $b = 0$ and $d = 0$, the product (1) in question becomes

1st. $(a - 0)(c - 0) = ac - a \times 0 - 0 \times c + 0 \times 0$, or $a \times c = ac$, obliterating the terms which involve zero.

If we suppose $b = 0$ and $c = 0$, we get,

2nd. $(a - 0)(0 - d) = a \times 0 - ad - 0 \times 0 + 0 \times d$, or $a \times -d = -ad$.

If we suppose $b = 0$ and $c = 0$, we get,

3rd. $(0 - b)(c - 0) = 0 \times c - 0 \times 0 - bc + b \times 0$, or $-b \times c = -bc$.

If we suppose $a = 0$ and $c = 0$, we get,

4th. $(0 - b)(0 - d) = 0 \times 0 - 0 \times d - b \times 0 + bd$, or $-b \times -d = bd$.

It follows therefore generally, as a necessary consequence of the assumptions (Art. 566), which form the foundation of the results of multiplication in Symbolical Algebra, that when two like signs, whether $+$ and $+$ or $-$ and $-$, concur in multiplication, they are replaced in the product by the single sign $+$: and that when two unlike signs similarly concur, whether $+$ and $-$, or $-$ and $+$, they are replaced in the product by the single sign $-$.

⁸⁹It is obvious that the product of $a - b$ by c , will be less than the product of a by c , by the product of b by c .

2.8. IL PRINCIPIO DI PERMANENZA DELLE PROPRIETÀ FORMALI 69

Più che a Peacock, il principio di permanenza delle proprietà formali (*Princip der Permanenz formaler Gesetze*) è legato al nome di Hermann Hankel che lo formulò nel 1867:

Quando due simboli algebrici espressi in forma generale sono uguali tra loro, debbono restare anche uguali quando i simboli cessano di denotare semplici grandezze, e dunque le operazioni acquistano un contenuto di qualche altra natura.⁹⁰ ([27], p. 11)

Hankel definisce in astratto delle operazioni come legami, diretti od inversi, tra oggetti astratti che godono di certe proprietà dichiarate esplicitamente: per l'addizione e la moltiplicazione la proprietà associativa e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, da cui la regola dei segni viene dedotta. Definita la sottrazione ($a-b$), tra due oggetti a e b come quell'oggetto che, sommato a b restituisce a , cioè

$$(a-b)+b=a$$

e lo zero come *modulo* (*Modul*) della somma, cioè tale che $a+0=a$, qualunque sia l'oggetto a , Hankel *definisce* $-a$ come risultato b dell'operazione $0-a$. Introdotta la moltiplicazione nei termini accennati sopra, Hankel ne *deduce* la regola dei segni:

$$(a+b)c=ac+bc$$

pone $b=-a$ cosicché $(a+(-a))c=0$, cioè $ac+(-a)c=0$ e dunque

$$(-a)c=-ac.$$

Scritta l'altra forma della proprietà distributiva

$$a(c+d)=ac+ad$$

e posto in essa $d=-c$ si ricava

$$a(-c)=-ac$$

e, infine, sostituito c con $-c$ in $(-a)c=-ac$ ricava

$$(-a)(-c)=ac$$

concludendo

Possiamo dunque far discendere la nota regola di moltiplicazione tra numeri negativi dal principio distributivo.⁹¹ ([27], p. 32)

Invocando il principio di permanenza per *definire* la regola dei segni, Hankel commenta:

Non si sottolineerà mai abbastanza, a fronte di una visione generale alquanto diffusa, che queste equazioni [quelle che esprimono la regola dei segni] in una matematica formale non possono più essere dimostrate; sono convenzioni arbitrarie per permettere

⁹⁰Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen.

⁹¹Können so die bekannten Regeln der Multiplication negativer Zahlen aus dem distributiven Princip abgeleitet werden.

la conservazione del formalismo nel calcolo. (...) Una volta decisa questa convenzione, seguiranno *necessariamente* tutte le altre regole della moltiplicazione.⁹² ([27], p. 41).

Una esposizione molto chiara, in qualche senso operativa, del principio di permanenza si trova nell'articolo sui fondamenti dell'aritmetica scritto da Hermann Schubert nel 1898 e che inaugura la monumentale *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Qui Schubert elenca i quattro passi in cui si articola il principio nel caso dell'estensione di un campo numerico:

in primo luogo, ad ogni complesso di simboli che non rappresenti numeri già noti si conferisca un senso tale da poterlo trattare secondo le stesse regole, come se rappresentasse uno dei numeri definiti sino a quel punto;

in secondo luogo, si definisca un tale complesso di simboli come numero, in senso lato e di conseguenza si estenda il concetto di numero;

in terzo luogo, si dimostri che per i numeri intesi in senso lato valgono gli stessi teoremi validi per i numeri in senso non ancora esteso;

in quarto luogo, si definisca il significato di uguale, maggiore e minore nel nuovo campo numerico.⁹³ ([48], p. 11)

Il terzo passo della proposta descritta da Schubert offre il fianco alla critica di Peano, che esso *non* può riguardare tutte le regole vigenti nell'insieme numerico più ristretto, dal momento che, ad esempio, il teorema: se $ab = 1$ allora $a = b = 1$ è vero nei naturali ma falso già negli interi relativi. In conclusione, mi sembra di poter dire che, nel passare da teorema a norma posta a fondamento dell'algebra, la regola dei segni abbia seguito un cammino simile alla definizione di insieme infinito proposta da Dedekind, come insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio: questa proprietà che apparve per secoli un *paradosso* che doveva mettere in guardia dalla natura contraddittoria del concetto di infinito diventa un punto di partenza, una *definizione* da cui trarre le conseguenze logiche. Qui, i tentativi di dimostrare la regola dei segni a partire dalla proprietà distributiva, valida in campo aritmetico, invocavano più o meno implicitamente la necessità di estendere la validità delle proprietà fondamentali delle operazioni elementari: se da una parte, il non aver messo in luce questo aspetto, ha causato una infinità di fraintendimenti, l'approccio pragmatico, concreto, alla matematica non ha permesso che tali indecisioni rallentassero lo sviluppo dell'algebra, come vedremo nei capitoli che seguono.

⁹²Es kann gegenüber einer sehr allgemein verbreiteten Ansicht nicht scharf genug hervorgehoben, dass diese Gleichungen $[(-A)\Gamma = -A\Gamma, A(-\Gamma) = -A\Gamma, (-A)(-\Gamma) = A\Gamma]$ in der formaler Mathematik nimmermehr *beweisen* werden können; es sind *arbiträre Conventionen* zu Gunsten der Erhaltung des Formalismus im Calcul. (...) Sind aber diese Convention einmal geschlossen, so folgen daraus alle anderen Gesetze der Multiplication mit *Nothwendigkeit*.

⁹³erstens darin, jeder Zeichen-Verknüpfung, die keine der bis dahin definierten Zahlen darstellt, einen solchen Sinn zu erteilen, dass die Verknüpfung nach denselben Regeln behandelt werden darf, als stellte sie eine der bis dahin definierten Zahlen dar;

zweitens darin, eine solche Verknüpfung als Zahl in erweiterten Sinne des Wortes zu definieren und dadurch den Begriff der Zahl zu erweitern;

drittens darin, zu beweisen, dass für die Zahlen im erweiterten Sinne dieselbe Sätze gelten, wie für die Zahlen im noch nicht erweiterten Sinne;

viertens darin, zu definieren, was im erweiterten Zahlengebiet gleich, grösser und kleiner heisst.

2.9 Regola dei segni senza numeri negativi

Come accennato all'inizio di questo capitolo, sul finire del XIX secolo venne elaborato un approccio ai numeri negativi – e non solo – in modo da ricondurre tutte le operazioni dell'aritmetica elementare ad opportune operazioni definite su coppie ordinate di interi. Le prime formulazioni di tale metodo sono rintracciabili, anche se non pienamente sviluppate, in alcuni corsi di lezioni che Carl Weierstrass teneva a Berlino ma sono stati sviluppati dettagliatamente da altri matematici, quali Jules Tannery. Seguiamo la chiara esposizione che si trova nel Cap. II della monografia di Louis Couturat (1868-1914) *L'infini mathématique* che è dedicato all'estensione aritmetica del concetto di numero, precisamente all'idea di *nombre qualifié* che surrognerà i tradizionali interi relativi. La definizione cardinale del metodo è quella di *coppia (couple)*: un elemento (a, b) del prodotto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Due coppie sono uguali

$$(a, b) = (a', b')$$

se

$$a + b' = b + a'. \quad (2.12)$$

Con questa definizione si può affermare che

$$(n, n) = (1, 1) = (0, 0) \quad \forall n \in \mathbb{Q}.$$

La prima operazione definita su queste coppie è l'addizione algebrica

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (2.13)$$

che gode delle proprietà associative e commutativa e permette di assegnare alla coppia $(0, 0)$ il ruolo di *zero algebrico* in quanto

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

qualunque sia la scelta della coppia (a, b) . Due coppie come (a, b) e (b, a) sono poi dette *coppie* simmetriche e la loro somma è nulla in quanto

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b) = (0, 0).$$

È anche possibile definire la differenza di due coppie distinte (a, b) ed (a', b') come quella che, sommata ad una delle precedenti, fornisce la coppia restante. Precisamente, posto

$$(a, b) - (a', b') := (a + b', b + a')$$

si osserva che

$$(a + b', b + a') + (a', b') = (a, b) + (b', a') + (a', b') = (a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

in virtù della definizione di coppie simmetriche. D'altra parte, siccome $(a + b', b + a') = (a, b) + (b', a')$, possiamo concludere che

$$(a, b) - (a', b') = (a, b) + (b', a')$$

Retrancher d'un couple un autre couple, c'est ajouter au premier le symétrique du second. ([16], p. 25)

È possibile anche introdurre una relazione di ordine tra coppie $(a, b) > (a', b')$ ($(a, b) < (a', b')$) se

$$a + b' > b + a' \quad (a + b' < b + a').$$

Il *prodotto algebrico* di due coppie è infine definito come

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba') \quad (2.14)$$

che gode delle stesse proprietà del prodotto ordinario e per il quale la coppia $(0, 0)$ è tale che

$$(a, b) \times (0, 0) = (0, 0).$$

Come visto, vi sono più coppie *equivalenti* tutte allo $(0, 0)$ e ciò suggerisce di individuare altri tipi di coppie equivalenti. Il risultato viene ottenuto ricorrendo al teorema seguente

È possibile aggiungere o sottrarre un numero ai due termini di una coppia senza modificarne il valore.⁹⁴ ([16], p. 27)

Si tratta di una rapida verifica perché $(a, b) = (a + n, b + n)$ equivale a

$$a + b + n = b + a + n$$

che è un'ovvia identità. Ora, dalla definizione di uguaglianza di due coppie si vede che se $a - b = a' - b'$ allora le coppie (a, b) ed (a', b') sono uguali. Viceversa, se queste coppie sono uguali e dunque si ha

$$a + b' = b + a'$$

vediamo che, se $a = a'$ allora anche $b = b'$ e quindi $a - b = a' - b'$. Se invece $a \neq a'$ e, per esempio, supponiamo $a < a'$, allora posto $a' = a + d$ la condizione di uguaglianza diviene

$$a + b' = b + a + d$$

da cui segue che $b' = b + d$ per cui è ancora vero che $a - b = a' - b'$. Come conseguenza di quanto detto sinora, se da ambo i termini di una coppia (a, b) si sottrae il termine *minore* si ottiene una coppia uguale ad (a, b) che rappresenta la *riduzione* alla sua espressione più semplice. Si possono presentare due casi:

1. Se $a > b$ allora

$$(a, b) = (a - b, 0)$$

e coppie di questo tipo vengono definite come *numeri positivi*.

2. Se $a < b$ allora

$$(a, b) = (0, b - a)$$

e coppie di questo tipo vengono definite come *numeri negativi*.

3. Se $a = b$ allora

$$(a, b) = (0, 0)$$

e la coppia definisce il *numero zero*.

L'insieme numerico così ottenuto è detto insieme dei *numeri qualificati* (*nombres qualifiés*, [16], p. 29) È chiaro che solo due numeri positivi o due numeri negativi possono essere uguali tra loro, mai un numero positivo può uguagliare un numero negativo. Inoltre, dalla definizione di addizione, abbiamo che

$$\begin{aligned} (a, 0) + (a', 0) &= (a + a', 0) \\ (0, b) + (0, b') &= (0, b + b') \\ (a, 0) + (0, b') &= (a, b') \end{aligned}$$

⁹⁴On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux termes d'un couple sans changer sa valeur.

da cui si vede che la somma di due numeri positivi è positiva, la somma di due numeri negativi è ancora negativa mentre la somma di un numero positivo e di uno negativo è

$$\begin{aligned}(a, 0) + (0, b') &= (a, b') = (a - b', 0) && \text{se } a > b' \\ (a, 0) + (0, b') &= (a, b') = (0, b' - a) && \text{se } a < b'\end{aligned}$$

che confermano note proprietà numeriche. Venendo al prodotto, avremo, grazie alla (2.14),

$$\begin{aligned}(a, 0) \times (a', 0) &= (aa', 0) \\ (a, 0) \times (0, b') &= (0, ab') \\ (0, b) \times (a', 0) &= (0, a'b) \\ (0, b) \times (0, b') &= (bb', 0)\end{aligned}$$

che riproducono la regola dei segni, senza introdurre i numeri negativi. Dal punto di vista formale il metodo delle coppie, che fu utilizzato anche per introdurre i razionali e le operazioni su di essi, è piuttosto soddisfacente. Ricordiamo però di aver visto tanti matematici preoccuparsi nel corso degli anni alle difficoltà che la regola dei segni, nella sua accezione tradizionale, causava ai *principianti*. Nasce una domanda: è possibile trarre degli spunti *pedagogici* da questo metodo? In diversi, tra i quali Cesare Burali-Forti, all'inizio del XX secolo criticarono il metodo delle coppie anche per l'eccessiva prolissità e complicazione delle operazioni che costituivano un prezzo forse troppo alto da pagare per il beneficio ottenuto. Vi fu, restando in Italia, almeno un tentativo compiuto di introdurre il metodo delle coppie nella scuola, leggermente modificato in modo da rendere più intuitiva la notazione. Fu quello di Ettore Baroni (1866-1918)—assistente di Ulisse Dini a Pisa e poi docente presso il Liceo Visconti di Roma—che introdusse l'algebra in un manuale ad uso dei Licei [5] con questo metodo.

2.10 Analogie con la regola dei segni

La difficoltà ad accettare la regola dei segni non è dovuta alla regola in sé ma alle difficoltà ad accettare i numeri negativi. Per suffragare questa ipotesi, in questa sezione conclusiva mostro due regole del tutto analoghe, accettate senza problemi. La prima risale alle *Disquisitiones Arithmeticae* [17] di Gauss (1777-1855), pubblicate nel 1801. Per comprendere di cosa si tratti, richiamiamo alcune nozioni di teoria elementare dei numeri [52]. Sia $p > 2$ un numero primo e sia $\mathbb{Z}_p$ l'insieme delle classi di resto modulo p , identificabile con l'insieme $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Accanto a questo insieme considereremo $\mathbb{Z}_p^* := \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. La teoria dei residui quadratici si occupa della più semplice congruenza di secondo grado

$$x^2 = a \pmod{p} \quad (2.15)$$

ed il primo problema da stabilire è se, scelto $a \in \mathbb{Z}_p^*$, l'equazione (2.15) abbia o meno soluzione. Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che, essendo

$$k^2 = (p - k)^2 \pmod{p}$$

possiamo limitarci a prendere a nell'insieme $\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Ora, osserviamo che due qualsiasi tra i $\frac{p-1}{2}$ interi

$$\left\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\} \quad (2.16)$$

non possono essere congrui modulo p . Se così fosse, si dovrebbe avere

$$x^2 = y^2 \pmod{p}$$

per qualche intero $x, y \neq x$ nell'insieme $\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Poichè da

$$x^2 = y^2 \pmod{p}$$

discende che

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \pmod{p}$$

si dovrà avere o $x = y$ oppure $x = -y$, modulo p . Quest'ultima uguaglianza è impossibile perché la somma $x + y$ è strettamente minore di p . Dunque i $\frac{p-1}{2}$ numeri (2.16), ridotti eventualmente ad essere minori di p , rappresentano i soli valori di a per i quali esso è un residuo quadratico. Gli elementi di $\mathbb{Z}_p^*$ si ripartiscono in due classi, ciascuna formata da $\frac{p-1}{2}$ elementi. In una classe figurano gli a per i quali (2.15) ha soluzione e che sono detti *residui quadratici* di p ; nell'altra figurano gli a per i quali (2.15) non ammette alcuna soluzione e che sono detti *non residui quadratici* di p . Seguendo una notazione introdotta da Gauss diremo, rispettivamente

$$aRp \quad aNp$$

a seconda che a sia o meno un residuo quadratico di p .

Esempio. Prendiamo $p = 7$; abbiamo

$$1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 = 2 \pmod{7}$$

per cui i residui quadratici di 7 sono 1, 2, 4 mentre 3, 5, 6 sono non residui quadratici di 7.

Una domanda naturale è sapere se la proprietà di essere o meno un residuo quadratico venga conservata dal prodotto.

1. Siano R_1 ed R_2 due residui quadratici del numero primo $p > 2$. Allora $R_1 R_2$ è ancora un residuo quadratico. Infatti, debbono esistere x_1 ed x_2 in $\mathbb{Z}_p^*$ tali che

$$x_1^2 = R_1 \pmod{p} \quad x_2^2 = R_2 \pmod{p}$$

sicché

$$(x_1 x_2)^2 = R_1 R_2 \pmod{p}$$

che mostra come $R_1 R_2$ sia pure residuo quadratico di p .

2. Sia R_1 un residuo quadratico ed N_2 un non residuo quadratico del numero primo $p > 2$. Allora $R_1 N_2$ non è un residuo quadratico. Supponiamo che lo sia: esisterà $z \in \mathbb{Z}_p^*$ tale che

$$z^2 = R_1 N_2 \pmod{p}. \quad (2.17)$$

Ora, siccome R_1 è residuo quadratico di p sappiamo che esiste $x \in \mathbb{Z}_p^*$ tale che

$$x^2 = R_1 \pmod{p}.$$

Ora, essendo p primo, sappiamo che ciascun $x \in \mathbb{Z}_p^*$ ammette un inverso moltiplicativo, cioè esiste sempre un $y \in \mathbb{Z}_p^*$ tale che

$$xy = 1 \pmod{p}.$$

La dimostrazione di questo fatto è un caso particolare di questa proposizione. Si prenda $b \in \mathbb{Z}_p^*$ e si formi l'insieme

$$\{b, 2b, 3b, \dots, (p-1)b\} :$$

esso coincide ancora con $\mathbb{Z}_p^*$. Infatti, se esistessero $j, k \in \mathbb{Z}_p^*$ tali che

$$jb = kb \pmod{p}$$

allora dovrebbe essere $(j-k)b$ multiplo di b , che è impossibile. Detto questo, moltiplichiamo (2.17) per y^2 ottenendo

$$(yz)^2 = y^2 R_1 N_2 = (yx)^2 N_2 = N_2 \pmod{p}$$

che affermerebbe che N_2 è un residuo quadratico di p , contrariamente all'ipotesi fatta.

3. Siano N_1 ed N_2 due non residui quadratici del numero primo $p > 2$. Allora $N_1 N_2$ è un residuo quadratico di p . Infatti, se prendiamo l'insieme dei $\frac{p-1}{2}$ residui quadratici $\{R_1, R_2, \dots, R_{\frac{p-1}{2}}\}$ e li moltiplichiamo per uno stesso non residuo quadratico N , otterremo l'insieme di *tutti* i $\frac{p-1}{2}$ non residui quadratici che potranno dunque porsi nella forma $\{NR_1, NR_2, \dots, NR_{\frac{p-1}{2}}\}$. Possiamo allora scrivere $N_1 = NR_1$ ed $N_2 = NR_2$ da cui, esistendo x_1 ed x_2 tali che $x_1^2 = R_1$ ed $x_2^2 = R_2$, avremo

$$N_1 N_2 = N^2 R_1 R_2 = (Nx_1 x_2)^2 \pmod{p}$$

che mostra come $N_1 N_2$ sia un residuo quadratico di p .

Mettendo insieme i risultati visti ne ricaviamo il quadro

$$R_1 \times R_2 = R_3 \quad R_1 \times N_2 = N_3 \quad N_1 \times R_2 = N_3 \quad N_1 \times N_2 = R_3$$

che è chiaramente isomorfo alla regola dei segni. Nell'originale di Gauss, all'art. 98 di [17] lo troviamo enunciato in questo modo:

Il prodotto di due residui quadratici di un numero primo p è un residuo; il prodotto tra un residuo ed un non residuo è un non residuo; infine il prodotto di due non residui è un residuo.⁹⁵ ([17], p. 96)

Un altro esempio è fornito da un insieme di rotazioni nel piano, utilizzate dal matematico scozzese Duncan Farquharson Gregory (1813-1844) per mostrare come vi possano essere operazioni apparentemente lontane, perché nascono in discipline distanti, che però seguono le stesse regole di combinazione. In verità, Gregory era più interessato all'analogia tra la moltiplicazione di potenze con ugual base e la derivazione di una funzione, tra calcolo delle differenze finite e calcolo differenziale, tuttavia la regola dei segni fornisce una materia preziosa per chiarire con un semplice esempio il caso più interessante per le applicazioni che egli aveva in mente. Gregory pubblicò il lavoro [30] nel 1839 tra la prima e la seconda edizione del libro di Peacock e per lui

⁹⁵Productum e duobus residuis quadraticis numeri primi p , est residuum; productum e residuo in non residuum, est non residuum; denique productum e duobus non-residuis, residuum.

l'algebra simbolica studia le operazioni definendole attraverso le loro regole di combinazione che fungono da modello per i casi particolari che si trovano sia nell'algebra aritmetica che in quella simbolica ([30], p. 3)⁹⁶:

Indichiamo, come d'abitudine, con F ed f due operazioni qualsiasi, la cui natura ci è sconosciuta e premettiamole ad altri simboli su cui intendiamo indicare che le operazioni rappresentate da F o da f debbano agire.

I. Supponiamo, dunque, l'esistenza di due classi di operazioni F ed f , collegate tra loro dalle seguenti leggi:

$$\begin{array}{ll} (1) & FF(a) = F(a). \\ (3) & Ff(a) = f(a). \end{array} \quad \begin{array}{ll} (2) & ff(a) = F(a). \\ (2) & fF(a) = f(a). \end{array}$$

Gregory trova due operazioni in *aritmetica* e due in *geometria* che godono di queste proprietà: l'addizione (F) e la sottrazione (f); lo spostamento di un punto lungo tutta una circonferenza (F) e lo spostamento di un punto lungo una semicirconferenza (f). Gregory sottolinea che le operazioni aritmetiche e geometriche qui menzionate hanno alcuna analogia non dovuta alla loro natura ma al fatto che si combinano con le stesse leggi: La relazione esistente non deriva dall'identità della loro natura, ma dal fatto di

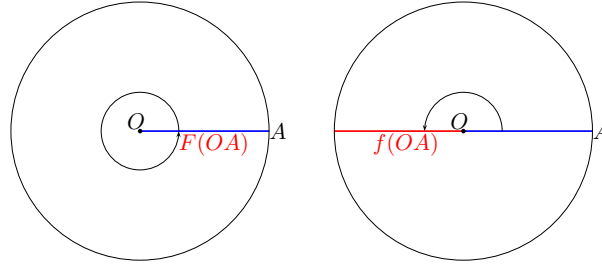


Figura 2.10: Illustrazione del significato delle operazioni F ed f introdotte da Duncan Gregory.

combinarsi con le stesse leggi.⁹⁷ ([30], p. 4)

Notiamo la somiglianza con la costruzione di Mourey.

⁹⁶Let us take as usual F and f to represent any operations whatever, the natures of which are unknown, and let us prefix these symbols to any other symbols, on which we wish to indicate that the operation represented by F or by f is to be performed.

I. We assume, then, the existence of two classes of operations F and f , connected together by the following laws:

$$\begin{array}{ll} (1) & FF(a) = F(a). \\ (3) & Ff(a) = f(a). \end{array} \quad \begin{array}{ll} (2) & ff(a) = F(a). \\ (2) & fF(a) = f(a). \end{array}$$

⁹⁷The relation which does exist is due not to an identity of their nature, but to the fact of their being combined by the same laws.

Bibliografia

- [1] M.G. Agnesi: *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Vol. I, Milano, nella Regia Ducal Corte, (1748).
- [2] A. Amiot: *Leçons nouvelles d'algèbre élémentaire*. 2eme Édition. Dezobry & C^{ie}, Paris, (1860).
- [3] A. Amiot: *Leçons nouvelles d'algèbre élémentaire*. 5eme Édition. Delagrave, Paris, (1878).
- [4] N. Arnould: *Nouveaux Éléments de Géométrie*. II Édition. Van Bulderen, La Haye, (1690).
- [5] E. Baroni: *Algebra e Trigonometria*. Ad uso dei Licei secondo gli ultimi programmi. Vol. I (Primo anno di Liceo). Bemporad, Firenze, (1906).
- [6] J. Bertrand: *Traité d'Algèbre*. Première Partie. III Édition. Gauthier-Villars, Paris, (1863).
- [7] E. Bezout: *Cours de Mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*. III partie. Parigi, Musler, (1773).
- [8] R. Bombelli: *L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica*. Rossi, Bologna, (1572).
- [9] G. Boole: *An investigation of the laws of thought*. Walton and Marbely, London, (1854).
- [10] É. Borel: *Valeur pratique et philosophie des probabilités* 2^e édition, augmentée d'une Note: probabilité, certitude et application aux nombres premiers. Gauthier-Villars, Paris, (1952).
- [11] A.-Q. Buée: Mémoire sur les quantités imaginaires, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **96**, 23–88, (1806).
- [12] L. Carnot: *Géométrie de position*. Duprat, Parigi, (1803).
- [13] A.-L. Cauchy: *Cours d'analyse de l'École royale Polytechnique*, Debure, (1821).
- [14] C. Choquet: *Traité d'algèbre*. Mallet-Bachelier, Paris, 1856.
- [15] A.C. Clairaut: *Éléments d'algèbre*. Paris, (1768).
- [16] L. Couturat: *L'infini mathématique*. Alcan, Paris, (1896).
- [17] J. Le Ronde D'Alembert: Sur les Logarithmes des quantités négatives. In *Opuscules Mathématiques* Vol. I, Parigi, David, 180-209 (1761).
- [18] R. Descartes: *The Geometry of René Descartes with a fac-simile of the first edition*, translated from the French and Latin by D.E. Smith and M.L. Latham, Dover, New York, (1954). Riproduzione dell'edizione del 1925 pubblicata da Open Court Publishers.

- [19] Diofanto: *Diophani Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis*. Vol. I. ed. P. Tannery. Teubner, Leipzig, (1893).
- [20] L. Euler: *Éléments d'algèbre*. Vol. I: *De l'Analyse déterminée*. Traduit de l'allemand. Lione, Bruyset, (1795-96), Anno III dell'era repubblicana.
- [21] A. Faure. *Essai sur la Théorie et l'Interprétation des quantités dites imaginaires*. I Mémoire. Bachelier, Paris, (1845).
- [22] M. Ferrari: La regola dei segni e la sua storia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **25B**, 313-345, (2002).
- [23] M. Fouché: Sur l'introduction des nombres négatifs. *Nouvelles annales de mathématiques*, **12** (S. III), (1893), 164-179.
- [24] C.F. Gauss: *Disquisitiones Arithmeticae*. Fleischer, Leipzig, (1801).
- [25] J.-D. Gergonne: *Réflexions sur le même sujet*. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, **4**, (1813-14), 6-20.
- [26] A. Girard: *L'Invention Nouvelle en l'Algèbre*, Blaeuw, Amsterdam, (1629). Ristampata a cura di D. Bierens de Haan, Leida, (1884).
- [27] H. Hankel: *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. I Theil. *Theorie der complexen Zahlensysteme*. Voss, Leipzig, (1867).
- [28] N. L. de La Caille: *Leçons élémentaires des mathématiques*. Parigi, Desaint, (1784).
- [29] N. L. de La Caille: *Lezioni elementari di matematiche* del sig. Abate Marie. Tradotte dal francese da Stanislao Canovai e Gaetano del-Ricco. Firenze, Allegretti, (1791).
- [30] D.F. Gregory: On the real nature of symbolical algebra. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, **14**, (1839), 208-216. In *The Mathematical writings of Duncan Farquharson Gregory*. Edited by William Walton. Deighton, Bell and co. Cambridge (U.K.), 1865, pp. 1-13.
- [31] G.W. Leibniz: *Leibnizens gesammelte Werke aus den Handschriften der Königlischen Bibliothek zu Hannover*. Herausgegeben von G.H. Pertz. III Folge: Mathematik. VII Band. Schmidt, Halle, (1863).
- [32] C. MacLaurin: *A Treatise of Algebra*. Millar and Nourse, London, (1748).
- [33] P. Mengoli: *Geometriae Speciosae Elementa*. Bologna, Ferroni, (1659).
- [34] C. Meray: Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives. *Nouvelles annales de mathématiques*, **9** (S. III), 50-59, (1890).
- [35] C.V. Mourey: *la vraie Théorie des Quantités négatives et des Quantités prétendues imaginaires*. Mallet-Bachelier, Paris, (1861).
- [36] I. Newton: *Arithmetica Universalis sive de compositione et resolutione arithmetica Liber*. Lugduni Batavorum (Leida), Veerbeek, (1732).
- [37] Pappo di Alessandria: *Mathematicae Collectiones*. A Federico Commandino Urbinate in Latinum conversae et Commentariis illustratae. De Duccis, Bologna, (1660).
- [38] J. Prestet: *Nouveaux Éléments de Géométrie*. Pralard, Paris, (1689).
- [39] G. Peacock: *A treatise on Algebra*. Smith, Cambridge, (1830).

- [40] G. Peacock: *A treatise on Algebra. Vol. I Arithmetical Algebra*. Cambridge, at the University Press, (1842).
- [41] G. Peacock: *A treatise on Algebra. Vol. I Symbolical Algebra and its applications to the geometry of position*. Cambridge, at the University Press, (1845).
- [42] C. Rabuel: *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*. Lion, Duplain, (1730).
- [43] C. Reyneau: *Science du Calcul de grandeurs en general, ou les élémens des mathématiques*. Parigi, Quillau, (1714).
- [44] V. Riccati, G. Saladini: *Institutiones Analyticae Tomus I*. Bologna, Tip. S. Tommaso, (1765).
- [45] M. Rolle: *Traité d'Algèbre; ou principes generaux pour resoudre les questions de mathématique*. Parigi, Michallet, (1690).
- [46] P. Ruffini: *Corso di Matematiche ad uso degli aspiranti Alla Scuola d'Artiglieria, e Genio di Modena*, Tomo III. Modena, Soc. tipografica, (1807).
- [47] N. Saunderson: *The Elements of Algebra in Ten Books*. Cambridge, at the University Press (1790).
- [48] H. Schubert: *Grundlagen der Arithmetik*. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Erster Band: Arithmetik und Algebra*. Redigiert von W.F. Mayer. Erster Teil. Leipzig, Teubner, (1898).
- [49] G. I. 's Gravesande: *Matheseos universalis elementa*, Luchtman, Leida, (1727).
- [50] G. Schubring: *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*, Springer, New York, (2005).
- [51] S. Stevin: *L'Arithmétique*. In *The principal works of Simon Stevin. Mathematics* vol. IIB. Ed.: J. Struik. Amsterdam (1958).
- [52] J.V. Uspensky, M.A. Heaslet: *Elementary number theory*. McGraw-Hill, New York & London, (1939).
- [53] F. van Schooten: *Renati des Cartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune*. Knoch, Frankfurt an Mein, (1695).
- [54] F. Viète: *In artem analyticem isagoge* (1591). In *Francisci Vietae Opera Mathematica*, curatore F. van Schooten, 1–12, (1646).
- [55] R. Woodhouse: *The Principles of analytic calculation*. Cambridge (U.K.), at the University Press, (1803).