Indice

1 Precursori **3**
1.1 La legge degli esponenti 3
1.2 Il peso dei calcoli 13
1.3 Testi originali 19

2 John Napier **23**
2.1 Cenni biografici 23
2.2 L'opera matematica 24
2.3 Che cosa è un logaritmo neperiano? 28
2.4 Questioni di priorità 43
2.5 Testi originali 46

3 Henry Briggs **51**
3.1 La vita e l'incontro con Nepero 51
3.2 I logaritmi di Briggs nell'*Arithmetica Logarithmica* 54
3.3 Omaggio a Nepero 60
3.4 L'algoritmo della radice quadrata 65
3.5 Schemi alle differenze finite 70
3.6 Metodi di interpolazione 76
3.7 Il metodo radicale 87
3.8 Fonti dei metodi di Briggs 91
3.9 Testi originali 97

4 Fine dell'età pioneristica **109**
4.1 Keplero e la diffusione dei logaritmi in Germania 109
4.2 Cavalieri ed i logaritmi in Italia 130
4.3 Juan Caramuel 132
4.4 Testi originali 133

5 I logaritmi e la geometria **141**
5.1 Le proprietà logaritmiche dell'iperbole 141
5.2 Costruzione geometrica dei logaritmi 150
5.3 Torricelli e la curva logaritmica 157
5.4 Huygens e la curva logaritmica 176

5.5 Testi Originali 201

6 Gli sviluppi in serie **207**
6.1 I logaritmi visti da Pietro MENGOLI 207
6.2 La *Logarithmotechnia* di Nicolaus MERCATOR 210
6.3 La serie di GREGORY 227
6.4 Isaac NEWTON 237
6.5 La *restaurazione* di HALLEY 241
6.6 Testi originali 246

7 Logaritmi dei numeri negativi **255**
7.1 Il carteggio LEIBNIZ-J. BERNOULLI I (1712-1713) 255
7.2 Il carteggio tra Johann BERNOULLI I ed EULERO (1727-1729) . . 274
7.3 EULERO legge il carteggio LEIBNIZ-BERNOULLI 281
7.4 Testi originali 288

8 I logaritmi dei numeri complessi in EULERO **303**
8.1 Quanti logaritmi ha un numero? 303
8.2 La relazione $i^i = e^{-\pi/2}$ 314
8.3 I logaritmi nei manuali di EULERO 318
8.4 Testi originali 328

9 L'irrazionalità di e da EULERO a HERMITE **337**
9.1 EULERO e l'irrazionalità di e 337
9.2 LAMBERT e l'irrazionalità di e 345
9.3 LIOUVILLE e l'irrazionalità di e 351
9.4 HERMITE e l'irrazionalità di e 354
9.5 Testi Originali 355

10 La trigonometria iperbolica **359**
10.1 La trigonometria iperbolica di Vincenzo RICCATI 359
10.2 La trigonometria iperbolica di LAMBERT 365
10.3 Testi originali 369

Capitolo 1

Precursori

1.1 La legge degli esponenti

L'osservazione del legame esistente tra progressioni aritmetiche e geometriche si può prendere come segnale precursore della scoperta dei logaritmi. Infatti, se $a_m = a_0\, q^m$ ed $a_n = a_0\, q^n$ sono due termini di una progressione geometrica, il loro prodotto occupa la posizione $m + n$ nella progressione: al prodotto tra a_n ed a_m corrisponde la somma degli esponenti—ad una progressione geometrica ne corrisponde una aritmetica—e proprio la riduzione di prodotti in somme è la proprietà che ha decretato il grande successo dei logaritmi. Il primo ad osservare la legge degli esponenti fu Archimede di Siracusa (287(?)-212 a.C.) che ne fa menzione in un'opera interessante per molti aspetti, l'*Arenario* (ΨΑΜΜΙΤΗΣ). L'opera è importante per la storia della matematica e per quella dell'astronomia. L'aspetto matematico saliente è l'indagine sulla possibilità di esprimere numeri interi qualsiasi utilizzando il sistema *non posizionale* in uso presso i greci. Quest'ultima precisazione è doverosa perché agli occhi dei moderni il problema appare futile, dal momento che aggiungendo un numero qualsivoglia di zero a destra di un gruppo di cifre significative, ovvero ricorrendo a notazione esponenziale, è possibile esprimere un numero grande a piacere. Il sistema di numerazione in uso all'epoca di Archimede era *alfabetico* e poggiava sulle seguenti corrispondenze:

1	α	2	β
3	γ	4	δ
5	ε	6	stigma
7	ζ	8	η
9	ϑ	10	ι
20	κ	30	λ
40	μ	50	ν
60	ξ	70	o
80	π	90	coppa
100	ϱ	200	σ
300	τ	400	υ
500	φ	600	χ
700	ψ	800	ω
900	sampi	1000	$,\alpha$

e proseguiva per i numeri superiori a mille anteponendo un pedice ad una lettera: così 2000 si rappresentava come $,\beta$. La *miriade* $10000 =, \iota$ era indicata con la lettera M ed i suoi multipli mediante una notazione del tipo $M^\beta = 20000$, $M^\gamma = 30000$ (si vedano le sezioni §§32-43 di [1] per ulteriori dettagli). Il problema su cui è incentrato l'Arenario viene enunciato nei termini seguenti da ARCHIMEDE

Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero [dei granelli] della sabbia sia infinito in quantità: dico non solo quello [dei granelli di sabbia] che sono intorno a Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche quello [dei granelli di sabbia] che sono in ogni regione, sia abitata sia non abitata. Vi sono poi alcuni che ritengono che quel numero non sia infinito, ma che non si possa nominare un numero che superi la sua quantità. È chiaro che se coloro che così pensano si rappresentassero un volume di sabbia di grandezza tale quale quella della Terra, avendo riempito tutti i mari e tutte le depressioni fino a raggiungere l'altezza delle più alte montagne, molto meno comprenderebbero che si possa nominare un numero che superi tale quantità. Ma io tenterò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni geometriche che tu potrai seguire, che, dei numeri da noi denominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non soltanto il numero [dei granelli] della sabbia aventi [nell'insieme] grandezza uguale alla Terra riempita come abbiamo detto, ma anche della grandezza uguale al cosmo [intero]. (ARCHIMEDE, *Arenario*, p.446 di [2])

Come primo passo, ARCHIMEDE stima l'estensione del cosmo servendosi della teoria eliocentrica di ARISTARCO di Samo e giunge ad affermare che il diametro d del cosmo è inferiore a 10000 volte il diametro della Terra e pertanto inferiore a "cento miriadi di miriadi" di stadi[1] ([2], p. 456), ovvero poiché la miriade $,\iota = 10000$, si ha $d < 10^{10}$ stadi. A seguire, ARCHIMEDE suppone che in un seme di papavero non vi siano più di 10000 granelli di sabbia e che il diametro di un seme di papavero sia 1/40 del dito. Giunto a questo punto, egli espone il suo

[1] Esistevano vari tipi di stadio, nell'antica Grecia. Pur essendo uno stadio pari a 600 piedi, poco meno di 200 metri, l'equivalente in metri poteva subire delle variazioni a seconda del luogo.

metodo per esprimere numeri sempre più grandi con un sistema di numerazione non posizionale. Con il sistema in uso, era possibile nominare numeri fino alla miriade di miriadi, cioè 10^8. ARCHIMEDE chiama numeri primi o del primo periodo quelli compresi tra 1 e 10^8, escludendo quest'ultimo che diventa l'unità dei numeri del secondo periodo i quali vanno da 10^8 fino alla miriade di miriadi di unità del secondo periodo e dunque fino a $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$, con il quale iniziano i numeri del terzo periodo e così via *ad infinitum*. Appare chiaro, tra l'altro, che ARCHIMEDE non nutre dubbi sul fatto che la successione dei numeri naturali sia infinita *potenzialmente*, per usare categorie aristoteliche [3].

Il passo più importante per i nostri scopi è il seguente

Se dei numeri son posti in proporzione continuata a partire dall'unità, e se [il numero] che vien dopo l'unità è 10, i primi otto di essi, compresa l'unità, saranno tra quelli che sono stati chiamati numeri "primi", e altri otto dopo di essi [saranno] tra quelli che sono stati chiamati numeri "secondi" (....) E anche ciò che segue è utile a conoscersi. Se dei numeri in proporzione continuata vengon moltiplicati tra loro, appartenendo alla stessa proporzione, il prodotto sarà nella stessa proporzione, e disterà dal maggiore dei numeri che vengono moltiplicati tra loro di quanto il più piccolo di detti numeri dista dall'unità della proporzione; e rispetto all'unità [avrà un certo numero d'ordine] minore di una unità [della somma] dei numeri d'ordine dei numeri che si moltiplicano tra loro. (ARCHIMEDE, *Arenario*, pp.460–461 di [2])

Numeri a, b, c, d, *etc.* si dicono in proporzione continuata se

$$a : b = b : c = c : d = d : ....$$

cioè se il rapporto tra due numeri consecutivi è costante. È chiaro che, posto $1/q := a/b$, le proporzioni continuate sono *progressioni geometriche* di ragione q e termine iniziale a. Quanto ARCHIMEDE ha enunciato nel passaggio ora citato è l'osservazione che anzitutto 1, 10, 100,...10^k formano una proporzione continuata e, soprattutto, il riconoscimento della legge degli esponenti per cui, al *prodotto* tra potenze della proporzione corrisponde la *somma* degli esponenti. Questo risultato, dimostrato da ARCHIMEDE in generale, da una parte consente di trovare in 10^{63}, cioè l'ottavo dei numeri dell'ottavo periodo, un'approssimazione per eccesso del numero di granelli di sabbia contenuti nella sfera delle stelle fisse. D'altra parte, fa capire come ARCHIMEDE avesse intuito l'idea fondamentale che sta dietro alla definizione di logaritmo, vale a dire la possibilità di trasformare moltiplicazioni in somme. La dimostrazione di ARCHIMEDE procede secondo queste linee

Siano infatti A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L alcuni numeri in proporzione continuata a partire dall'unità e sia A l'unità: si moltiplichi D per H e il prodotto sia W. Si prenda dunque nella proporzione [il termine] L distante da H di tanti [posti] quanti D dista dall'unità: si deve dimostrare che W è uguale ad L. Poiché dunque in numeri proporzionali D dista da A quanto L da H, si ha $D : A = L : H$. Ma D è il prodotto di D per A, quindi $L = H \times D$ cosicché si ha $L = W$. È dunque chiaro che il prodotto è [un termine] della proporzione,

e che dista, dal maggiore dei numeri che si moltiplicano, tanti [posti] quanti il minore [di quei numeri] dista dall'unità. Ed è manifesto che [il prodotto considerato] dista dall'unità per un [posto] in meno [della somma] delle distanze dall'unità di D, H; infatti i [numeri] A, B, C, D, E, F, G, H sono tanti quanti [posti] H dista dall'unità, e quelli I, K, L sono uno in meno di quanti [posti] D dista dall'unità, poiché aggiunto H sono altrettanti. (ARCHIMEDE, *Arenario*, pp.461–462 di [2])

L'osservazione di ARCHIMEDE sulla legge degli esponenti non sembra aver dato origine ad ulteriori indagini sull'argomento nell'antichità e verrà trattata più volte nel XV e XVI secolo, prima cioè della nascita di NEPERO. In effetti, il legame tra progressioni aritmetiche e geometriche era espresso da Severino BOEZIO (480-524 ca.) nella *Mensa Pythagorica*, opera molto diffusa nel Medioevo ed è conosciuto a diversi scrittori rinascimentali (per un elenco, si veda p.82 di [5]). Un chiaro enunciato della legge degli esponenti si trova nella *Triparty en la Science des Nombres* scritto da Nicholas CHUQUET nel 1484. Quest'opera rappresenta in certa misura una sintesi tra i due livelli, accademico e vernacolare, in cui la matematica si divideva a seconda delle necessità dell'utente. La matematica vernacolare è ad uso soprattutto di commercianti ed è attenta a problemi di calcolo, più che a problemi di concetto come nella matematica di derivazione accademica (*cf.* Capitolo II di [6]). Questa matematica *minore* ha in effetti prodotto opere di grande interesse quali il *Liber Abaci* di Leonardo PISANO detto FIBONACCI (1175 ca-1250) che diede grande impulso all'impiego in Occidente del sistema di numerazione posizionale di derivazione indo-arabica che era stato introdotto forse da GERBERTO (940 ca-1003), maestro dell'Imperatore OTTONE III e poi papa con il nome di SILVESTRO II. Ecco alcuni passi della *Triparty* dedicati alla legge degli esponenti.

È utile considerare più numeri proporzionali che, a partire da 1 formino un ordinamento continuato come 1.2.4.8.16.32 ecc. o .1.3.9.27 ecc. È poi utile sapere che 1. rappresenta ed è al posto dei numeri con denominazione 0/2. rappresenta ed è nel posto dei primi con denominazione .1./ 4 è nel posto dei secondi che hanno denominazione 2.2 Ed 8 è nel posto dei terzi. 16 in quello dei quarti.[2](CHUQUET, *Triparty*, p. 84 di [5])

Similmente, il prodotto di .4. che è il secondo numero per .8. che è il terzo numero dà .32. che è il quinto numero..... In questa considerazione si manifesta un segreto proprio dei numeri proporzionali. Cioè che moltiplicando per se stesso un numero della proporzione se ne ottiene un altro avente denominazione doppia. Ad esempio, moltiplicando .8. qui è terzo per se stesso si ottiene .64. che è sesto. E moltiplicando per se stesso .16. che è quarto si ottiene 256. che è ottavo. E moltiplicando .128. che è settimo della proporzione per .512

[2]Il convient poser pluszs n$\overline{o}$bres pporcionalz c$\overline{o}$mancans a 1. constituez en ordonnance continuee c$\overline{o}$me 1.2.4.8.16.32 etc. ou .1.3.9.27. etc. Mantenant conuient scauoir que. 1. represente et est ou lieu des nombres d$\overline{o}$t le^r den$\overline{oi}$na^{on} est .0. /2. represent et est ou lieu des premiers dont leur denom$\bar{i}$acion est .1./4. tient le lieu des secondz dont leur denom$\bar{i}$acion est .2. Et .8. est ou lieu des tiers. 16. tient la place des quartz.

che è il nono termine si ottiene 65536 che è il sedicesimo termine.[3](CHUQUET, *Triparty*, p. 84 di [5])

Riportiamo questo altro esempio, utile per comprendere la notazione impiegata all'epoca, e per molto tempo ancora, per individuare la parte frazionaria di un numero

I termini di una qualche proporzione continuata siano ordinati in modo da iniziare a contare il termine successivo ad 1. come il primo e quello successivo come secondo e così via per gli altri. Con questo ordinamento i numeri hanno la proprietà che moltiplicandone due tra di loro se ne ottiene un altro della proporzione il cui ordine è la somma degli ordini dei fattori. Un altro esempio con la proporzione superbiparziente.

$1\cdot\frac{2}{3}$	1
$2\cdot\frac{7}{9}$	2
$4\cdot\frac{17}{27}$	3
$7\cdot\frac{58}{81}$	4
$12\cdot\frac{209}{243}$	5
$21\cdot\frac{316}{729}$	6

Moltiplicando $4\cdot\frac{17}{27}$ che è il terzo termine superbiparziente per se stesso si trova il sesto termine, $21\cdot\frac{316}{729}$. Moltiplicando il secondo termine $2\cdot\frac{7}{9}$ per il terzo, $4\cdot\frac{17}{27}$, si trova $12\cdot\frac{209}{243}$ che è il quinto. Perché 2 e 3 sommati fanno 5. E così anche per gli altri termini.[4] (CHUQUET, *Triparty*, Parte I, p. 420 di [7], pp. 67-68 di [6])

[3]Semblement qui multiplie .4. qui est nombre second par .8. qui est nombre tiers montent .32. qui est nombre quint.....En ceste consideration est maĩfeste vng secret qui est es nombres pporcionalz. Cest que qui multiple vng nombre pporcional en soy Il en viẽt le nombre du double de sa denominĩacion come qui ml'tiplie .8. qui est tiers en soy Il en vient .64. qui est six^e. Et .16. qui est quart multiplie en soy. Il en doit venir 256. qui est huyt^e. Et qui multiplie .128. qui est le .7^e. pporcional par .512 qui est le 9^e. Il en doit venir 65536 qui est le 16^e.

[4]Tous nomres proporcionalz constituez ordonneement en quelque proporcion que ce soit commancant toutesfoiz a 1 et comptant cellui qui vient Immediatemmt apres, 1. pour le premier et celui dap's pour le second et consequentement les aultres. Telz nombres ainsi ordonnez ont telle prope'te que... qui multiplie lung diceulx par lung des aultres et qui adiouste les deux ordres esquelz sont situez les deux nombres multipliez. Il treuve le lieu on doit estre situe le nombre venu de la multiplicacion cest a dire qu'il trevue le quantisieme nombre ceste multiplicacion doit produire...Aultre exemple a la proporcion superbiparciens.

$1\cdot\frac{2}{3}$	1
$2\cdot\frac{7}{9}$	2
$4\cdot\frac{17}{27}$	3
$7\cdot\frac{58}{81}$	4
$12\cdot\frac{209}{243}$	5
$21\cdot\frac{316}{729}$	6

Qui multiplie $4\cdot\frac{17}{27}$ qui est le 3^e superbiparciens en soy Il treuve le 6^e superbiparciens qui est $21\cdot\frac{316}{729}$. Ou qui multiplie le 2^e superbiparciens qui est $2\cdot\frac{7}{9}$ par le 3^e qui est $4\cdot\frac{17}{27}$ lon trouuera $12\cdot\frac{209}{243}$ qui est le 5^e. Car 2 et 3 Joinetz ensemble font 5. Et ainsi des ault's superparciens et semblablement sea aultres especes conuient entendre...

Il termine superbiparziente (*superbiparciens*) con cui CHUQUET indica la progressione geometrica fa riferimento alla classificazione dei rapporti introdotta da NICOMACO di Gerasa (I sec. d.C.) nell'*Introductio Arithmeticae*.

Testo 1.1 (Erasmo ERIZIO**)** *, Musica Speculativa), 1498.* Originale 1.3 *Vi sono quindi cinque generi di proporzioni, cioè a dire multipla, superparticolare, superparziente e questi tre sono generi semplici. Inoltre vi sono la proporzione multipla superparticolare e la multipla superparziente che sono due generi composti. (...) Una proporzione è detta multipla quando il numero maggiore contiene il minore esattamente un numero intero di volte: come il due contiene l'unità due volte per cui è una proporzione doppia. Il quattro contiene l'unità quattro volte per cui la proporzione è quadrupla, ed il tre contiene l'unità tre volte, ecc. La proporzione è superparticolare quando il numero maggiore contiene il minore una volta ed una qualche sua parte. Ne sono esempi le proporzioni sesquialtera, sesquiterza, sesquiquarta, sesquiquinta, ecc. La proporzione è sesquialtera quando il numero maggiore contiene il minore una volta più la metà dell'unità, come tre sta a due. La proporzione è sesquiterza quando il numero maggiore contiene il minore una volta più la sua terza parte come quattro sta a tre. La proporzione è superparziente quando il numero maggiore contiene il minore una volta ed alcune sue parti e si hanno la proporzione superbiparziente, supertriparziente. La superbiparziente si ha quando il numero maggiore contiene il minore una volta più due sue parti, come cinque a tre. Poiché il cinque contiene il tre una volta con due terzi. La supertriparziente si ha quando il numero maggiore contiene il minore una volta più tre sue parti, come sette sta a quattro, infatti il sette contiene il quattro una volta più tre quarti. La proporzione multipla superparticolare si ha quando il numero maggiore contiene il minore un certo numero di volte più una certa parte, e si distingue tra doppia sesquialtera, tripla sesquialtera, tripla sesquiterza. La proporzione doppia sesquialtera si ha quando il maggiore contiene il minore due volte più una parte su due, come cinque sta a due, dal momento che il cinque contiene il due due volte più la metà dell'intero. La proporzione è multipla superparziente quando il numero più grande contiene il più piccolo un certo numero di volte più un certo numero di parti. Ne sono esempi la proporzione doppia supebiparziente, doppia supertriparziente, ecc. La doppia superbiparziente si ha quando il numero maggiore contiene l'altro due volte più due parti, come otto a tre dal momento che otto contiene tre due volte più due terzi, e così negli altri casi. La proporzione si riconosce in questo modo. Se allora sono assegnati due numeri arbitrari, se sono uguali a due a due, si tratta di una proporzione di uguaglianza, come due sta a due, tre sta a tre. Se al contrario fossero diversi, si divida il maggiore per il minore, il quoziente dà il nome alla proporzione. Ad esempio, dividendo .8. per .3. si ottiene il quoziente .2. con due terzi e di tratta pertanto di una proporzione superbiparziente. Così se divido 6 per 2 il quoziente è tre e non c'è resto per cui la proporzione è tripla. E così via si ripete l'operazione in tutti i tipi di qualsiasi genere,*

Dunque il rapporto tra due numeri naturali a e b, con $a > b$, può appartenere a cinque distinte famiglie: *multiplex* (multiplo), quando a è un multiplo intero

di b: $a = nb$ dove n è un intero; *superparticular* (superparticolare) se $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{b}$, ; *superpartiens* (superparziente) se $\frac{a}{b} = 1 + \frac{m}{b}$, dove m è un intero variabile tra 2 e $b - 1$; *multiplex superparticular* (multiplo superparticolare) quando $\frac{a}{b} = k + \frac{1}{b}$, con $k > 1$ intero; infine, *multiplex superpartiens* (multiplo superparziente) quando $\frac{a}{b} = k + \frac{m}{b}$. Così la progressione indicata da CHUQUET nel testo ha ragione $\frac{5}{3}$. La notazione $1 \cdot \frac{2}{3}$ indica il numero avente parte intera 1 e parte frazionaria $\frac{2}{3}$, cioè $1 \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Così $7 \cdot \frac{58}{81} = 7 + \frac{58}{81} = \frac{625}{81} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$. Si nota pertanto come la notazione decimale venga impiegata solo per la parte intera, mentre la parte frazionaria non ha una potenza di 10 a denominatore.

Benché terminata nel 1484, non si è a conoscenza di alcun esemplare a stampa della *Triparty* che diverrà nota quando Estienne DE LA ROCHE attingerà a piene mani da essa nella sua *Larismethique*, pubblicata nel 1520. Proprio la scarsa circolazione della *Triparty* è la causa dell'influenza limitata che essa esercitò nel XVI secolo. Diversa fu la sorte della *Künstliche Rechnung* di Christoph RUDOLFF (1500 ca-1546 ca) del 1526 dove viene espressa la legge degli esponenti, illustrata da diversi esempi. All'opera di RUDOLFF attinsero ampiamente APIANO (Peter BIENEWITZ, 1495-1552) e Gemma RAINER (REGNIER) o Gemma di Frisia (1508-1555), autore di un diffuso libro di testo, l' *Arithmeticae Practicae Methodus*, che conobbe sessanta edizioni tra il 1540 ed il 1601. In tale opera l'autore esprime in questi termini la legge degli esponenti riferendosi alla tabella

3	9	27	81	243	729
0	1	2	3	4	5

Se infatti moltiplicherai tra di loro due di questi numeri e dividerai il risultato per il primo si otterrà un numero da collocare nella posizione che indicano i due fattori[5] (GEMMA di Frisia, *Arithmeticae Practicae Methodus*, p.85 di [5])

Un deciso passo in avanti si ha con la pubblicazione della *Arithmetica Integra* di Michael STIFEL (1487 ca-1567). Qui si trova enunciata la legge degli esponenti nei termini già incontrati più volte:

Tutto ciò che la progressione aritmetica opera attraverso l'addizione e la sottrazione, la progressione geometrica lo opera con moltiplicazione e divisione. come mostra pienamente il lib. 1. al capitolo sulle progressioni geometriche. Vedi pertanto

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	*2*	*4*	*8*	*16*	*32*	*64*	*128*	*256*

Così come (nella riga superiore) 3 e 5 sommati danno 8, così (nella riga inferiore) 8 e 32 moltiplicati danno 256. È poi 3 l'esponente di otto, 5 l'esponente di 32 ed 8 è l'esponente del numero 256. Allo stesso modo, come nella riga supe-

[5] Si enim duos quoscunque ex his numeris inuicem multiplicaueris, productumque per primum diviseris, producetur numerus eo loco ponendus quē duo facta indicabunt.

riore per sottrazione di 3 da 7, resta 4, così nella riga inferiore dalla divisione di 128 per 8, si ottiene 16. [6](STIFEL, *Arithmetica Integra*, pp. 85-86 di [5])

Osserviamo [5] che STIFEL chiama 5 l'esponente di 32, non l'esponente della base 2, come diremmo oggi. Nell'opera di STIFEL la legge degli esponenti è espressa anche per esponenti *negativi*, come dimostra il passo seguente:

Come sopra l'unità vengono disposti numeri interi e sotto l'unità le sue parti, e come sopra 1 vengono disposti numeri interi e sotto 1 vengono poste le sue parti o frazioni: così sopra lo 0 è posta l'unità con gli interi e sotto lo 0 sono disposti numeri con segno. Ciò che appare ben rappresentato nella progressione dei numeri naturali quando viene legata alla progressione (geometrica). Ma illustriamo questa speculazione con un esempio.

-3	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*	*32*	*64*

(STIFEL, *Arithmetica Integra*, p. 421 di [7]). [7]

Di importanza ancor maggiore sono gli enunciati delle corrispondenze tra operazioni su potenze ed operazioni su esponenti.

1. Nelle progressioni aritmetiche l'addizione corrisponde alla moltiplicazione in quelle geometriche. Come, in questa progressione aritmetica, 3.7.11.15 la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini medi ed entrambe danno 18. Così in questa [progressione] geometrica, 3.6.12.24. il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi ed entrambi danno 72 e così si potrebbero fare infiniti altri esempi.

2. La sottrazione nelle [progressioni] aritmetiche corrisponde alla divisione nelle geometriche....

3. La moltiplicazione semplice (cioè di un numero per un numero) quando sia eseguita in una [progressione] aritmetica, corrisponde alla moltiplicazione di un numero per se stesso nelle progressioni geometriche. Così alla moltiplicazione

[6]Qualiacumque facit Arithmetica progressio additione, et subtractione, talis facit progressio Geometrica multiplicatione et diuisione. ut plene ostend lib. 1. capite de geomet. progress. Vide ergo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Sicut ex additione (in superiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, sic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Est autem 3 exponens ipsius octonarij, et 5 est exponens 32 et 8 est exponens numeri 256. Item sicut in ordine superiori, ex subtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuisione 128 per 8, fiunt 16.

[7]Sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, et infra unitatem finguntur minutiae unitatis, et sicut supra unum ponuntur integra, et infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, et infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre reprœsentari videtur in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni. Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

per due in progressioni aritmetiche corrisponde la moltiplicazione quadrata in quelle geometriche....

4. La divisione eseguita in progressioni aritmetiche corrisponde alle estrazioni di radici nelle progressioni geometriche. [8](STIFEL, *Arithmetica Integra*, p. 86 di [5])

La *Arithmetica Integra* ebbe larga diffusione ed era ritenuta un classico ancora ai tempi di NEPERO che può dunque esserne stato influenzato più o meno direttamente. Sembra accertato che l'opera di STIFEL influenzò lo svizzero BÜRGI che introdusse i logaritmi indipendentemente da NEPERO.

Quanto all'Italia, a Venezia nel 1494 viene pubblicata la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* del francescano Luca PACIOLI (1445-1514) che, benché posteriore di un decennio rispetto alla *Triparty*, può essere considerata a buon diritto il primo trattato a stampa di algebra.

La *Summa* contiene un problema sull'interesse composto la cui risoluzione si lega ai logaritmi in modo intrigante.

A voler sapere ogni quantità a tanto per 100 *l'anno, in quanti anni sarà tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola* 72*, a mente, il quale sempre partirai per l'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sarà raddoppiato. Esempio: Quando l'interesse è a* 6 *per* 100 *l'anno, dico che si parta* 72 *per* 6*; ne vien* 12*, e in* 12 *anni sarà raddoppiato il capitale.* (PACIOLI, *Summa de Arithmetica* in [8], p.163)

Ciò che incuriosisce nella soluzione di PACIOLI è il ruolo, per così dire, universale giocato dal numero 72. Per cercare di comprenderne il significato, Giovanni VACCA osserva in [8] che la soluzione del problema richiede di determinare il numero x che soddisfa l'equazione

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^x = 2$$

una volta che si sia assunto unitario il capitale iniziale e si sia indicato con r il tasso annuo di interesse. Ora, passando ai logaritmi naturali e supponendo r piccolo rispetto a 100 così da render lecita l'approssimazione $\ln(1+x) \approx x$ abbiamo

$$x = \frac{100 \ln\ 2}{r}$$

e 72 rappresenta una stima —non molto accurata, in verità—di $100 \ln\ 2$. Il testo di PACIOLI è molto ellittico ed il metodo seguito per ottenere il numero 72

[8] 1. Additio in Arithmeticis progressionibus respōndet multiplicationi in Geometricis. Vt, sicut in hac Arithmetica progressione, 3.7.11.15 duo termini extremi additi, faciunt quantum medij ad se additi, utrobisque enim fiunt 18. Sic in hac Geometrica, 3.6.12.24. duo extremi inter se multiplicati, faciunt quantum medij inter se multiplicati, utrobisque enim fiunt 72 et sic de infinitis alijs exemplis.

2. Subtractio in Arithmeticis, respondet in Geometricis diuisioni...

3. Multiplicatio simplex (id est, numeri in numerum) quae fit in Arithmeticis, respondet multiplicationi in se, quae fit in geometricis. Vt duplatio in Arithmeticis respondet in Geometricis multiplicationi quadratae....

4. Diuisio in Arithmeticis progressionibus, respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis.

non trovò spiegazione nemmeno tra allievi di PACIOLI come Niccolò TARTAGLIA (1499-1557).

TARTAGLIA si limita a riportare la legge degli esponenti nel suo *General Trattato de' Numeri, et Misure* (1556) ma non introduce, a differenza di STIFEL, gli esponenti negativi: in definitiva non vi è progresso rispetto a quanto noto dall'*Arenario* di ARCHIMEDE.

E se ben te aricordi, di sopra ti ho detto qualmente il numero, considerato secondo se, non è dignità, ma solamente capo e principio di dette dignità, si come che anchora la vnità, considerata secondo se, non è numero, ma solamente principio del numero, adonque non essendo di nulla dignità il numero, gli daremo per suo segno .0. come che in margine si vede, e perché la .cosa. è la prima dignità, gli daremo per suo segno .1. Et perché il censo, è la seconda dignità, gli daremo per suo segno .2. Et così il cubo, è la terza dignità, gli daremo per suo segno .3. et così anchora per il ce.ce. è la quarta dignità, gli daremo per suo segno .4. e così senza che più oltre mi estenda andaremo procedendo di mano in mano nelle altre, come che in margine si vede annotato perfin alla 29 dignità, li quali segni de' numeri sono situati nella continua progressione arithmetica, e le dignità sono situate nella continua proporzionalità geometrica, Et se ben te aricordi nel 8° *libro della* 2^a *parte a carte 131, fu dichiarito nel primo Corollario della* 8^a*, che al multiplicare delle geometrice proportionalità, corrisponde il summare delle arithmetice, E per tanto al multiplicare vna dignità in vn'altra (che sono nella proporzionalità geometrica) corrisponde il sommar di lor segni (che sono nella progressione, ouer proportionalità arithmetica).* (TARTAGLIA, *General Trattato*, pp.564–565 di [9])

Se STIFEL riuscì ad estendere la legge degli esponenti anche a numeri negativi, è nella *Triparty* di CHUQUET che vediamo enunciato un problema (il N. 94), quello della botte, in cui l'idea di logaritmo viene sfiorata.

Una botte si svuota ogni giorno di $1/10$ *della sua capacità; dopo quanto tempo si sarà svuotata per metà?*[9](CHUQUET, *Triparty*, p. 16 di [10])

Oltre all'enunciato del problema, è interessante osservare la presentazione della soluzione *convenzionale* che fa ricorso alla regola del tre. Dopo aver calcolato che che alla fine del sesto giorno la botte contiene 0.531 del contenuto iniziale e che al termine del settimo giorno contiene 0.477 del contenuto iniziale, fatta l'ipotesi che la velocità di fuoriuscita sia costante nel corso del settimo giorno, egli trova la soluzione $6 \cdot \frac{31441}{531441}$ giorni che commenta in questi termini

Di questo procedimento i più saranno contenti. Tuttavia sembra verosimile che si debba cercare un numero proporzionale compreso tra 6 e 7 giorni che, per il momento, ci è sconosciuto.[10] (CHUQUET, *Triparty*, p. 17 di [10]).

L'insoddisfazione di CHUQUET può forse nascere, come suggerisce NAUX —[10], p.17 —dall' aver compreso che la proporzionalità importante nel testo

[9]Un tonneau se vide chaque jour de $1/10^e$ de sa capacité; au bout de combien de temps sera-t-il à moitié vide?

[10]Et de cette manière de faire, plusieurs sont contents. Toutefois, il semble pour le vray que entre 6 jours et 7 jours, l'on doit chercher un certain nombre proportionnel, lequel, pour le moment, nous est inconnu.

non è quella che si riferisce al contenuto residuo nella botte, quanto quella che si riferisce al tempo impiegato da una data frazione di liquido ad uscire dalla botte. Se così fosse, CHUQUET sarebbe andato molto vicino all'idea di logaritmo che un secolo più tardi sarà formalizzata con successo da NEPERO.

Da osservare è anche che CHUQUET presenta due varianti nella soluzione del problema della botte [6]. In una prima versione, suggerisce di assumere che la botte abbia una capacità molto elevata, così da poter con facilità sottrarre da tale numero senza eccessiva fatica la decima parte. In concreto, egli suggerisce di prendere il valore 10000000. Nella seconda versione, inficiata da un errore concettuale che non viene evidenziato dal risultato, la capacità è assunta unitaria. L'idea di prendere numeri molto grandi per effettuare molte divisioni senza l'ingombro della parte decimale, per cui la notazione era problematica all'epoca, è molto vicina alla prassi seguita in trigonometria dove si prendevano cerchi goniometrici di raggio molto grande, così da avere funzioni trigonometriche che, pur dipendendo dal raggio, fossero accurate e non richiedessero la notazione decimale per la parte frazionaria.

1.2 Il peso dei calcoli

Sin qui abbiamo visto diversi matematici afferrare il significato della legge degli esponenti ed il legame tra progressioni aritmetiche e geometriche. Tale legge però viene percepita come un'ammirabile ed anche misteriosa proprietà dei numeri, ma non si traduce in uno strumento utile ai fini pratici. La motivazione alla base della scoperta dei logaritmi ed anche il motivo del loro successo fu la ricerca di efficienti strumenti di calcolo in grado di alleggerire il pesante fardello di cui erano gravati gli astronomi del tempo i quali, per poter predire il corso dei pianeti, si dovevano confrontare con grandi difficoltà di calcolo quali l'effettuazione di moltiplicazioni e divisioni tra numeri con molte cifre, estrazioni di radici quadrate e cubiche. Allo scopo di alleviare gli oneri derivanti dai calcoli, molte tavole numeriche erano state approntate, così come procedimenti *approssimati* per eseguire prodotti ed il ricorso a strumenti *meccanici*. In questa sezione vogliamo percorrere gli sforzi compiuti in questa direzione, concentrandoci sui decenni che precedettero la scoperta di NEPERO.

L'algoritmo di estrazione della radice quadrata è molto oneroso dal punto di vista computazionale. L'astronomo Giovanni Antonio MAGINI (1550-1617) include nell'opera *De Planis Triangulis*, pubblicata a Venezia nel 1592 un capitolo dal titolo *Tavola Tetragonica* dove propone una tavola contenente i quadrati di tutti gli interi compresi tra 1 ed 11000. Nelle intenzioni dell'autore, essa dovrebbe portare aiuto nella risoluzione dei triangoli rettangoli:

Se questa tavola fosse stata pubblicata in quel tempo, avrebbe allontanato da sé la noia ed il sacrificio nel calcolo di quelle tavole.[11] (MAGINI, *De planis Triangulis*, p. 2 di [11])

[11] Si eo tempore nostra haec tabula edita fuisset, facile eum supputandi tabulas illas et molestiam et impensam fuisse aversaturum.

Per capirne l'utilizzo, seguiamo l'esempio riportato da Naux (p.6 di [11]) che propone di trovare il valore numerico di $\sqrt{43}$. Attraverso la *Tavola Tetragonica* si osserva che $(6557)^2 = 42\ 994\ 249$ da cui, dividendo ambo i menbri per 10^6 si ottiene $(6.557)^2 = 42.994\ 249$ per cui 6.557 viene assunto come valore approssimato di $\sqrt{43}$, un valore vicino all'approssimazione 6.5574 presente in tavole moderne e certamente molto più accurato di 6.972, valore ottenuto dalla formula approssimata

$$\sqrt{x^2 + a} \simeq x + \frac{a}{2x}\,.$$

Un altro tipo di tavole *elementari* è quella pubblicata da Hervart von Hohenburg (?-1625) nel 1610. La tavola contiene tutti i prodotti del tipo $n \times m$, con n ed m interi variabili entrambi tra 1 e 999. Ogni pagina delle tavole contiene i multipli di n secondo tutti i numeri interi tra 1 e 999. Nella tabella seguente riportiamo una sintesi della pagina dedicata ad $n = 999$

	0	...	100	...	900	...
1	999	...	100899	...	900099	...
2	1998	...	101898	...	901098	...
3	2997	...	102897	...	902097	...

L'elemento MN contiene il risultato di $999 \times (M + N)$. Così nell'esempio qui riportato, nella terza riga della colonna corrisponedente al numero 100 leggiamo $999 \times (100 + 3) = 102897$. Per illustrare l'impiego di tale tavola supponiamo di voler calcolare il prodotto tra 461 235 987 e 789 654 ([10], p.30). Raggruppando le cifre a gruppi di tre si ottengono della tavole i valori $645\ 498 = 654 \times 987$, $153\ 690 = 654 \times 235$, $301\ 494 = 654 \times 461$ e così via. Il risultato dell'operazione si ottiene sommando i prodotti parziali, posizionati correttamente come qui illustrato:

		461	235	987
			789	654
			645	498
		153	690	
	301	494		
		778	743	
	185	415		
363	729			
364	216	842	078	498

Il vantaggio delle tavole di von Hohenburg ammonta a ridurre *moltiplicazioni* ad *addizioni*, con un non indifferente guadagno di tempo.

Un interessante sistema per semplificare, approssimandola, la moltiplicazione tra due numeri venne proposto da Johannes Kepler (Keplero, 1571-1630) nel 1623. La proposta di Keplero poggia sull'osservazione, riproposta qui in termini moderni, che se si moltiplicano tra loro numeri dotati di un certo numero di cifre significative dopo quella delle unità, la loro moltiplicazione ne conterrà un numero maggiore. Poiché le cifre significative in eccesso non aggiungono nulla alla correttezza del risultato, al contrario il loro inserimento è incoerente,

Keplero propose uno schema che illustriamo sulla moltiplicazione di 4062051×1163818, da intendersi in realtà come il prodotto tra due seni espressi con una precisione di 7 cifre decimali: $0.4062051 \times 0.1163818$ [10].

$$
\begin{array}{r}
4062051 \\
1163818 \\
\hline
4062051 \\
406205 \\
243723 \\
12186 \\
3250 \\
40 \\
32 \\
\hline
4727487
\end{array}
$$

Il procedimento è il seguente. Si moltiplica il moltiplicando per la cifra più a sinistra del moltiplicatore, ottenendo il primo numero sotto la barra. Si ripete la stessa operazione per la seconda cifra del moltiplicatore, trascurando la moltiplicazione per l'ultima cifra del moltiplicando, in quanto questo non dà luogo a riporto e dunque introduce un errore sull'ottava cifra decimale. Si procede di seguito moltiplicando la k-esima cifra del moltiplicatore per il moltiplicando in cui sono trascurate le ultime $k-1$ cifre ma si include solo l'eventuale riporto. Così 6, terza cifra del moltiplicatore, viene moltiplicata per 40620, moltiplicando senza le ultime due cifre, ma tenendo conto solo del riporto: 3. L'errore che si commette in questo caso è inferiore a 10^{-8}.

Una via diversa fu battuta da John Napier (Nepero, 1550-1617) nella *Rabdologia*, opera pubblicata nel 1617 e destinata alla semplificazione delle operazioni elementari. Il procedimento di Nepero consiste nel costruire un certo numero di parallelepipedi (*virgulae numeratrices*) o bastoncini suddivisi in riquadri nei quali sono riportati i multipli di uno degli interi da 1 a 9. All'interno di ciascun riquadro il multiplo è riportato come in figura 1.1, con la cifra delle decine sopra il segmento di diagonale del quadrato riservato al numero e con la cifra delle unità al di sotto.

Sulla faccia opposta del bastoncino compaiono i multipli del complemento a 9 del numero riportato sulla prima faccia.

Per comprendere l'uso dei bastoncini di Nepero, consideriamo come viene effettuato il prodotto tra 357 e 249. Si dispongono i tre bastoncini corrispondenti al 3, al 5 ed al 7 come illustrato in figura 1.2 e si considerano le righe dove sono riportati i multipli secondo 2, 4 e 9. In ciascuna riga, si procede a sommare *in diagonale* le cifre presenti. Nella riga corrispondente a 2 si ottiene, partendo da destra $714 = 357 \times 2$; nella quarta riga si ottiene $1428 = 357 \times 4$ e nella nona $3213 = 357 \times 9$. Sommando i numeri ricavati, con l'accortezza di utilizzare il seguente allineamento, che tiene conto della diverso valore posizionale delle cifre

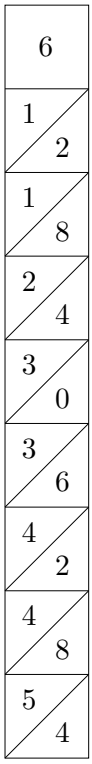

Figura 1.1: Bastoncino di Nepero corrispondente al numero 6.

di 249, si ottiene il risultato corretto 88893.

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & \\ 7 & 1 & 4 & & \\ \hline 8 & 8 & 8 & 9 & 3 \end{array}$$

Il seguente estratto dalla *Rabdologia* ci dà un'idea dello stile di Nepero, sempre attento a chiarire con esempi le regole generali enunciate.

Testo 1.2 (Nepero, *Rabdologia* [12], pp.16–17. Originale 1.4) *Forma grazie ai bastoncini (seguendo la prima regola di questo secondo) uno dei due numeri da moltiplicare (preferibilmente il maggiore): scrivi l'altro fattore sulla carta e traccia una linea sotto di esso. A questo punto, sotto una qualsiasi delle cifre su carta, sia scritto il multiplo [corrispondente] trovato con i bastoncini, che quella cifra indica come quotumo: in modo che le cifre più a destra di ogni multiplo o quelle più a sinistra uguagliate trasversalmente o in modo obliquo una con l'altra si susseguano in quell'ordine con cui si susseguono le cifre che le indicano; una volta disposti i multipli in questo modo, li si sommi in modo*

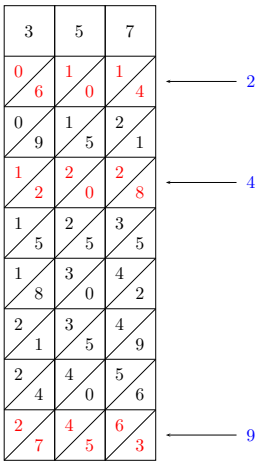

Figura 1.2: Calcolo di 357×249 utilizzando i bastoncini di Nepero. I numeri in rosso contengono i multipli secondo 2, 4, 9 di 3,5,7. Sommati in diagonale forniscono i prodotti parziali $357 \times 2 = 714$, $357 \times 4 = 1428$ e $357 \times 9 = 3213$.

aritmetico; si otterrà il risultato della moltiplicazione. Ad esempio si consideri l'anno del Signore 1615 *da moltiplicare per* 365*. Si componga il primo numero tra i bastoncini ed il secondo sia scritto sulla carta, come qui a fianco. Tabulati il triplo, il sestuplo ed il quintuplo, le cifre vanno riportate nell'ordine con cui sono riportati i numeri 3,6,5, come indicato dai quotumi. Pertanto il triplo del numero 1615 ottenuto dai bastoncini, che è 4845; il sestuplo, che è 9690 ed il quintuplo, 8075, vengano scritti trasversalemente o sotto i loro quotumi 3, 6, 5, o iniziando sotto di essi rispettivamente, come nel primo schema o terminando sotto di essi, come nel secondo. Infatti ciò non ha importanza purché le cifre più a sinistra uguagliate si susseguano nello stesso ordine degli indici o quotumi sopraddetti. Disposti questi multipli con tale ordine, siano sommati aritmeticamente e si ottiene il numero cercato 589475, risultato della moltiplicazione.*

I due allineamenti cui fa riferimento Nepero nel frammento ora riportato sono i seguenti

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & 6 & 5 & & & \\
\hline
4 & 8 & 4 & 5 & & \\
 & 9 & 6 & 9 & 0 & \\
 & & 8 & 0 & 7 & 5 \\
\hline
5 & 8 & 9 & 4 & 7 & 5
\end{array}
$$

Nepero ha reso meccanica una tecnica di moltiplicazione nota da tempo, la moltiplicazione *a graticcio* o *a gelosia*, dalla struttura degli scuri in uso a

Venezia, in quanto furono proprio i mercanti veneziani ad importare questa tecnica in occidente. Grazie all'uso dei bastoncini, NEPERO ha ridotto l'onere di *moltiplicare* due numeri a quello, molto meno gravoso, di *sommarli*.

Uno strumento sistematico utilizzato in trigonometria per la riduzione di prodotti a somme è costituito dalle formule di *prostaferesi*, scoperte dall'astronomo arabo EBN-JOUNIS (950-1009) ed utilizzate per primo nel mondo latino dall'astronomo danese Ticho BRAHE (1546-1601), presso cui lavorò come assistente KEPLERO. La tipica formula di prostaferesi

$$\sin\alpha \ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

evidenzia l'economia di calcolo apportata, vista la possibilità di ridurre la moltiplicazione tra due numeri a molte cifre "decimali"—7 o 8 in genere— all'addizione di due numeri. Non è chiaro se BRAHE abbia riscoperto le formule di prostaferesi, oppure se ne sia giunto a conoscenza da uno dei numerosi contatti che l'occidente ebbe con il mondo arabo. È certo che egli non si curò affatto di divulgare la notizia, quanto piuttosto di custodirla gelosamente, visto il vantaggio di posizione che gli offriva rispetto agli altri astronomi. Fu solo nel 1611 che le formule di prostaferesi comparvero a stampa in un'opera dell'astronomo ed orientalista tedesco Jakob CHRISTMANN (1554-1613) sotto il nome di "Prostaphéresi Werneriana" dal nome del sacerdote tedesco Johannes WERNER (1468-1528).

È interessante riportare un estratto dell'opera di CHRISTMANN come riprodotto da NAUX per comprendere come venivano enunciate le formule all'epoca

Somma e sottrai la latitudine della stella alla massima declinazione del sole: e di entrambi gli archi, la somma e la differenza, prendi il seno. Aggiungi il seno minore al maggiore; la loro somma divisa per due dà il secondo numero nella regola delle proporzioni. Come primo numero nella regola delle proporzioni considera il seno totale.[12] (cf. p. 31 di [10]).

Per il seguito della storia, è bene soffermarsi alquanto su alcuni punti. Anzitutto occorre capire che cosa è il *sinus totus*. In termini moderni sarebbe $\sin\frac{\pi}{2}=1$, cioè il massimo assoluto della funzione seno. All'epoca però non si utilizzava la circonferenza trigonometrica di raggio unitario, in quanto questo rende le funzioni trigonometriche seno e coseno numeri inferiori all'unità per i quali, come già ricordato più volte, *non* esisteva una notazione comoda. Si preferiva allora lavorare su un cerchio di raggio molto grande, tipicamente $R=10^7$ cosicché, ad esempio, $\sin\frac{\pi}{4}=R\frac{\sqrt{2}}{2}=7071067...$ diventa un numero a *sette* cifre e la potenza di 10 scelta per il valore di R diventa il grado di accuratezza con cui le funzioni trigonometriche sono valutate.

Il secondo punto importante è che le regole trigonometriche–piana o sferica–venivano enunciate in termini di *Proporzioni*, come nell'esempio seguente:

[12] Latitudinem stellae adde et subtrahe maximae solis declinatio: et utriusque arcus, tam compositi, quam residui accipe sinuum. Sinu minorem adde majori; et semissis agregati dabit secundum numerum in regula proportionum. Pro primum autem numero regulae propotionis adhibe sinum totum

Trovare la declinazione del sole, assegnate la massima obliquità dell'eclittica e la distanza del sole dall'equinozio più vicino. Come il seno totale sta al seno della distanza dall'equinozio più vicino, così il seno della massima obliquità. Al seno della declinazione richiesta.[13] (cf. p.31 di [10]).

Tradotto in termini più formali,

$$\frac{R}{\text{seno della distanza}} = \frac{\text{seno della obliquità massima}}{\text{seno della declinazione incognita}}$$

da cui, posto $a :=$ seno della distanza, $b :=$ seno della obliquità massima ed $x :=$ seno della declinazione incognita vediamo che $x = ab/R$ e dunque le formule di prostaferesi, riducendo il prodotto ab ad una somma, consentivano un alleggerimento notevole dei calcoli, almeno quando le proporzioni hanno il seno totale come primo termine e presentano solo la funzione trigonometrica seno negli altri termini. Una generalizzazione dell'approccio alle formule di prostaferesi tale da renderle efficaci quando queste condizioni non si presentavano fu introdotto da dal gesuita tedesco Cristhoph Clavius (1538-1612) e rappresentano il contributo più elevato alla semplificazione dei calcoli trigonometrici prima dell'avvento dei logaritmi.

1.3 Testi originali

Testo 1.3 *(Erasmo* Erizio*, Musica Speculativa, 1498)* Sunt ergo quinque genera proportionum, scilicet, Multiplex, Superparticulare, Superpartiens, et haec tria sunt simplicia, genera. Dehinc multiplex superparticulare, et multiplex superpartiens, et haec duo sunt composita. (...) Multiplex est quando maior numerus continet minorem numerum multotiens praecise. ut binarius continet unitatem bis. quare proportio dupla. Quaternarius vnitatem quater, quare Quadrupla, et Ternarius ter, et cetera. Superparticulare vero est quando maior numerus continet minorem semel, et aliquam eius partem. Cuius species sunt, sesquialtera, sesquitertia, sesquiquarta, sesquiquinta, et cetera. Sesquialtera est, quando maior numerus continet minorem semel, et alteram eius partem, scilicet medietatem, ut tria ad duo. Sesquitertia vero, quando maior numerus continet minorem semel, et eius tertiam partem, ut quatuor ad tria. Superpartiens est quando maior numerus continet minorem semel, et aliquas eius partes, cuius species sunt superbipartiens, supertripartiens. Superbipartiens species est, quando maior numerus continet minorem semel, et duas eius partes, ut quinque ad tria. Quoniam Quinarius continet ternarium semel cum duabus tertijs. Supertripartiens est, quando maior numerus continet minorem semel cum tribus eius partibus, sicut septem ad quatuor, nam septem continet in se quaternarium semel cum tribus quartis. Multiplex superparticulare est quando maior numerus continet minorem multotiens, cum aliqua parte, Cuius species sunt dupla sesquialtera, dupla sesquitertia, Tripla sesquialtera, Tripla sesquitertia.

[13] Dates maxima obliquitate Eclipticae, et distantia Solis a proximo Aequinoctio, invenire ejus declinationem. Ut sinus totus. Ad sinum distantiae a proximo aequinoctio, ita Sinus maximae obliquitatis. Ad sinum declinationis quaesitae.

Dupla sesquialtera est, quando maior numerus continet minorem bis, et alteram eius partem, sicut quinque ad duo, quia quinarius continet Binarium bis cum una medietate. Multiplex superpartiens est, quando maior numerus continet minorem multotiens cum aliquibus partibus. Cuius species sunt, dupla superbipartiens, Dupla supertripartiens, et cetera. uel tripla superbipartiens, tripla supertripartiens. Dupla superbipartiens est quando maior numerus comprehendit minorem bis, cum duabus partibus, ut octo, ad tria. Quia octo comprehendit tria bis cum duabus tertijs, et sic de singulis speciebus fiat operatio. Et cognoscitur proportio hoc modo. Nam si propositi sunt quot libet numeri, si fuerint adinuicem aequales, erit proportio aequalitatis, ut dicendo, duo, et duo, tria, et tria. Si uero fuerin inaequales, Diuidatur maior per minorem, et Quotiens est denominatio proportionis, ut si diuiserimus .8. per .3. erit quotiens .2. cum duabus tertijs. Quare erit proportio dupla superbipartiens. Item si diuisero .6. per .2. proueniunt tria in Quotiente. ergo proportio tripla. et sic fiat operatio in omni specie cuiuslibet generis.

Testo 1.4 *(*Nepero*,* Rabdologia *[12], pp.16–17)* Numerorum itaque invicem multiplicandorum alterutrum (praesertim maiorem) inter Virgulas (per primam secundi hujus) constitue: alterum in charta scribe, ducta infra illum linea. Deinde sub qualibet figura chartae, scribatur multiplum illud inter Virgulas repertum, quod figura illa tamquam quotumus denominat: ita ut dextimae omnium multiplorum notae, vel sinistimae aequatae decussatim seu oblique altera alteram eo ordine sequantur, quo figurae illae denominantes illa; sic disposita multipla Arithmetice addantur; proveniet multiplicationis productum. Ut sit annus Domini 1615 per 365 multiplicandus. Numerus ille in tabulam redigatur, hic in charta statuatur ut a margine. Tabulati numeri triplum, sextuplum et quintuplum ordine sumenda esse figurae numeri in charta scripti 3,6,5, tamquam quotumi indicant. Triplum itaque numeri 1615 quod e Virgulis scribitur est 4845; sextuplum quod est 9690, et quintuplum, 8075, decussatim scribantur sub suis quotumis 3, 6, 5, sive sub eis respective incipiendo, ut in primo Schemate, sive desinendo, ut in secundo. Non enim refert, modo sinistimae figurae aequatae eodem ordine decussatim progrediantur, quo dicti indices seu quotumi. His multiplis ita ordine dispositis, addentur eadem Arithmetice, et proveniet 589475, numerus optatus, et ex multiplicatione productus.

Bibliografia

[1] F. Cajori: *History of Mathematical Notations I. Notations in Elementary Mathematics.* Open Court, La Salle, Illinois (U.S.A.), (1974); ristampa dell'originale pubblicato nel 1928 dalla stessa casa editrice.

[2] Archimede *Opere*, a cura di Attilio Frajese. UTET, Torino (1974).

[3] P. Delsedime: L'infini numérique dans l'Arénaire d'Archimède. *Arch. Hist. Exact Sciences* **6**, 345–359, (1970).

[4] C.G. Knott (curatore): *Napier Tercentenary Memorial Volume* Longmans, Londra, (1915).

[5] D.E. Smith: The law of exponents in the works of the sixteenth century. In [4], pp. 81-91.

[6] G. Flegg, C. Hay, B. Moss: *Nicholas Chuquet, Renaissance Mathematician.* D. Reidel, Dordrecht, (1984).

[7] A. Aubry: Les logarithmes avant Neper. *L'Enseignement Mathém.* **8**, 417–432, (1906).

[8] G. Vacca: The first Napierian logarithm calculated before Napier. In [4], pp. 163-164.

[9] A. Marre: Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la Science des Nombres. *Bull. Bibl. e di St. d. Sc. Mat. e Fis.* (Boncompagni) **13**, 555–659; 693–814, (1880).

[10] C. Naux: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler. Tome I. La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables.* Blanchard, Parigi, (1966).

[11] I. A. Magini: *De Planis Triangulis. Liber Unicus.* Ciotti, Venezia, (1592).

[12] I. Neper: *Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas.* Fac-simile dell'originale del 1617, O. Zeller, Osnabrück, (1966).

Capitolo 2

John Napier

2.1 Cenni biografici

John Napier (Nepero), primo dei tre figli di Archibald e Janet Bothwell nacque nel 1550 a Merchiston, nei pressi di Edimburgo, ed ivi morì il 3 o 4 aprile 1617 [2, 3]. Apparteneva ad una nobile famiglia scozzese le cui origini risalivano al XIV secolo ed i cui membri avevano ricoperto incarichi prestigiosi nella pubblica amministrazione dalla prima metà del XV secolo. Nel 1438 Alexandre Napier, sindaco (*provost*) di Edimburgo, acquistò la tenuta di Merchiston da Giacomo I. Nel 1563 John, settimo discendente in linea diretta di Alexandre rimase orfano di madre ed il padre, che era responsabile della Zecca di Stato, si risposò con Elisabeth Mowbray nel 1571 da cui ebbe altri dieci figli con i quali John avrebbe avuto attriti in seguito, circa l'eredità paterna. Nell'anno della morte della madre, John iniziò gli studi universitari a St. Andrews, presso il St. Salvator College. Non è chiaro se egli abbia terminato gli studi ma pare plausibile che abbia trascorso dei periodi di studio all'estero. Nepero ebbe due mogli: la prima, Elisabeth Stirling, sposata sul finire del 1572 o all'inizio del 1573, morì nel 1579 lasciandogli due figli. Dal secondo matrimonio con Agnes Chisholm nacquero altri dieci figli.

Il primo interesse di Nepero fu lo studio della teologia. Si trovò coinvolto nelle aspre polemiche tra cattolici e protestanti presbiteriani e fu un acceso sostenitore della causa della chiesa riformata scozzese, guidata da John Knox. Il suo temperamento forte e la sincera fede lo spinsero a scrivere nel 1593 un testo di commento all'Apocalisse di S. Giovanni Apostolo dal titolo *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* nella quale la vena polemica contro il papato raggiungeva il suo culmine quando Nepero cercava di mostrare come *Babilonia, la grande, la madre delle prostituzioni e delle abominazioni della terra* (Ap. 17, 5) fosse da identificare con Roma, sede del papato, responsabile del traviamento della genuina fede cristiana. Benché fosse un argomento diffuso in campo protestante, il metodo di indagine adottato rende l'impianto del trattato simile a quello di un testo di matematica, con assiomi che poggiano sulla sacra

pagina analizzata con gli strumenti della logica deduttiva (*cfr.* [4], pp.36-37). Il volume ebbe una eco molto vasta, al punto che, dalla prima pubblicazione al 1645, ne apparvero cinque edizioni in inglese, mentre tre edizioni in olandese furono date alle stampe tra il 1600 ed il 1607, nove in francese tra il 1602 ed il 1607 e quattro in tedesco, tra il 1611 ed il 1627. Presso i suoi contemporanei NEPERO ebbe ampio riconoscimento come teologo prima che come matematico. Bisogna anche considerare che il commento all'Apocalisse di NEPERO fu dato alle stampe in un periodo tumultuoso per la storia di Scozia, nel momento in cui sembrava prossima l'invasione del paese da parte delle truppe di FILIPPO II di Spagna, che si prefiggeva di conquistare l'intera isola britannica. Il partito protestante fece pressione perché GIACOMO VI si decidesse in favore del protestantesimo, ma l'atteggiamento opportunista di quest'ultimo che mirava alla conquista del trono inglese con l'aiuto di protestanti o cattolici, non importava, forse fu alla base del cambiamento di interessi che portò NEPERO a privilegiare gli studi matematici, verso i quali aveva già manifestato attitudine prima del 1600, tanto che un tal John STRENE, nell'introduzione del suo *De verborum significatione* ne parla come di un

Gentleman of singular judgement leerning especially in mathematic sciences. ([4], p.36).

2.2 L'opera matematica

L'opera matematica di NEPERO è quantitativamente limitata, essendo composta da quattro brevi monografie, due delle quali apparse postume e due pubblicate nei suoi ultimi anni di vita. Le opere non collegate ai logaritmi sono il trattato *De Arte Logistica*, pubblicato postumo nel 1839 sulla base della trascrizione effettuata da Robert NAPIER, il figlio di John che curò l'eredità scientifica del padre, e la *Rabdologia*, pubblicata nel 1617. I logaritmi formano l'oggetto della *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, pubblicata nel 1614, e della *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, pubblicata da Robert NAPIER postuma nel 1619. Prima di addentrarci in queste ultime opere, diamo un cenno al contenuto degli altri trattati. Il *De Arte Logistica* tratta di matematica elementare e si compone di due parti, la prima delle quali formata da tre libri: *De Computationibus*, in 8 capitoli, che occupa 26 pagine; *De Logistica Arithmetica*, in 15 capitoli svolti in 55 pagine ed il capitolo incompleto *De Logistica Geometrica* che si sviluppa in sole 6 pagine. La seconda parte consta di due libri, il primo dei quali è articolato in 17 capitoli che si snodano per 25 pagine ed è intitolato *De Nominata Algebrae parte* mentre il secondo, dal titolo *De positiva sive cossica algebrae parte* è incompleto ed è formato da 46 pagine suddivise in 10 capitoli (*cfr.* [5], p.146). Tra i vari temi esposti nel trattato, ricordiamo un metodo per approssimare radici quadrate basato sulle disuguaglianze

$$a + \frac{b}{2a+1} \leq \sqrt{a^2+b} \leq a + \frac{b}{2a}$$

valide per numeri a e b positivi. Inoltre, va rilevata una certa familiarità di NEPERO con i numeri immaginari, introdotti nel *De Logistica Geometrica* (per un resoconto più dettagliato rimandiamo il lettore a [5]).

Abbiamo già fatto cenno nel Capitolo 1 alla *Rabdologia* per la costruzione dei bastoncini od ossa di NEPERO destinati ad automatizzare diversi passaggi intermedi nelle operazioni elementari. Oltre alla moltiplicazione già accennata, i bastoncini sono applicati per semplificare divisioni ed estrazioni di radici, quadrate o cubiche. Non possiamo addentrarci in una descrizione più approfondita dell'opera, ma ci limitiamo a segnalare due aspetti importanti. Il primo riguarda l'introduzione del punto di separazione tra parte intera e parte decimale di un numero. Nel Capitolo IV del primo Libro NEPERO, ottenuto come risultato di una divisione il numero $1993\frac{118}{432}$, aggiunge la seguente *Admonitio pro Decimali Arithmetica*

In verità, qualora non piacciano queste frazioni, in cui capitano denominatori diversi, per la difficoltà di operare con loro e siano più congeniali le altre i cui denominatori sono sempre parti decime, centesime, millesime, ecc. che il dottissimo matematico Simon Stevin nella sua ARITMETICA Decimale indica in questo modo e chiama 1 le prime, 2 le seconde, 3 le terze: poiché queste frazioni danno la stessa facilità di operare propria dei numeri interi potrai, terminata la divisione comune e delimitato il risultato con un punto o una virgola (come qui a margine), aggiungere al dividendo, o uno zero per i decimali o due per i centesimi e tre per i millesimi, o altri ancora di seguito, a piacere: e ripetendo con essi il procedimendo di sopra, come nell'esempio di prima ripetuto qui (cui abbiamo aggiunto tre zeri) si otterrà il quoziente 1993,273 che significa: 1993 interi e 273 millesimi, o $\frac{273}{1000}$*, o (da Stevino) 1993, 2' 7" 3"'.*[1] (NEPERO, *Rabdologia*, pp. 21-22)

Notiamo che nell'originale compare la parola *cyphra* che traduce l'arabo *sifr* con cui si indicava lo zero e che il punto o virgola di separazione decimale trova posto nella accezione attuale. La notazione di NEPERO, tuttavia, non riuscì a far breccia ed occorrerà ancora più di un secolo prima che trovi completa accoglienza. L'oscillazione tra punto o virgola di separazione (*periodis aut commatibus*), sarebbe rimasta a lungo anche quando, nel XVIII secolo, la notazione decimale era ormai universalmente adottata. Così in generale il punto di separazione tra parte intera e decimale di un numero rimase nell'uso dei paesi anglosassoni, mentre l'uso della virgola separatrice prevalse in Europa continentale: dapprima in Germania, Francia e Spagna e, con più fatica, in Belgio ed Italia. Riman-

[1] Verum si displiceant hae fractiones, quibus accidunt diversi denominatores, propter difficultatem operandi per eas, et magis arrideant aliae, quarum denominatores sunt semper partes decimae, centesimae, millesimae, etc. quas doctissimus ille Mathematicus Simon Stevinus in sua Decimali ARITHMETICA sic notat, et nominat 1, primas, 2 secundas, 3 tertias: quia in his fractionibus eadem est facilitas operandi quae est integrorum numerorum, poteris post finitam vulgarem divisionem, et periodis aut commatibus terminatam, (ut hic in margine) adiicere dividendo, aut reliquiis unam cyphram pro decimis, duas pro centesimis, et tres pro millesimis, aut plures deinceps ad libitum: et cum his procedere operando ut supra, veluti in superiore exemplo hic repetito (cui tres cyphras adiecimus) fiet quotiens 1993,273: qui significat 1993 integra: et 273 millesimas partes, seu $\frac{273}{1000}$, seu (ex Stevino) 1993, 2' 7" 3"'.

diamo il lettore interessato ad approfondire questi aspetti sulle notazioni alla monografia di Florian Cajori [6], §§276 – 289.

Le opere che hanno costituito un autentico *breakthrough* ed hanno assicurato a NEPERO un posto di prima grandezza nella storia della matematica sono le monografie in cui introduce i logaritmi, la *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* e la *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio.* NEPERO lavorò ai logaritmi per circa venti anni, prima che la teoria assumesse l'aspetto definitivo presentato in queste opere pubblicate quando egli era prossimo alla morte o addirittura postume. La lunga gestazione della teoria dei logaritmi è testimoniata da due documenti. In una lettera del 1594, KEPLERO informa Ticho BRAHE di aver saputo da uno scozzese—verosimilmente Thomas CRAIG, amico della famiglia di NEPERO—che c'erano speranze per una notevole semplificazione delle procedure di calcolo in uso in astronomia (*cfr.* p. 13 di [7]). Il secondo documento si trova nell'epistola dedicatoria della *Rabdologia* dove NEPERO si rivolge al destinatario della dedica, Alexander SETON, in questi termini

O illustrissimo signore, mi sono sempre sforzato al meglio delle forze e dell'ingegno di eliminare la difficoltà e la lunghezza del calcolo, la cui noiosità riesce spesso a respingere molti dallo studio della Matematica. E a questo scopo negli scorsi anni ho curato l'edizione del canone dei Logaritmi elaborato da tanto tempo che, lasciati da parte i numeri naturali e le operazioni che per loro tramite riescono piuttosto difficili, le sostituisce con facili ed altrettanto valide addizioni, sottrazioni, divisioni per due e per tre. Di questi logaritmi abbiamo trovato un'altra specie molto più utile ed abbiamo deciso di rendere noto un metodo per ottenerli insieme a regole d'uso (se Dio ci concederà una vita abbastanza lunga e un buono stato di salute): tuttavia, a causa della salute inferma, abbiamo lasciato il calcolo di un nuovo canone ad un uomo versato in questo genere di studio: in primo luogo al dottissimo Sig. Henry Briggs, pubblico professore di Geometria a Londra e mio carissimo amico da molto tempo.[2] (NEPERO, *Rabdologia*, pp.1-2 di [8].)

L'espressione qui sottolineata (nell'originale: *a me longo tempore elaboratum*) testimonia la lunga gestazione dei logaritmi. Il brano appena riportato è interessante per l'accenno al progressivo deteriorarsi della salute di NEPERO—soffriva di gotta—che gli impedì di migliorare il sistema di logaritmi trovato e per il riferimento ad Henry BRIGGS (1561-1630) che raccolse per così dire il testimone ed alla cui opera dedicheremo il prossimo capitolo.

[2]Difficultatem et prolixitatem calculi (Vir Illustrissime) cujus taedium plurimos a studio Mathematum deterrere solet, ego semper pro viribus, et ingenii modulo conatus sum e medio tollere. Atque hoc mihi fine proposito, Logarithmorum canonem a me longo tempore elaboratum superioribus annis edendum curavi, qui rejectis naturalibus numeris, et operationibus quae per eos fiunt, difficilioribus, alios substituit idem praestantes per faciles additiones, subtractiones, bipartitiones, et tripartitiones. Quorum quidem Logarithmorum speciem aliam multo prestantiorem nunc etiam invenimus, et creandi methodum, una cum eorum usu (si Deus longiorem vitae et valetudinis usuram concesserit) evulgare statuimus: ipsam autem novi canonis supputationem, ob infirmam corporis nostri valetudinem, viris in hoc studii genere versatis reliquimus: imprimis vero doctissimo viro D. Henrico Briggio Londini publico Geometriae professori et amico mihi longe charissimo

La *Descriptio* è un'opera snella, formata da 57 pagine di testo e 90 di tavole. NEPERO spiega l'idea di logaritmo, ne illustra le proprietà e le applicazioni alla risoluzione dei triangoli sferici, mentre nelle tavole fornisce i logaritmi per il seno degli angoli da 0° sino a 90°, ad intervalli di un minuto di arco e con una precisione di sette od otto cifre. In ogni pagina sono appaiati, per un dato arco, il logaritmo del suo seno e del suo coseno, nonché la loro differenza, vale a dire il logaritmo della tangente trigonometrica dell'angolo. La *Descriptio* non contiene peraltro alcuna indicazione sul metodo seguito da NEPERO per costruire le tavole. La motivazione esposta in una *Admonitio* al termine del Capitolo II della *Descriptio* è che in questo modo gli invidiosi non possono denigrare le tavole, mentre chi vuole trarne profitto ha abbastanza elementi per apprezzare le potenzialità del metodo.

Lascio ad un tempo più opportuno l'esposizione della teoria alla costruzione ed all'uso dei logaritmi che ho omesso qui affinché la si possa gustare di più dopo averne apprezzato l'uso e l'utilità o la si seppellisca in silenzio se questi non saranno apprezzati. Mi sono affrettato a sottoporre queste [le applicazioni] al giudizio ed alla censura degli eruditi prima del resto [la teoria] per il timore di esporla alle critiche malevole degli invidiosi.[3] (NEPERO, *Descriptio*, p. 296 di [9])

NEPERO è consapevole della facilità con cui gli errori possono annidarsi nella compilazione delle tavole soprattutto quando, come nel suo caso, il compilatore non disponga di controlli fatti da altri.

Darò forse a breve, a Dio piacendo, la motivazione ed il modo o per emendare questo canone o per costruirne daccapo un altro migliore, in modo che possa venire alla luce più limato ed accurato grazie alla diligenza di più compilatori, rispetto a quanto poté scaturire dall'opera di uno solo.[4] (NEPERO, *Descriptio*, riportato a p. 187 di [10])

Il metodo seguito per ottenere le tavole è spiegato nei dettagli nella *Constructio*, pubblicata postuma da Robert NAPIER nel 1619. Come stesura, la *Constructio* precede la *Descriptio* come è anche dimostrato dal fatto che i logaritmi sono chiamati *numeri artificiales* nella *Constructio* e non come *logarithmi*, espressione che ricorre in tutta la *Descriptio*.

Pertanto (o lettore benevolo) in questo libretto tu trovi spiegata in ogni dettaglio la dottrina necessaria alla costruzione dei logaritmi (che questo trattato chiama qui numeri artificiali dal momento che mio padre lo aveva scritto un certo numero di anni prima di coniare il termine logaritmo).[5] (Robert NAPIER, p.4 di [11])

[3] In tempus magis idoneum doctrinam constructionis logarithmorum transilientem ad eorum usum properare, ut praelibatis prius usu et rei utilitate cetera aut magis placeant posthac edenda, aut minus saltem displiceant, silentio sepulta. Praestolari enim eruditorum de his judicium et censuram, priusquam cetera, in lucem temere prolata, lividorum detractioni exponantur.

[4] Dabo fortasse brevi (Deo aspirante) rationem ac methodum aut hunc canonem emendandi, aut emendatiorem de novo condendi, ut ita plurium Logistarum diligentia, limatior tandem et accuratior, quam unius opera fieri potuit, in lucem prodeat.

[5] Habes igitur (Lector benevole) in hoc libello, doctrinam constructionis Logarithmorum (quos hic numeros artificiales appellat hunc etiam tractatum, ante inventam Logarithmorum

2.3 Che cosa è un logaritmo neperiano?

Il titolo di questa sezione non vuol essere una oziosa provocazione ma richiama un lavoro [12] in cui Raymond AYOUB ricostruì la strategia di NEPERO per definire i logaritmi, mostrandone la distanza, per definizione e proprietà, dai logaritmi come li conosciamo oggi. Qual è l'origine del termine logaritmo? NEPERO non ne parla e vi sono due scuole di pensiero. La prima ha origine con KEPLERO, che traduce logaritmo con *misura di rapporti* (*ἀριθμος τῶν λογῶς*), e viene ripresa da Nicoluas MERCATOR all'inizio della *Logarithmotechnia*, dove leggiamo

La parola logaritmo è un vocabolo composto, formato da ragione e numero, come se fosse il numero di ragioni; ciò che si accorda bene con la realtà.[6] (MERCATOR, *Logarithmotechnia* p. 1 [13])

La seconda interpretazione risale ad un lavoro di MATZKA del 1860 che fa risalire il termine logaritmo all'accostamento di *λογιστικός ἀριθμος* dove *λογιστικός* fa riferimento alla *logistica* che già ai tempi di PLATONE designava la scienza del calcolo, per distinguerla dall'aritmetica o teoria dei numeri [14].

Per quanto criticata, la prima definizione appare naturale pensando alla *ragione* delle progressioni aritmetiche e geometriche che sono alla base della costruzione di NEPERO.

Per comprendere il senso della definizione, occorre esaminare in dettaglio il procedimento di NEPERO. Nella *Descriptio*, la teoria dei logaritmi occupa poche pagine e si articola attraverso una successione di definizioni e corollari, come qui illustrato.

Testo 2.1 (*Descriptio*, in [9] pp.295-296. Originale 2.2) Def. 1. *Si dice che una linea cresce in modo uniforme quando un punto che la descrive si sposta di spazi uguali in tempi uguali.*

Cor. *Pertanto occorre che quantità equidifferenti vengano prodotte da questo incremento in tempi equidifferenti.*

Def. 2. *Si dice che una linea decresce proporzionalmente in una più breve quando un punto che si muove su di essa stacca in tempi uguali dei segmenti che sono in proporzione continuata con i segmenti da cui sono staccati.*

Cor. *Pertanto segue che questo incremento deve lasciare, in tempi uguali, segmenti proporzionali nello stesso rapporto.*

Def. 3. *Le quantità irrazionali (surdae) ovvero non esprimibili tramite un numero si dicono essere definite da numeri alquanto vicini quando sono definite da numeri grandi (numeris majusculis) che differiscono dai veri valori degli irrazionali al più per un'unità.*

Def. 4. *Due moti sono detti sincroni quando hanno luogo nello stesso tempo ed insieme.*

---

vocem, apud se pro aliquot annos conscriptam habuerat) copiosissime explicata.

[6] Logarithmus composito vocabulo dicitur a ratione et numero, quasi rationum numerus; id quod plane cum re consentit.

Def. 5. *Dal momento che è possibile un moto più veloce ed uno più lento di un moto arbitrario, ne consegue che è possibile assegnare un moto con la stessa velocità (aequiveloce) di un moto assegnato.*

Def. 6. *Così il logaritmo di un seno qualunque è quel numero che definisce quanto meglio possibile la linea che cresce in modo uniforme, mentre la linea del seno totale decresce in modo proporzionale fino a quel seno, nell'ipotesi che i due moti siano sincroni ed inizialmente equiveloci.*

Cor. *Da ciò segue che il logaritmo del seno totale 10000000 è nullo o 0, ed ancora che i logaritmi di tutti i numeri maggiori del seno totale sono minori di zero.*

Prop. 1. *I logaritmi di numeri o quantità proporzionali sono equidifferenti.*

Propp. 2 & 3. *Dati tre numeri in proporzione, il doppio del logaritmo del secondo o medio, diminuito del (logaritmo del) primo è uguale al (logaritmo del) terzo, e il doppio (del logaritmo) del secondo è uguale alla somma (dei logaritmi) degli estremi.*

Propp. 4 & 5. *Dati quattro numeri in proporzione, la somma dei logaritmi del secondo e del terzo termine, diminuita del (logaritmo del) primo, è uguale (al logaritmo del) quarto, e la somma (dei logaritmi) dei medi è uguale alla somma (dei logaritmi) degli estremi.*

Prop. 6. *Il triplo del logaritmo di uno qualsiasi dei medi di quattro numeri in proporzione continuata è uguale alla somma (del logaritmo) dell'estremo lontano e del doppio (del logaritmo) dell'estremo vicino.*

La Definizione 3 merita un commento. Le *quantitates surdae* sono i numeri irrazionali. L'aggettivo *surdus* è la traduzione del greco *άλογος* impiegata negli *Elementi* di Euclide (325 A.C.- 265 A.C). Nepero afferma che i numeri irrazionali possono essere stimati (*definiri*) con numeri grandi (*numeri majusculi*) che differiscano tra loro per un'unità. Nella spiegazione allegata egli considera il *sinus totus* pari a $R = 10000000$ e stima il seno di $45°$, cioè $R\frac{\sqrt{2}}{2}$, ricorrendo ai *grandi* numeri 7071067 e 7071068 che differiscono per un'unità.

La definizione dei logaritmi è *cinematica* e poggia su due moti, il primo dei quali (Definizione 1) è uniforme. Nella *Constructio*, Nepero parla di moto a crescita aritmetica:

Crescere in modo aritmetico significa aumentare della stessa quantità in tempi uguali.

Si consideri allora una semiretta spiccata dal punto fisso b verso d sulla quale si muova, da b a d un punto a, con legge tale che in intervalli di tempo uguali vengano percorsi uguali spazi che sono $b1$, 12, 23, 34, 45, *&c. Affermo che l'incremento* $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$, *&c. è detto aritmetico. Tradotto in numeri, siano* $b1\,10$:, $b2\,20$:, $b3\,30$:, $b4\,40$:, $b5\,50$. *Dico che 10, 20, 30, 40, 50, &c. crescono in modo aritmetico: perché si vede che crescono di dieci in intervalli temporali uguali.* (Nepero, *Constructio* [11], §23, p.12.)[7]

[7] Arithmetice crescere, est aequalibus temporibus aequali semper quantitate augeri.

Ut ex puncto b fixo versus d, infinite producatur linea: in qua, ex b versus d procedat punctus a, movens ea lege, ut aequalibus temporis momentis aequalibus feratur spatiis: quae sint $b1$, 12, 23, 34, 45, &c. Dico hoc incrementum per $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$, &c. Arithmeticum

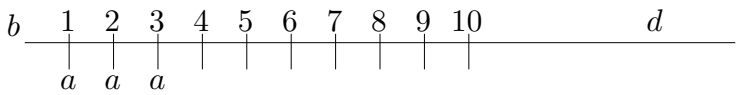

Figura 2.1: Il moto aritmetico introdotto da NEPERO.

La natura del secondo moto utilizzato da NEPERO è chiarita nel seguente passaggio[8]

Decrescere in modo geometrico significa diminuire in tempi uguali di una parte sempre proporzionale, dapprima a tutta la quantità e in seguito alle parti via via rimanenti.

Sia dunque TS il segmento del seno totale su cui si muove il punto G, da T ad 1 verso S, e la distanza da T ad 1 sia, ad esempio, la decima parte di TS. Nello stesso tempo impiegato per spostarsi da T in 1, G si muove da 1 in 2, con (il segmento 12) che è la decima parte di $1S$: e da 2 a 3, decima parte di $2S$: e ad 3 a 4, decima parte di $3S$, & così via. Affermo che i seni TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, &c. sono detti decrescere in modo geometrico, perché diminuiscono in tempi uguali di quantità diverse ma simili in proporzione. In numeri, sia TS, 10000000: $1S$, 9000000: $2S$, 8100000: $3S$, 7290000, $4S$, 6561000, &c. Dico che questi valori di seni, che diminuiscono in proporzione simile in tempi uguali, decrescono in modo geometrico.[9](NEPERO, *Constructio* [11], §24, pp.12-13)

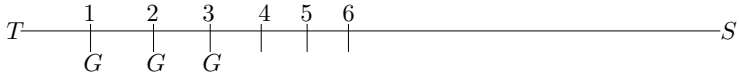

Figura 2.2: Il moto geometrico introdotto da NEPERO.

Come anche chiarito dall'esempio numerico, in questo moto il mobile G descrive, in un dato intervallo di tempo, distanze che stanno in rapporto costante con la distanza che resta da percorrere sul segmento finito ST. Dunque, se in un certo intervallo temporale viene percorso $T1 = (1/10)TS$, nell'intervallo

---

dici. In numeris autem sint $b1$ 10 :, $b2$ 20 :, $b3$ 30 :, $b4$ 40 :, $b5$ 50. Dico 10, 20, 30, 40, 50, &c. arithmetice crescere: quia aequalibus momentis aequali numero denarij semper augeri intelliguntur.

[8]Nel libro *De Triplici Motu* (1509) il portoghese Alvaro THOMAS aveva suddiviso un segmento in parti che rappresentavano i termini di una progressione geometrica. NEPERO non menziona però questo testo.

[9]Geometrice decrescere, est aequalibus temporibus quantitatem primo totam, inde aliam atque aliam eius partem superstitem, simili semper proportionali parte diminui.

Ut sit linea sinus totius TS, in hoc moveatur punctus G, a T in 1 versus S, quantoque tempore defertur a T in 1, quae sit (exempli gratia) decima pars TS: tanto idem G tempore moveatur ab 1 in 2, quae sit decima pars $1S$: & a 2 in 3, quae sit decima pars $2S$: et a 3 in 4, quae sit decima pars $3S$, & sic de caeteris. Dico hos sinus TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, &c. dici Geometrice decrescere: quia inaequalibus spatiis proportione similibus & tempore aequalibus diminuuntur. In numeris sit TS, 10000000: $1S$, 9000000: $2S$, 8100000: $3S$, 7290000, $4S$, 6561000, &c. Dico hos sinuum numeros, aequalibus temporibus simili proportione diminutos, dici Geometrice decrescere.

temporale successivo viene percorso $12 = (1/10)1S$, quindi $23 = (1/10)2S$ e così via. Da questa definizione, NEPERO deduce che la velocità di G in un punto di TS è proporzionale alla distanza di G da S.

Da ciò segue che un punto mobile il quale, muovendosi in modo geometrico si avvicini ad un punto fisso, ha le velocità proporzionali alle distanze dal punto fisso.

Facendo riferimento allo schema precedente, dico che quando il punto mobile in modo geometrico G è in T, ha velocità proporzionale alla distanza TS e quando G è in 1, ha velocità proporzionale ad $1S$ e quando è in 2, ha velocità proporzionale a $2S$, così via. E quale è la proporzione delle distanze TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, ecc. tra loro, tale sarà anche la proporzione delle velocità di G nei punti T, 1,2,3,4, ecc. tra loro. Infatti un punto sarà più o meno veloce a seconda che sia visto descrivere uno spazio più o meno lungo in tempi uguali. È necessario dunque che, quale la ragione del moto, tale sia anche quella delle velocità: ma in tempi uguali la ragione del moto—$T1$, 12, 23, 34, 45, ecc.— è tale quale quella delle distanze TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, ecc.; e tale è anche quella delle velocità di G nei punti T, 1, 2, 3, 4, ecc, come volevasi dimostrare. Che poi il rapporto dei processi $T1$, 12, 23, 34, 45, &c. coincida con quello delle distanze TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, ecc. è evidente perché le differenze di quantità in proporzione continuata fanno parte della medesima proporzione. Ma queste distanze (per ipotesi) sono in proporzione continuata e dunque lo sono le differenze per cui è chiaro che il moto e le distanze fanno parte di una medesima proporzione continuata.[10](NEPERO, *Constructio* (§25, p.13 di [11])

Chiamiamo $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ le velocità *medie* del mobile G nei tratti $T1$, 12, 23, percorsi da G in uno stesso intervallo Δ. Indichiamo con $\beta < 1$ il valore comune ai rapporti

$$\frac{T1}{TS} = \frac{12}{1S} = \frac{23}{2S} = ... = \beta\,.$$

Allora deve essere

$$\overline{V}_1 = \frac{T1}{\Delta} = \beta\frac{TS}{\Delta} = \beta V_0$$

[10] *Unde punctus mobilis Geometrice ad fixum accedens, velocitates suas prout distantias, a fixo proportionatas habet.*

Ut reperito praecedenti Schemate, dico quum mobilis punctus geometricus G est in T, eius velocitas est ut distantia TS: & quum G est in 1, eius velocitas est ut $1S$: & quum in 2, eius velocitas est ut $2S$, & sic de caeteris. Atque ita quae est proportio distantiarum TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, &c. adinvicem, ea etiam erit proportio velocitatum G in punctis T, 1,2,3,4, &c. adinvicem. Nam magis minusve velox punctus arguitur, prout magis minusve longe sub aequalibus temporibus ferri conspicitur. Qualis itaque processus ratio, talem etiam & velocitatum esse necesse est: at talis est sub aequalibus temporibus ratio processuum $T1$, 12, 23, 34, 45, &c. qualis distantiarum TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, &c. invicem; talis etiam est velocitatum G in punctis T, 1, 2, 3, 4, &c. quod erat demonstrandum. At quod processuum $T1$, 12, 23, 34, 45, &c. talis fit ratio, qualis distantiarum TS, $1S$, $2S$, $3S$, $4S$, &c. patet: quia quantitatum proportionaliter continuatarum differentiae etiam in eadem proportione continuantur. At hae distantiae (per hypothesim) proportionaliter continuantur, & illi processus sunt harum differentiae: quare eadem processus qua distantias ratione continuari certum est.

dove abbiamo posto, per semplicità, $V_0 := \frac{TS}{\Delta}$. Seguendo le prescrizioni di NEPERO si ha

$$\overline{V}_2 = \frac{12}{\Delta} = \beta\frac{1S}{\Delta} = \beta\frac{TS - T1}{\Delta} = \beta V_0(1-\beta) = \overline{V}_1(1-\beta)$$

ed ancora

$$\overline{V}_3 = \frac{23}{\Delta} = \beta\frac{2S}{\Delta} = \beta\frac{TS-T1-12}{\Delta} = \beta\frac{TS-\beta TS-\beta 1S}{\Delta} = \beta\frac{TS-\beta TS-\beta(TS-T1)}{\Delta} =$$

$$\beta\frac{TS-\beta TS-\beta(1-\beta)TS}{\Delta} = \beta V_0(1-\beta)^2 = (1-\beta)^2\overline{V}_1$$

dimostrando dunque che le velocità medie formano una progressione geometrica di ragione $1-\beta$. È agevole verificare che anche i segmenti TS, $1S$, $2S$, ecc. hanno la stessa proprietà. Questo risultato viene estrapolato da NEPERO alle velocità *istantanee*, risultato tanto migliore quanto più è fitta la partizione 1, 2, 3,...del segmento ST, cioè quanto più piccolo viene preso il rapporto β in quanto in tal caso il moto è ben approssimato da un moto uniforme.

Definiti i moti di a e G, NEPERO definisce il logaritmo (*numerus artificialis* nella *Constructio*) di un seno, cioè di un segmento di lunghezza inferiore a TS (*sinus totus*).

Il numero artificiale di un dato seno è quello che cresce in modo aritmetico con velocità costante pari a quella con cui il seno totale inizia a decrescere in modo geometrico ed in un tempo pari a quello necessario affinché il seno totale decresca fino al valore assegnato.

Sia il segmento TS pari al seno totale e dS il seno assegnato: il punto g si muova in certi intervalli geometricamente da T verso d. Sia bi una semiretta infinita verso i su cui il punto a si muova aritmeticamente partendo da b, con la stessa velocità che g aveva inizialmente in T; e si supponga che nel medesimo intervallo temporale a si muova dal punto fisso b verso i fino a raggiungere il punto c: il numero che misura il segmento bc è detto numero artificiale del seno assegnato dS.[11] (NEPERO, *Constructio* (§26, p.14 di [11])

La definizione di NEPERO si chiarisce anche con la Figura 2.3. Egli considera due punti g ed a mobili su due rette parallele. Il mobile g si trova all'istante iniziale $t = 0$ in un punto T di un segmento TS di lunghezza r pari al raggio della circonferenza trigonometrica di riferimento: $r = 10^7$. All'istante $t = 0$ g è animato da velocità v_0. Il moto di g è *geometrico* per cui si svolge con velocità istantanea proporzionale alla distanza di g dall'estremo S. All'istante $t = 0$ il punto a si trova in b con la stessa velocità v_0 di g, ma il suo moto successivo è *aritmetico*, cioè uniforme. Detto c il punto raggiunto da a quando g si trova

[11] Numerus artificialis sinus dati est qui Arithmetice crevit tanta semper velocitate, quanta sinus totus incepit Geometrice decrescere tantoque tempore, quanto sinus totus in sinum illum datum decrevit.

Sit sinus totus linea TS, sinus datus in eadem linea dS: certis quibusdam momentis moveatur g Geometrice a T in d. Sitque alia linea bi versus i infinita, in qua ex b moveatur a Arithmetice, eadem velocitate qua g primo cum erat in T; totidemque temporis momentis procedat a ex b fixo versus i usque in c punctum: dicetur numerus metiens bc lineam numerus artificialis sinus dS dati.

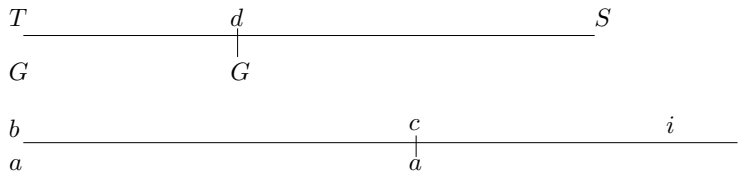

Figura 2.3: La definizione neperiana di logaritmo.

in d, allora Nepero definisce bc come il logaritmo del seno dS. Cambiando notazione, se $y := bc$ ed $x := dS$

$$y := \mathrm{nl}\,(x) \tag{2.1}$$

dove nl indica il *logaritmo neperiano* e si è introdotta questa notazione mutuata da [10] per distinguere questa funzione dal logaritmo naturale ln che viene a volte erroneamente detto neperiano.

Dalla definizione di logaritmo (2.1) segue che

$$\mathrm{nl}\,(r) = 0 \tag{2.2}$$

dal momento che quando $d \equiv T$ $c \equiv b$ e dunque $y = 0$.

Pertanto il numero artificiale del seno totale è zero.

Infatti dallo Schema, quando g è in T cosicché ha distanza da S pari al seno totale, il punto aritmetico a che parte da b, non si è ancora mosso. Per cui, per definizione di distanza, zero è il numero artificiale del seno totale.[12] (Nepero, *Constructio* §27, p.14 di [11])

Nel sistema adottato da Nepero si ha pertanto $\mathrm{nl}\,10^7 = 0$ e già da questo fatto si arguisce che $\mathrm{nl}\,x \neq \ln\,x$. Ancora, dalla definizione segue che, se $x_1 < x_2$, allora $\mathrm{nl}\,x_1 > \mathrm{nl}\,x_2$ [15].

La differenza di due numeri artificiali va aggiunta al numero artificiale del maggiore tra i due seni per ottenere il numero artificiale del minore: e va sottratta dal numero artificiale del seno minore per ottenere il numero artificiale del seno maggiore.

Ciò segue dal fatto che i numeri artificiali crescono al diminuire del seno e che il numero artificiale di un seno più grande è più piccolo mentre è più grande quello di un seno minore.[13] (Nepero, *Constructio* §35, pp.16-17 di [11])

[12] Unde sinus totius nihil est pro artificiali.

Nam ex Schemate, cum g est in T faciens suam distantiam ab S sinum totum, punctus Arithmeticus a incipiens in b, nusquam inde processit. Unde ex definitione distantiae, sinus totius nullus erit artificialis.

[13] Duorum artificialium differentia, addenda est ad artificialem maioris sinus eorundem, ut habeas artificialem minoris: & subtrahenda ab artificialis minoris sinus, ut habeas artificialem maioris.

Necessario hoc fit, siquidem crescunt artificiales decrescentibus sinibus atque minor est artificialis maioris sinus, & maior minoris.

Un'altra importante proprietà algebrica dei logaritmi neperiani afferma che se $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$ allora

$$\mathrm{nl}\,(x_1) - \mathrm{nl}\,(x_2) = \mathrm{nl}\,(x_3) - \mathrm{nl}\,(x_4) \tag{2.3}$$

Così i numeri artificiali di seni proporzionali sono equidifferenti.

Ciò segue necessariamente dalle definizioni di numeri artificiali e dei moti: infatti, grazie ad esse, un incremento aritmetico uniforme corrisponde ad un decremento geometrico in proporzione simile: concludiamo necessariamente che a seni proporzionali corrispondono sia numeri artificiali equidifferenti che termini di numeri.[14] (§35, pp.16-17 di [11])

Nepero è molto sbrigativo ed afferma che si tratta di una conseguenza diretta della definizione dei moti geometrico ed aritmetico posta alla base della costruzione dei logaritmi. Infatti, si tratta di mostrare che il tempo impiegato dal punto g per passare dalla posizione a distanza x_1 da S a quella distante x_2 da S è lo stesso impiegato per passare dal punto a distanza x_3 a quello a distanza x_4 da S. Che sia questo il caso si dimostra osservando che, detto $\lambda := x_1/x_3 = x_2/x_4$, le velocità v_i di g quando è a distanza x_i da S sono tali che $v_1/v_3 = v_2/v_4$. Ora, prese due successioni di punti $\{z_0 = x_1 < z_1 < z_2 < ... < z_n = x_2\}$ e $\{w_0 = x_3 < w_1 < w_2 < ... < w_n = x_4\}$ tali che $z_0/w_0 = z_1/w_1 = z_2/w_2 = z_n/w_n = \lambda$ deduciamo che le velocità di g in punti corrispondenti delle suddivisioni stanno sempre nello stesso rapporto che inoltre coincide con il rapporto tra le distanze percorse. Infittendo la partizione, si ricava che il tempo di percorrenza di un generico intervallo $[z_i, z_{i+1}]$ coincide con il tempo di percorrenza di $[w_i, w_{i+1}]$ e dunque si giunge alla tesi.

Poiché $ab : a = b : 1$ concludiamo da (2.3) che

$$\mathrm{nl}\,(ab) = \mathrm{nl}\,(a) + \mathrm{nl}\,(b) - \mathrm{nl}\,(1) \tag{2.4}$$

e poiché $\mathrm{nl}\,(1) \neq 0$ otteniamo che il logaritmo (neperiano) di un prodotto non è la somma dei logaritmi (neperiani) dei fattori.

Allora, qual è il legame tra logaritmo neperiano e logaritmo naturale di un dato numero positivo x? La cinematica di g è descritta dall'equazione differenziale ([12], [10], p.5 di [16])

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = -kx \tag{2.5}$$

dove la costante k si determina imponendo le condizioni iniziali $x(0) = r$ e $\dot{x}(0) = v_0$ per cui $k = v_0/r$. D'altra parte è

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \tag{2.6}$$

[14] Similiter proportionatorum sinuum sunt aequi-differentes artificiales.

Consequitur hoc necessario definitiones artificialium & motuum: Nam cum per eas, Geometrico decremento similiter proportionato, respondet Arithmeticum incrementum aequale semper: necessario similiter proportionatis sinibus, respondere aequi-differentes artificiales & numeros, & numerorum terminos concludimus.

per cui risulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r}{x}$$

e per integrazione

$$y(x) = \mathrm{nl}\, x = r(\ln\, r - \ln\, x) = \ln\left(\frac{r}{x}\right)^r = r \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{r} \tag{2.7}$$

che mostra il legame tra i logaritmi concepiti da Nepero con i logaritmi nella base $1/e$. Bisogna ricordare che il concetto di base è *estraneo* al modo in cui Nepero ha introdotto i logaritmi e lo resterà fino all'inizio del Settecento quando Leibniz, Johann Bernoulli e poi, con maggior chiarezza, Eulero definiranno il logaritmo nel modo cui noi siamo abituati, come funzione inversa dell'esponenziale. Occorre anche sottolineare quanto fosse scarso il bagaglio tecnico cui poteva attingere Nepero. Non vi era alcuna formalizzazione del concetto di funzione—eppure egli se ne serve implicitamente— né gli strumenti del calcolo differenziale erano noti e ciononostante egli fu in grado, per altra via, di integrare un'equazione differenziale e di ottenere stime per i logaritmi analoghe al teorema del valor medio.

L'equazione (2.7) mostra che

$$\mathrm{nl}\,(1) = r \ln\, r = 7 \times 10^7 \ln\, 10 = 161\ 180\ 957\,.$$

Ora, presi due numeri n ed x [10] abbiamo

$$\mathrm{nl}\,(x) - \mathrm{nl}\,(nx) = \mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(n) \tag{2.8}$$

cosicché, per passare da $\mathrm{nl}\,(x)$ a $\mathrm{nl}\,(nx)$ è sufficiente sottrarre la quantità $\mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(n)$ da $\mathrm{nl}\,(x)$. Il caso più importante di questa formula si ha prendendo $n = 10$, cosicché

$$\mathrm{nl}\,(x) - \mathrm{nl}\,(10x) = \mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(10)\ : \tag{2.9}$$

preso $x = 10^{r-1}$ abbiamo, grazie a (2.2),

$$\mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(10) = \mathrm{nl}\,(10^{r-1}) =: \nu_r\,.$$

Esercizio 2.1 *Mostrare che*

$$\mathrm{nl}\,(10^k x) = \mathrm{nl}\,(x) - k\nu_r$$

e

$$\mathrm{nl}\,(10^{-k} x) = \mathrm{nl}\,(x) + k\nu_r\,,$$

dove k è un intero maggiore di 1.

Esercizio 2.2 *Servendosi delle proprietà elementari dei logaritmi neperiani, dimostrare che*

$$\mathrm{nl}\,(rab) = \mathrm{nl}\,(ra) + \mathrm{nl}\,(rb).$$

Esercizio 2.3 *Utilizzando l'induzione su $n \in \mathbf{N}$ mostrare che*

$$\mathrm{nl}\,(rc^n) = n\mathrm{nl}\,(rc)\,.$$

Esercizio 2.4 *Sfruttando la progressione $1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = ...$, mostrare che*

$$\mathrm{nl}\,(x^n) = n\mathrm{nl}\,(x) - (n-1)\mathrm{nl}\,(1).$$

Dal fatto che $1 : \sqrt{x} = \sqrt{x} : x$, ricavare che

$$\mathrm{nl}\,(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[\mathrm{nl}\,(x) + \mathrm{nl}\,(1)]\,.$$

Esercizio 2.5 *Servendosi dell'esercizio precedente e scrivendo $q^n = x^m$ mostrare che*

$$\mathrm{nl}\,(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\mathrm{nl}\,(x) + \frac{n-m}{n}\mathrm{nl}\,(1)\,.$$

Esercizio 2.6 *Mostrare la Proposizione 6 della Descriptio: dati quattro numeri in progressione continuata $a : b = b : c = c : d$, allora*

$$3\mathrm{nl}\,(b) = 2\mathrm{nl}\,(a) + \mathrm{nl}\,(d) \quad e \quad 3\mathrm{nl}\,(c) = 2\mathrm{nl}\,(d) + \mathrm{nl}\,(a)\,.$$

Come emerge dagli esercizi, avere $\mathrm{nl}\,(1) \neq 0$ è di impaccio nelle formule logaritmiche, anche le più elementari. Inoltre, in questo modo il logaritmo neperiano *non* è un omomorfismo da $\mathbf{R}_+$ dotato dell'operazione di prodotto in $\mathbf{R}$ dotato dell'operazione di addizione. Il motivo per cui Nepero si attenne a tale regola va ricercato nelle applicazioni alla trigonometria che egli aveva di mira. Come già notato nel capitolo 1, le identità trigonometriche erano proposte come proporzioni e le funzioni trigonometriche erano in realtà segmenti per cui la funzione seno di un angolo α era in realtà pari a $r \sin \alpha$. Una relazione del tipo $a = c \sin \alpha$, posto $\mathrm{Sin}\alpha := r \sin \alpha$ e moltiplicati ambo i membri per r diventa $\mathrm{Sin}\alpha : a = r : c$ e, passando ai logaritmi, si vede che, grazie a (2.2), $\mathrm{nl}\,(\mathrm{Sin}\alpha) = \mathrm{nl}\,(a) - \mathrm{nl}\,(c)$: lo svantaggio di avere $\mathrm{nl}\,(1) \neq 0$ è in parte compensato dall'avere $\mathrm{nl}\,(r) = 0$.

Le proprietà elencate sopra consentono di determinare i logaritmi di molti numeri ma per avere delle tavole accurate occorre avere regole di interpolazione sufficientemente precise. Per questo, Nepero si serve di due coppie di disuguaglianze che permettono di stimare sia $\mathrm{nl}\,(x)$, sia la differenza dei logaritmi di due numeri x ed $y > x$. In termini moderni tali disuguaglianze si esprimono come

$$(r - x) < \mathrm{nl}\,(x) < r\left(\frac{r}{x} - 1\right) \tag{2.10}$$

e

$$\frac{r}{y}(y - x) < \mathrm{nl}\,(x) - \mathrm{nl}\,(y) < \frac{r}{x}(y - x)\,. \tag{2.11}$$

Ecco come Nepero enuncia e dimostra la stima (2.10).

Da qui segue anche che il numero artificiale di un seno arbitrario assegnato è maggiore della differenza tra il seno totale ed il seno assegnato e minore della

differenza tra il seno totale ed una quantità maggiore di esso di un rapporto uguale a quello tra il seno totale e quello assegnato. Queste differenze sono dette estremi artificiali.

Come si vede dallo schema precedente, si prolunghi il segmento ST in o oltre T in modo che So stia ad ST come ST sta a dS. Dico che il numero artificiale bc del seno dS è maggiore di Td, e minore di oT. Infatti, nel tempo necessario a g per muoversi da o in T, g si sposta anche da T in d (per 24) perché oT sta ad oS come Td sta a TS e nel medesimo tempo a si sposta da b in c, per definizione di numero artificiale: Così i segmenti oT, Td e bc vengono descritti nello stesso tempo. Ma siccome g ha velocità nei punti tra T ed o che è maggiore della velocità in T e minore di quella nei punti tra T e d, mentre la velocità di g in T coincide con quella di a (per 26), segue pertanto che il segmento oT che g descrive velocemente è il maggiore: il segmento Td che g descrive lentamente è il minore: ed il segmento bc (che il punto a descrive nel suo moto intermedio nello stesso intervallo di tempo) risulta compreso tra i due precedenti, come occorreva dimostrare. Pertanto oT è detto estremo maggiore e Td estremo minore del numero artificiale individuato[15](Nepero, *Constructio*, §28, pp.14-15 di [11])

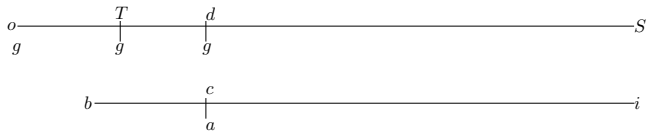

Figura 2.4: Schema geometrico per ottenere la stima (2.10).

Consideriamo dunque il moto di g sul segmento TS e del suo corrispondente a su bi. Nepero considera un punto o a *sinistra* di T tale che

$$So : TS = TS : dS, \tag{2.12}$$

cosicché, per quanto mostrato in precedenza, il tempo impiegato a percorrere il segmento oT coincide sia con quello richiesto per percorrere il segmento Td sia con il tempo che occorre ad a per passare da b a c. Ora, poiché la velocità

[15]Hinc etiam sequitur, quod cujuslibet dati sinus numerus artificialis, major est differentia inter sinum totum & sinum datum & minor differentia quae est inter sinum totum, & quantitatem eo majorem in eadem ratione, quae est sinus totius ad datum. Atque hae differentiae dicuntur ideo termini artificiales.

Ut reperito praecedenti Schemate, protractaq; linea ST ultra T in o, ita ut So se habeat ad TS ut TS ad dS. Dico sinus dS numerum artificialem bc, majorem esse quam Td, & minorem quam oT. Quanto enim tempore g ab o in T fertur, tanto & g a T in d feretur (per 24) quia oT est tanta pars oS, quanta Td est ad lineae TS, tantoque tempore (per definitione artificialis) feretur & a a b in c: Ita ut oT, Td, & bc sunt aequalium temporum processus. At quia g inter T & o movens, velocior est quam in T, & inter T, & d tardior, in T autem g aequi velox est atque a (per 26). Sequetur processum oT quem g iam velox facit, maiorem esse: & Td processum quem g tardus facit, minorem esse: & bc processum (quem punctus a mediocri suo moto totidem etiam temporis momentis perficit) medium quoddam esse inter utrumque, quod erat demostrandum. Numeri itaque artificialis quem bc designat, dicitur oT terminus maior, & Td terminus minor.

del punto g in ogni punto di oT è maggiore di v_0 e minore di v_0 nei punti del segmento Td, mentre il punto a si muove con moto uniforme di velocità v_0, abbiamo $Td < bc < oT$ e dunque, poiché la proprietà dello scomporre applicata a (2.12) implica

$$oT = \frac{Td \cdot TS}{dS},$$

abbiamo

$$Td = TS - dS = r - x < bc = \mathrm{nl}\,(x) < oT = \frac{r(r-x)}{x}$$

che è appunto la stima (2.10). La stima (2.11) e la sua dimostrazione vengono così presentate da Nepero:

La differenza di due numeri artificiali è compresa tra due termini tali che: il seno totale sta al termine maggiore come il seno minore corrispondente a questi numeri artificiali sta alla differenza dei seni; il seno totale sta al termine minore come il seno più grande corrispondente ai due numeri artificiali sta alla differenza dei seni.

Sia ST il seno totale, dS il più grande dei due seni ed eS il più piccolo. Si consideri un punto V oltre ST tale che ST sta a TV come il seno minore eS sta alla differenza de dei due seni. Si prenda poi all'interno del segmento TS un punto c la cui distanza Tc sia tale che ST sta a Tc come il seno maggiore dS sta alla differenza de dei due seni. Dico che la differenza dei numeri artificiali che corrispondono ai seni dS ed eS è limitata superiormente da VT ed inferiormente da Tc. Infatti, poiché per ipotesi eS sta a de come ST sta a VT e dS sta a de come ST sta a Tc: allora, per le proprietà (delle proporzioni) si traggono due conclusioni: Dapprima che VS sta a ST come lo stesso ST sta a cS. In secondo luogo che il rapporto tra ST e cS è simile al rapporto tra dS ed eS. E pertanto (per 36) la differenza dei numeri artificiali corrispondenti ai seni dS ed eS è uguale alla differenza dei numeri artificiali corrispondenti al seno totale ST ed al seno cS. Ma questa differenza (per 34) è il numero artificiale dello stesso seno cS: e questo numero artificiale (per 28) è compreso tra il termine maggiore VT e quello minore Tc: poiché per la prima conclusione già menzionata VS, che è maggiore del seno totale, sta al seno totale ST come lo stesso ST sta a cS, ne segue necessariamente che la differenza dei numeri artificiali corrispondenti ai seni dS ed eS è limitata superiormente da VT ed inferiormente da Tc, come dovevasi dimostrare.[16] (Nepero, *Constructio*, §40, p. 19 di [11])

[16] Duorum artificialium differentia, est inter duos terminos, ad quorum maiorem se habet sinus totus, ut eorum artificialium minor sinus ad sinuum differentiam: & ad minorem terminum se habet sinus totus, ut artificialium sinus maior ad sinuum differentiam.

Sit sinus totus TS, sinus duo dati dS major, & eS minor: ultra ST signetur puncto V distantia TV, ea lege, ut ST se habeat ad TV, ut eS minor sinus ad de differentiam sinuum. Deinde citra T versus S, signetur puncto c distantia Tc ea lege, ut TS se habeat ad Tc ut dS sinus major ad de differentiam sinuum. Dico differentiam artificialium respondentium sinibus dS & eS, constitui inter terminos VT majorem, & Tc minorem. Nam quia ex hypothesi, ut eS ad de ita TS ad VT; & ut dS ad de, ita TS ad Tc se habent: ideo etiam ex natura (proportionalium) sequuntur duae conclusiones: Primo, quod VS se habet ad TS, ut idem TS ad cS. Secundo, quod similis est ratio TS ad cS, rationi quae est dS ad eS. Et propterea

Figura 2.5: Schema geometrico per ottenere la stima (2.11).

In formule, Nepero considera sul segmento TS un punto V a sinistra di T e tale che

$$\frac{TS}{VT} = \frac{eS}{de} \tag{2.13}$$

ed un punto c interno a TS tale che

$$\frac{TS}{Tc} = \frac{dS}{de}\,. \tag{2.14}$$

La proprietà del comporre applicata alla proporzione (2.13) e quella dello scomporre applicata ad (2.14) forniscono

$$\frac{VS}{TS} = \frac{dS}{eS} = \frac{TS}{cS} \tag{2.15}$$

da cui discende per (2.3)

$$\mathrm{nl}\,(dS) - \mathrm{nl}\,(eS) = \mathrm{nl}\,(TS) - \mathrm{nl}\,(cS)$$

ovvero, per (2.2),

$$\mathrm{nl}\,(cS) = \mathrm{nl}\,(eS) - \mathrm{nl}\,(dS)$$

e dunque, applicando la stima (2.10),

$$Tc = TS - cS < \mathrm{nl}\,(cS) = \mathrm{nl}\,(eS) - \mathrm{nl}\,(dS) < TS\frac{Tc}{cS} = VT$$

dove nell'ultimo passaggio si è applicata ancora la proprietà dello scomporre alla (2.15): l'asserto segue ponendo $x := eS$ e $y := dS$.

Per costruire e rendere fruibili le tavole logaritmiche, Nepero ha seguito una strategia in quattro passi.

1. Scegliere dei numeri di riferimento;
2. determinare il logaritmo di ogni numero scelto al passo 1;
3. determinare il logaritmo di numeri intermedi;
4. stabilire come trovare il logaritmo di numeri che non rientrano nella tavola.

(per 36) differentia artificialium respondentium sinibus dS et eS, aequalis est differentiae artificialium respondentium sinui toto TS & sinui cS. At haec differentia (per 34) est artificialis ipsius sinus cS: et hic artificialis inter terminos VT majorem & Tc minorem (per 28 pos.) includitur: quia per primam conclusionem jam dictam VS major sinu toto se habet ad sinum totum TS, ut idem TS ad cS. Unde necessario differentia artificialium respondentium sinibus dS et eS, constituitur inter terminos VT majorem et Tc minorem, quod erat demonstrandum.

Perché una tavola sia utile, deve essere molto fitta, così da ridurre l'errore coinvolto nei processi di interpolazione. Per raggiungere l'obiettivo, NEPERO considera numeri a_n in progressione geometrica di ragione molto vicina ad 1. Partendo da $a_0 = r = 10^7$ egli introduce la progressione

$$a_n = r(1 - 10^{-7})^n = r(1 - \frac{1}{r})^n \,. \tag{2.16}$$

La scelta della ragione non è casuale in quanto consente di facilitare il calcolo dei termini: il termine a_n si ottiene sottraendo ad a_{n-1} il numero ottenuto spostando la virgola decimale di quest'ultimo di sette posti.

a_1	10	000	000.	000	000	0
a_2	9	999	999.	000	000	0
a_3	9	999	998.	000	000	1
a_4	9	999	997.	000	000	3
a_5	9	999	996.	000	000	6
...	...	...	...	...	...	...
a_{100}	9	999	900.	000	495	0

In tabella sono mostrati i primi 5 ed il centesimo termine della progressione.

Si ottengono facilmente solo quelle progressioni geometriche che hanno origine sottraendo la parte facile di un numero dal numero iniziale.

Con parti facili di un numero intendiamo le parti qualsiasi aventi denominazioni formate dall'unità e da un numero arbitrario di zeri: queste parti si ottengono gettando via tante cifre del numero principale quanti sono gli zeri nella denominazione.

Così le parti decima, centesima, millesima, 10000^a, 100000^a, 1000000^a, 10000000^a, sono dette facili perché la parte decima di un numero qualsiasi si ottiene cancellandone l'ultima cifra; la parte centesima cancellandone le ultime due, la parte millesima cancellandone le ultime tre e così via, sempre cancellando tante cifre quanti sono gli zeri nella denominazione della parte.

(...) Da ciò segue che, tolti sette zeri dal seno totale e sottratta dunque da esso e da tutti gli altri numeri ottenuti la 10000000ª parte, si possono ottenere in modo molto semplice i cento termini di una progressione geometrica la cui ragione è il rapporto tra il seno totale ed il seno che differisce da quello totale per un'unità, cioè tra 10000000 & 9999999; chiamiamo prima Tavola questa serie di numeri proporzionali.[17] (NEPERO, *Constructio* §§13-14; 16, pp. 8-9 di [11]

[17] Solo Geometricae illae progressiones facile continuantur, quae per subtractionem facilis partis numeri a numero toto oriuntur.

Partes numeri faciles dicimus, partes quaslibet cuius denominationes unitate & cyphris quotcunque notantur: habentur autem hae partes, reiiciendo tot figuras ultimas principalis numeri, quod sunt cyphrae in denominatore.

Ut partes decima, centesima, millesima, 10000^a, 100000^a, 1000000^a, 10000000^a, faciles dicuntur, quia cujuslibet numeri decima pars habetur delendo eius ultimam figuram; centesima duas ultimas, millesima tres ultimas figuras, & sic de caeteris, semper delendo tot figuras quot

Come chiariremo tra poco, NEPERO deve passare da r ad $r/2$ per costruire una tavola sufficientemente accurata. Ora, il valore di n cui corrisponde $a_n = \frac{r}{2}$ nella progressione (2.16) si ottiene risolvendo l'equazione in n

$$\frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{r})^n$$

e poiché $r = 10^7$, si ha $n \approx 7 \cdot 10^6$ che comporterebbe una mole di calcoli proibitiva. Astutamente NEPERO si servì di alcuni stratagemmi con cui, a patto di perdere un po' di precisione, erano sufficienti 1599 numeri per formare la tabella. NEPERO infatti osservò che $a_{100} \simeq r(1 - 10^{-5})$, come peraltro segue dallo sviluppo $(1 - x)^n \simeq 1 - nx$, applicato alla progressione appena costruita. Egli costruisce una seconda progressione di ragione pari a 10^{-5},

$$b_n = r(1 - 10^{-5})^n \quad n = 1, ...50\,,$$

alcuni termini della quale sono qui riportati

b_1	9	999	900.	000	000	0
b_2	9	999	800.	001	000	0
b_3	9	999	700.	002	999	9
...	...	...	...	...	...	...
b_{48}	9	995	201.	127	827	1
b_{49}	9	995	101.	175	815	8
b_{50}	9	995	001.	224	804	0

In questa seconda tavola, NEPERO commise un errore di calcolo che inficiò leggermente la precisione delle tavole. Egli, pur avvedendosi dell'errore e segnalandolo non riuscì a porvi rimedio, visto il progressivo deteriorarsi dello stato di salute. Saranno altri, come KEPLERO, ad emendare le tavole. L'ultima tabella ausiliaria è una matrice i cui elementi $c_{m,n}$ hanno valori

$$c_{m,n} := r\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^m \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

dove gli interi m ed n assumono i valori $1 \leq m \leq 21$ ed $1 \leq n \leq 69$. La prima colonna dove $n = 1$ contiene dunque una progressione geometrica il cui primo termine

$$c_{1,1} = r\left(1 - \frac{1}{2000}\right) \simeq b_{50}$$

è circa uguale all'ultimo termine della progressione b_n mentre l'elemento

$$c_{21,1} = r\left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{21} \simeq r(1 - 10^{-2})$$

sunt cyphrae in denominatione partis.

(...) Hinc sequitur, si a sinu toto septem cyphris aucto, caeterisque inde ortis suam 10000000^{am} partem subtraxeris, continuari possunt quam facillime centum numeri, in ea proportione Geometrica, quae est inter sinum totum & sinum eo minorem unitate, scilicet 10000000 & 9999999; hancque seriem proportionalium primam Tabulam nominamus.

che conclude la colonna appartiene con buona approssimazione alla progressione $c_{m,2}$ che occupa la seconda colonna. In una parola, sia le righe che le colonne di $c_{m,n}$ sono progressioni geometriche le cui ragioni sono calibrate in modo che l'ultimo termine considerato in una progressione appartenga, con buona approssimazione, alla progressione che occupa la colonna adiacente. L'ultimo termine è

$$c_{21,69} = r\left(1-\frac{1}{2000}\right)^{21}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{68} \simeq r\left(1-\frac{1}{100}\right)^{69} \simeq \frac{r}{2}$$

per cui Nepero è riuscito a percorrere l'intervallo $(r/2, r)$ in un numero ragionevole di passi e con questo egli ha superato un ostacolo formidabile alla costruzione del *Canone Logaritmico*.

Per procedere, egli si serve della stima (2.10). Già sappiamo, per costruzione, che $\mathrm{nl}\,(r) = 0$. Detta $c = 10^{-7} = \frac{1}{r}$ la ragione della prima progressione costruita da Nepero, (2.10) fornisce la stima

$$1 \leq \mathrm{nl}\,[r(1-c)] \leq \frac{1}{1-c} \simeq 1 + c = 1.0000001\,.$$

Come regola generale, Nepero prende la *media aritmetica* dei limiti ottenuti come valore del logaritmo cercato; pertanto

$$\mathrm{nl}\,(r(1-c)) = 1.00000005.$$

Per procedere, Nepero utilizza la proprietà (2.3) dei logaritmi di numeri in progressione geometrica e può ricavare

$$\mathrm{nl}\,[r(1-c)^2] = 2\mathrm{nl}\,[r(1-c)] = 1.00000010$$

e così via fino ad ottenere $\mathrm{nl}\,[r(1-c)^{100}] = 100.000005$.

Terminato il calcolo dei logaritmi per i numeri della prima tabella, si richiama il fatto che il primo termine della seconda tabella $b_1 = 9999900$ è in realtà prossimo all'ultimo numero $a_{100} = 9999900.000495$ della prima tabella, di cui sono noti i logaritmi. Servendosi allora di (2.11) si può mostrare che

$$\mathrm{nl}\,(b_1) \simeq \mathrm{nl}\,(a_{100}) + 0.000495 = 100.0005\,.$$

A questo punto, il procedimento seguito da Nepero per determinare $\mathrm{nl}\,(a_n)$ viene ripreso daccapo e si ottengono i logaritmi neperiani per gli elementi b_n. Arrivato a determinare $\mathrm{nl}\,(b_{50}) = 50{\cdot}\mathrm{nl}\,(b_1) = 5000.025$, Nepero si accorge che il metodo di interpolazione usato in precedenza porterebbe a perdite di precisione sempre maggiori, visto che aumentando la distanza tra i numeri x ed y coinvolti nella stima (2.11), diminuisce l'accuratezza con cui è nota la differenza tra i loro logaritmi. Per porre rimedio egli determina un numero z tale che

$$\frac{r}{z} = \frac{b_{50}}{c_{1,1}}\ : \tag{2.17}$$

poiché b_{50} e $c_{1,1}$ non sono comunque molto distanti tra loro, il valore di $z = 9999998.77458342$ è prossimo a r ed il suo logaritmo, $\mathrm{nl}\,(z) = 1.2254166$, si può ottenere grazie a (2.11) ed ai logaritmi dei numeri della prima tabella. A questo punto, applicando (2.3) alla proporzione (2.17) si ottiene

$$\mathrm{nl}\,(c_{1,1}) = \mathrm{nl}\,(b_{50}) + \mathrm{nl}\,(z) = 5001.250\,.$$

Iterando la procedura è possibile ottenere la *tavola radicale* contenente i logaritmi delle progressioni geometriche introdotte da Nepero. Osserviamo che i logaritmi trovati in questo modo sono corretti alla quinta cifra decimale, precisione davvero notevole se si pensa allo scarsità di mezzi di calcolo e delle esigue tecniche matematiche a disposizione.

Resta da completare la tavola per comprendere anche i numeri esterni all'intervallo $[r/2, r]$. Per questo, preso un numero $x \in (r/4, r/2)$, cosicché $2x > r/2$, si osserva che, essendo

$$\frac{r/2}{x} = \frac{r}{2x}\,,$$

grazie a (2.3) si può concludere che

$$\mathrm{nl}\,(x) = \mathrm{nl}\,(\frac{r}{2}) + \mathrm{nl}\,(2x)$$

e poiché, al più per interpolazione, $\mathrm{nl}\,(\frac{r}{2})$ ed $\mathrm{nl}\,(2x)$ sono noti, il problema di trovare i logaritmi di numeri in $x \in (r/4, r/2)$ è risolto ed iterando la procedura sugli intervalli del tipo $(\frac{r}{2^k}, \frac{r}{2^{k+1}})$ si può procedere ad infittire la tabella di $\mathrm{nl}\,(x)$ per x piccoli.

2.4 Questioni di priorità

Spesso accade nella storia della scienza di incontrare discussioni interminabili o polemiche anche aspre su questioni di priorità, cioè su chi possa vedersi riconosciuto il diritto di paternità di un'idea. Non sono problemi facili da risolvere anche perché spesso accade che per i problemi di punta vi siano più studiosi che lavorano indipendentemente su un argomento giungendo praticamente nello stesso momento alle stesse conclusioni o a conclusioni confrontabili. I logaritmi fanno eccezione perché solo raramente si è messa in discussione la priorità di Nepero. I tentativi fatti per ridimensionare il ruolo di Nepero come padre dei logaritmi sono sostanzialmente tre e sono stati confutati da Cajori in [17]. In ognuno dei casi considerati si cercò di mostrare che qualcun altro prima di Nepero aveva introdotto i logaritmi e che egli avrebbe lavorato su materiale già sgrezzato. Come precursori sono stati proposti tre nomi: il matematico inglese Edward Wright (1559-1615), l'astronomo danese Christen Sørensen Longberg (Longomontanus) (1562-1647) e l'inventore svizzero Jobst Bürgi (1552-1632).

Il nome di Wright venne avanzato da Benjamin Martin che nell'opera *Systems of Logarithms* (1772) affermava di disporre di prove secondo cui fu

WRIGHT e non NEPERO ad aver calcolato le prime tavole logaritmiche. L'opera di WRIGHT cui MARTIN si riferisce è il *Certaine Errors in Navigation Corrected* del 1599 dove WRIGHT volle correggere un errore nella rappresentazione di Gerhard MERCATOR (1512-1594) in cui i meridiani sono segmenti di retta per cui l'arco di parallelo compreso tra due meridiani appare più lungo del dovuto causando errori nel posizionamento di un punto sulla superficie sferica. Per ovviare al problema occorre introdurre un fattore di dilatazione negli archi di meridiano che si ottiene moltiplicando la lunghezza dell'arco per la secante della latitudine ed ottenendo così i meridiani *nautici*. Poiché la correzione è *locale*, per apportarla occorre in verità calcolare l'integrale

$$r \int_0^{\vartheta} \sec \alpha \, \mathrm{d}\alpha = r \ln \tan \frac{\vartheta}{2}$$

e dunque una tavola di $f(\vartheta) := \int_0^{\vartheta} \sec \alpha \, \mathrm{d}\alpha$ può essere vista come tavola logaritmica. Secondo la ricostruzione di Edmund HALLEY [18], l'analogia sembra essere stata notata per la prima volta da Henry BOND in aggiunta alla *Norwoods Epitome of Navigation*. La dimostrazione proposta sembrò di tale difficoltà che Nicolaus MERCATOR[18] propose di assegnare una somma di denaro a chi fosse riuscito nell'impresa di dimostrarla od anche di provarne la falsità con un controesempio. Una nuova dimostrazione fu proposta da James GREGORY nelle *Exercitationes Geometricae* del 1668,

non senza una lunga serie di deduzioni e la complicazione delle proporzioni, a causa delle quali l'evidenza della dimostrazione si perde ed il lettore è esausto ancor prima di essere arrivato in fondo.[19] (*cfr.* p.203 di [18])

HALLEY a sua volta propose in [18] un metodo semplificato e generale per mostrare l'analogia. Detto questo, la pretesa priorità di WRIGHT non può essere sostenuta perché, come argomenta CAJORI in [17], egli non si pose affatto il problema di semplificare con la sua tabella le operazioni di moltiplicazione, divisione e le estrazioni di radici ma solo di correggere un errore presente in navigazione: in un certo senso egli realizzò una tavola logaritmica senza rendersene conto. La miglior prova dell'infondatezza delle affermazioni di MARTIN è il fatto che WRIGHT tradusse la *Descriptio* in inglese ed aiutò così la diffusione dell'opera di NEPERO, senza arrogarsi alcun merito.

Ancora più fragile è la pretesa attribuzione a LONGOMONTANO che poggia su un inaccurato resoconto di un tal Anthony WOODS secondo cui NEPERO avrebbe appreso da CRAIG che in Danimarca era stato messo a punto, pare da LONGOMONTANO, un algoritmo per evitare i lunghi calcoli in astronomia legati a moltiplicazioni e divisioni. Alla richiesta di maggiori chiarimenti avanzata da NEPERO, CRAIG avrebbe risposto di non saper molto dell'invenzione se non che faceva ricorso a numeri in proporzione (*proportionable numbers*). Su questa

[18] Da non confondere con Gerhardt, da cui prende il nome la proiezione. Parleremo più a lungo di Nicolaus MERCATOR nel Capitolo 6.

[19] not without a long train of Consequences and Complication of Proportions, whereby the evidence of the Demonstration is in a great measure lost, and the Reader wearied before he attains it.

informazione NEPERO lavorò presentando a CRAIG, alcune settimane dopo la prima visita, una bozza della *Descriptio*. Il racconto non è abbastanza chiaro per essere preso sul serio in quanto le parole di CRAIG potevano applicarsi tanto ai logaritmi quanto alle formule di prostaferesi che erano utilizzate da BRAHE e dai suoi collaboratori, tra i quali figura proprio LONGOMONTANO. Come ulteriore confutazione si può opporre il fatto che LONGOMONTANO sopravvisse trenta anni a NEPERO, un tempo sufficiente per avanzare diritti di priorità, cosa che invece non si verificò.

L'attribuzione a BÜRGI merita più attenzione perché egli pubblicò nel 1620 a Praga le *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen*. BÜRGI è un personaggio singolare, nato a Lichtensteig nel cantone di San Gallo in Svizzera nel 1552. Della sua formazione non si sa molto. È certo che non conoscesse il latino, il che contribuì ad ostacolare la diffusione della sua opera sui logaritmi, redatta in tedesco; la sua fama è legata all' eccellente abilità manuale, alle doti di astronomo e, soprattutto al talento nel costruire orologi astronomici che gli procurò un posto alle corti di Praga e di Cassel dove si trovava nel 1579 a servizio di GUGLIELMO IV, langravio di Assia, come assistente dell'astronomo ROTHMAN che ne parla in una lettera a BRAHE come di un nuovo ARCHIMEDE. L'abilità matematica di BÜRGI è attestata da KEPLERO che ne certifica il decisivo contributo per venire a capo di un problema di trigonometria che lo aveva molto impegnato. Certamente le *Progress Tabulen* restano un'opera enigmatica di BÜRGI, fin dal frontespizio che reca scritto

Die ganze rote zahl 230 270 022
Die ganze schwarze Zahl 1000 000 000

Su due colonne BÜRGI riporta i *numeri rossi* del tipo $10N$ a cui affianca i *numeri* neri, posti in progressione geometrica del tipo $10^8(1+10^{-4})^N$: si tratta in effetti di una tabella di *antilogaritmi* in quanto concepita per trovare un numero a partire dal suo logaritmo. Vi sono elementi che lasciano pensare ad un procedimento simile a quello seguito da NEPERO ma ciò che influì negativamente sulla diffusione delle *Tabulen* fu l'assenza di ogni spiegazione (*unterricht*) del modo in cui le tavole erano state ottenute, contrariamente a quanto promesso all'inizio. Tali spiegazioni furono trovate fortuitamente solo nel 1856 da GIESWALD, un professore di liceo di DANZICA che trovò il manoscritto di BÜRGI in una biblioteca cittadina. Ora, sembra certo che anche BÜRGI abbia dedicato molti anni a completare le tavole: una stima possibile è fornita da Beniamin BRAMER, cognato di BÜRGI con il quale lavorò negli anni 1603-1611, che afferma come proprio in quegli anni BÜRGI stesse lavorando alle *Tabulen*. La seconda testimonianza viene da KEPLERO che nell'introduzione alle *Tabulae Rudolphinae* del 1627 afferma

Se non ti sembra opinabile dedurre, dallo stesso principio caratteristico dei logaritmi, una specie di numero adatta al calcolo, a cui viene assegnato un logaritmo, eccoti il vertice di una logistica antica che svolge il compito in modo molto più agevole: questo vertice della logistica era stato introdotti da Jobst Bürgi molti anni prima della pubblicazione di Nepero. Tuttavia quest'uomo,

custode ed assassino dei propri segreti, uccise il feto nel grembo non pubblicando i risultati ottenuti.[20] (KEPLERO, *Tabulae Rudolphinae. Cfr.* p.102 di [17])

Il periodo sottolineato evidenzia come BÜRGI avesse lavorato alle sue tavole prima del 1614 ma ciò non è sufficiente per attribuire a lui la priorità perché, come visto in precedenza, vi sono documenti che mostrano come anche NEPERO abbia lavorato per lungo tempo alle tavole prima di pubblicare la *Descriptio.* È peraltro difficile supporre che uno dei due autori abbia proceduto alla stesura delle tavole dopo aver preso visione del lavoro dell'altro. Sembra equilibrato il giudizio di CAJORI che, a chiusura di [17], concede che BÜRGI abbia scoperto i logaritmi indipendentemente da NEPERO. Tuttavia, la mancata pubblicazione delle istruzioni per comprendere le tavole gli ha fatto perdere ogni influenza sul lavoro di matematici ed astronomi delle generazioni successive, lasciando dunque campo libero a NEPERO come responsabile di un mutamento epocale che ha segnato la storia della matematica. Concludiamo con un paio di osservazioni sul sistema logaritmico proposto da BÜRGI. Anzitutto, mentre la funzione $\mathrm{nl}\,(x)$ è decrescente, l'analoga funzione logaritmica di BÜRGI è crescente [15], visto l'uso di una progressione geometrica con ragione leggermente *maggiore* dell'unità. Una seconda osservazione riguarda le fonti di BÜRGI. Dalla lettura delle istruzioni portate alla luce da GIESWALD emerge che BÜRGI fosse a conoscenza dell'*Arithmetica Integra* di STIEFEL da cui trasse l'ispirazione necessaria per escogitare il proprio sistema di logaritmi.

2.5 Testi originali

Testo 2.2 *(*NEPERO *Descriptio, in [9] pp.295-296)* Definitio 1. Linea aequaliter crescere dicitur, quum punctus eam describens aequalibus momentis per aequalia intervalla progreditur.

Corollarium. Unde hoc incremento quantitates aequidifferentes temporibus aequidifferentibus produci est necesse.

Definitio 2. Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens aequalibus momentis segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas, a quibus abscinduntur.

Corollarium. Unde hoc aequalibus momentis decremento ejusdem etiam rationis proportionales lineas relinqui est necesse.

Definitio 3. Quantitates surdae seu numero inexplicabiles numeris quam proxime definiri dicuntur, quum numeris majusculis, qui a veris surdarum valoribus unitate non differant, definiuntur.

Definitio 4. Synchroni motus sunt, qui simul et eodem tempore fiunt.

Definitio 5. Quum quolibet motu et tardior et velocior dari possit, sequetur necessario, cuique motui aequivelocem dari posse.

[20] Sin opinabile tibi est, ex ipso logarithmi characteristico principio arguere speciem logisticam numeri, cui assignatur logarithmus, ecce tibi apices logisticae antiquae, qui praestant hoc longe commodius: qui etiam apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem Neperianam viam praeiverunt ad hos ipsissimos logarithmos. Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicus educavit.

Definitio 6. Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus, quam proxime definiens linea, quae aequaliter crevit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono atque initio aequiveloce.

Corollarium. Unde sinus totius 10000000 Nullum seu 0 est logarithmus, et per consequens numerorum majorum sinu toto logarithmi sunt nihilo minoris.

Propositio 1. Proportionalium numerorum aut quantitatum aequidifferentes sunt logarithmi.

Propositiones 2 & 3. Ex trium proportionalium logarithmis duplum secundi seu medii, minutum primo, aequatur tertio, et duplum secundi aequatur aggregato extremorum.

Propositiones 4 & 5. Ex quatuor proportionalium logarithmis aggregatum secundi et tertii, minutum primo, aequatur quarto, et aggregatum mediorum aequatur aggregato extremorum.

Propositio 6. Ex quatuor continue proportionalium logarithmis triplum alterutrius mediorum aequatur aggregato extremi remoti et dupli vicini.

Bibliografia

[1] C.G. Knott (curatore): *Napier Tercentenary Memorial Volume* Longmans, Londra, (1915).

[2] P. Hume Brown: John Napier of Merchiston. In [1], pp. 33-51.

[3] G.A. Gibson: Napier and the invention of logarithms. In *The Handbook of the Napier Tercentenary Exhibition on Modern Instruments and Methods of Calculation*, edito da E.M. Horsburgh, ristampa del 1982 di Tomash Publisheres, S. Francisco pp. 1-16.

[4] C. Naux: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler. Tome I. La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables.* Blanchard, Parigi, (1966).

[5] J.E.A. Steggall: A short account of the treatise 'De Arte Logistica'. In [1], pp. 145-161.

[6] F. Cajori: *History of Mathematical Notations I. Notations in Elementary Mathematics.* Open Court, La Salle, Illinois (U.S.A.), (1974); ristampa dell'originale pubblicato nel 1928 dalla stessa casa editrice.

[7] E.W. Hobson: *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614* Cambridge University Press (1914).

[8] I. Neper: *Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas.* Fac-simile dell'originale del 1617, O. Zeller, Osnabrück, (1966).

[9] J. Kepler: *Johannis Kepleri astronomi Opera Omnia*, Vol VII, a cura di Ch. Frisch. Heyder & Zimmer, Francoforte, (1868).

[10] J.W.L. Glaisher: On early tables of logarithms and the early history of logarithms. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **48**, 151–192, (1920).

[11] I. Neper: *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio; et Eorum ad Naturales ipsorum numeros habitudines; Una cum Appendice de alia Eaque Prestantiore Logarithmorum Specie Condenda.* B. Vincent, Lione, (1620).

[12] R. Ayoub: What is a Napierian logarithm? *Amer. Math. Monthly* **100**, 351–364, (1993).

[13] N. Mercator: *Logarithmotechnia*. Fac-simile dell'edizione pubblicata a Londra nel 1668. G. Olms, Hildesheim, (1975).

[14] A. Aubry: Les logarithmes avant Neper. *L'Enseignement Mathém.* **8**, 417–432, (1906).

[15] F. Cajori: History of the exponential and logarithmic concepts. I. From Napier to Liebnitz and John Bernoulli I. *Amer. Math. Monthly* **20**, 5–14; 35–38, (1913).

[16] H.H. Goldstine: *A History of Numerical Analysis From the 16th Through the 19th Century.* Springer, New-York, (1977).

[17] [C15] F. Cajori: Algebra in Napier days and alleged prior inventions of logarithms. In [1], pp. 93-109.

[18] [H95] E. Halley: An easie demonstration of the analogy of the logarithmick tangents to the meridional line or sum of the secants: with various methods for computing the same to the utmost exactness. *Phil. Trans.* **19**, 202–214, (1695-1697),.

Capitolo 3

Henry Briggs

3.1 La vita e l'incontro con Nepero

Se Nepero fu un matematico dilettante, il continuatore della sua opera fu invece di estrazione accademica. Si tratta del matematico inglese Henry Briggs (1561-1630). Iniziò gli studi a Warleywood nello Yorkshire, suo paese natale, per poi perfezionarli a Cambridge, presso il St.John's College dove ottenne il titolo di Batchelor of Arts nel 1581 e quello di Master of Arts nel 1585. Negli anni universitari palesò la sua predisposizione per gli studi matematici che coltivò negli anni della sua permanenza a Cambridge come *examiner*, *lecturer* ed infine *reader* fino al marzo 1596 quando divenne il primo professore di geometria presso il Gresham College di Londra, fondato da appena due anni. Del suo lavoro in questi anni resta una tavola per trovare l'altezza del polo nota la declinazione magnetica. Da una lettera dell'agosto 1610 indirizzata all'arcivescovo di Armagh, James Usher, sappiamo che Briggs era impegnato su problemi astronomici: *engaged in the subject of the eclipses*.

L'incontro con Nepero o, meglio, con i suoi logaritmi, avvenne nel 1615 e se ne ha notizia dall'altra lettera superstite del carteggio tra Briggs e Usher. In essa Briggs scrive

Con i suoi nuovi ed ammirabili logaritmi, Nepero, signore di Merchiston, mi ha impegnato anima e corpo. Spero di incontrarlo la prossima estate, a Dio piacendo, perché non ho mai letto un libro che mi sia piaciuto più di questo e mi abbia fatto meravigliare di più.[1] (*cfr.* p.2 di [1])

L'incontro tra Briggs e Nepero avvenne nell'estate del 1615 quando Briggs, libero da impegni accademici, potè recarsi in Scozia. L'esito dell'incontro fu una sorta di passaggio di consegne tra Nepero che ormai sentiva venir meno le forze e Briggs che ereditava l'onere di perfezionare la scoperta di Nepero. In effetti, ad entrambi era balenata l'opportunità di una modifica del sistema origi-

[1] Naper, lord of Markinston, hath set my head and hands a work with his new and admirable logarithms. I hope to see him this summer, if it please God, for I never saw a book, which pleased me better, and made me more wonder.

nario per eliminare l'ingombrante termine nl (1) = 161 180 957 che compariva un po' dovunque. Abbiamo già riportato (§2.2) il brano dell'introduzione alla *Rabdologia* in cui NEPERO parla di questo passaggio di consegne e, soprattutto, in cui allude ad una *Logarithmorum speciem aliam multo prestantiorem*, destinata a soppiantare quella presentata nella *Descriptio*. Per capire di cosa si tratta, integriamo questo passo con l'indirizzo al lettore contenuto nell'*Arithmetica Logarithmica* di BRIGGS

Non c'è da sorprendersi che questi logaritmi siano diversi da quelli che l'illustrissimo signor Barone di Merchiston pubblicò nel suo Canon mirifici. *Infatti, mentre ne stavo spiegando la dottrina agli uditori delle mie lezioni pubbliche a Londra presso il Gresham College, compresi che sarebbe stato molto più agevole se, fermo restando il valore* 0 *per il logaritmo del seno totale (come nel* Canon mirifici*),si fosse attribuito il valore 10000000000 al logaritmo della decima parte del seno totale, cioè al seno di 5 gradi, 44 primi, 21 secondi e scrissi a tal proposito all'autore stesso (Nepero) e non appena nel corso dell'anno sono stato libero dagli impegni didattici, mi sono recato ad Edimburgo dove sono stato accolto da lui in modo estremamente cordiale e mi sono trattenuto per un mese intero. Mentre stavamo discutendo del cambiamento da apportare ai logaritmi, disse che anche lui lo riteneva opportuno e che lo avrebbe desiderato operare: quelli di cui aveva curato l'edizione erano destinati ad essere sostituiti da altri più comodi cui avrebbe lavorato compatibilmente con gli impegni e lo stato di salute. Egli riteneva di dover apportare questo cambiamento: che 0 fosse il logaritmo dell'unità e 10000000000 quello del seno totale: proposta che non potei far altro che riconoscere come di gran lunga la più comoda.*

Abbandonati dunque quelli che avevo già preparato, su suo consiglio iniziai a pensare seriamente al loro calcolo: l'estate successiva ho nuovamente raggiunto Edimburgo per mostrargli i logaritmi contenuti in quest'opera. Mi sarei recato da lui molto volentieri l'estate successiva per la terza volta, se Dio avesse voluto lasciarlo ancora in vita.[2](BRIGGS, *Arithmetica Logarithmica*, in [2], p.168.)

Questo passo di BRIGGS è interessante perché testimonia una prima modifica apportata ai logaritmi neperiani che è alla base della tavola pubblicata da Brig-

[2]Quod Logarithmi isti diversi sunt ab iis, quos Clarissimus vir Baro Merchistonii in suo edidit Canone mirifico, non est quod mireris. Ego enim cum meis auditoribus Londini, publice in Collegio Greshamensi, horum doctrinam explicarem; animadverti multo futurum commodius, si Logarithmus Sinus totius servaretur 0 (ut in Canone mirifico) Logarithmus autem partis decimae ejusdem sinus totius, nempe sinus 5 graduum, 44, m, 21, s. esset 10000000000 atque ea de re scripsi statim ad ipsum authorem, et quamprimum per anni tempus, et vacatione a publico docendi munere licuit, profectus sum Edinburgum; ubi humanissime ab eo acceptus haesi per integrum mensem. Cum autem inter nos de horum mutatione sermo haberetur; ille se idem dudum sensisse, et cupivisse dicebat: veruntamen istos, quos jam paraverat edendos curasse, donec alios, si per negotia et valetudinem liceret, magis commodos confecisset. Istam autem mutationem ita faciendam censebat, ut 0 esset Logarithmus unitatis, et 10000000000 sinus totius: quod ego longe commodissimum esse non potui non agnoscere.

Coepi igitur ejus hortatu, rejectis illis quos antea paraveram, de horum calculo serio cogitare: et sequenti aestate iterum profectus Edinburgum, horum quos hic exhibeo praecipuos, illi ostendi. Idem etiam tertia aestate libentissime facturus, si Deus illum nobis tamdiu superstitem esse voluisset.

gs nel 1617 sotto il titolo di *Logarithmorum Chilias Prima*[3]. Dal passo emerge anche che BRIGGS riconosce come superiore la proposta di NEPERO di considerare 0 come logaritmo dell'unità al punto da fargli prendere la risoluzione di interrompere il calcolo dei logaritmi con lo schema seguito fino a quel momento. In cosa consiste la prima modifica operata da BRIGGS? Per comprenderlo, torniamo alla costruzione di NEPERO e supponiamo [2] che all'istante iniziale i punti g ed a non abbiano la stessa velocità ma che abbiano velocità v_0 e v_1, rispettivamente. Riprendendo le considerazioni svolte in 2.3, le equazioni di moto dei punti P e Q sono

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_0}{r}x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dt} = v_1$$

da cui segue

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_1}{v_0}\frac{r}{x}$$

per cui la nuova funzione logaritmica $y(x) = \mathrm{bl}_1(x)$ introdotta da BRIGGS è

$$\mathrm{bl}_1(x) = -kr\ln(x) + c$$

dove si è posto $k := v_1/v_0$ e c è la costante di integrazione. I vincoli imposti da BRIGGS alla funzione $\mathrm{bl}_1(x)$ sono

$$\mathrm{bl}_1(r) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{bl}_1(\frac{r}{10}) = 10^{10}$$

che richiedono $c = kr\ln(r)$ e $-kr\ln(r/10) + c = 10^{10}$ da cui si ottiene

$$\mathrm{bl}_1(x) = \frac{10^{10}}{\ln(10)}\ln(\frac{r}{x}) = 10^{10}\log(\frac{r}{x})$$

dove $\log(x)$ indica il logaritmo decimale comunemente usato e, nell'ultimo passaggio, si è fatto uso della formula per il cambiamento di base. In questo sistema, dove $r = 10^{10}$, $\mathrm{bl}_1(1) = 10 \cdot 10^{10} = 10^{11}$ e proprio qui risiede la semplificazione rispetto al lavoro originale di NEPERO perché ora, quando è necessario aggiungere o togliere $\mathrm{bl}_1(1)$, è sufficiente aumentare o diminuire di 1 la undicesima cifra, partendo da destra, un bel vantaggio rispetto all'aggiunta di 161180957.

Nel 1619 Sir Henry SAVIL Rettore (*Warden*) del Merton College di Oxford finanziò due cattedre ad Oxford in astronomia e in geometria. La prima fu assegnata a BAINBRIDGE mentre la seconda fu offerta a BRIGGS che, accettando, divenne il primo professore di geometria ad Oxford. BRIGGS sostituì proprio SAVIL che aveva tenuto parte di un ciclo di lezioni sugli *Elementi* di EUCLIDE e prese servizio l'8 gennaio 1620, proseguendo l'esposizione degli *Elementi* dal punto in cui l'aveva lasciata SAVIL. Egli mantenne ancora l'incarico al Gresham

[3] È questa una tavola contenente i logaritmi dei primi mille numeri, come afferma il titolo stesso, visto che *chilias* deriva dal greco *χιλιάς*, in numero di mille.

College fino alle dimissioni presentate il successivo 25 luglio. Stabilitosi al Merton College, BRIGGS pubblicò nel 1622 un breve trattato sul passaggio a Nord-Ovest dal titolo *Northwest Passage to the South Sea*, a mostrare il grande interesse per i problemi di navigazione, cruciali in un periodo di grande espansione per l'Inghilterra. Nel 1624 viene pubblicata l'*Arithmetica Logarithmica*, dove troviamo il contributo più importante di BRIGGS allo sviluppo dei logaritmi. È un'opera articolata metà della quale –i primi sedici capitoli– sono interamente dedicati alla definizione di logaritmo ed alla spiegazione del metodo seguito da BRIGGS nella compilazione delle tavole, mentre i restanti sedici capitoli sono dedicati alle applicazioni, soprattutto in geometria, pur trovando spazio altri argomenti come, ad esempio, i numeri di FIBONACCI. Il lungo sottotitolo dell'-opera indica che BRIGGS ha calcolato 30000 logaritmi con 14 cifre decimali per gli interi da 1 a 20000 e per quelli tra 90000 e 100000, promettendo non solo di fornire indicazioni su come completare le tavole ma anche fornendo il volonteroso compilatore della carta opportunamente suddivisa in colonne atte allo scopo. Il completamento della tabella avvenne per altra via in quanto l'olandese Adriaan VLACQ (1600 ca.-1664) coadiuvato da Ezechiel DE DECKER (1603-1647) lo portò a termine pubblicando le tavole nel 1628. All'autore di quest'opera che saccheggia e rimaneggia l'*Arithmetica Logarithmica*—al punto che BRUCE ne parla come di una *edizione pirata*—va riconosciuto il merito di aver completato il lavoro iniziato da BRIGGS che però ebbe a lamentarsi del fatto che VLACQ ridusse da 14 a 10 le cifre significative dei logaritmi. Sorge la domanda su perché BRIGGS non abbia completato egli stesso il lavoro, coordinato magari da colleghi. In effetti egli si era predisposto all'imponente compito coinvolgendo PELL e WARNER, ma VLACQ fu più rapido e tolse a BRIGGS l'onere. Fatto sta che BRIGGS fornisce nel capitolo XII dell'*Arithmetica* indicazioni dettagliate su come procedere nel processo di interpolazione, quasi a volere "appaltare" l'impresa (giova ricordare che nel 1624 BRIGGS aveva già compiuto i 60 anni) per dedicare le energie residue ad un altro progetto che gli stava a cuore, quello di approfondire le applicazioni dei logaritmi alla trigonometria sferica e a cui intendeva dedicare un'opera in due libri, il *De Docrtina Triangulorum*, del quale completò solo il primo mentre il secondo venne scritto da Henry GELLIBRAND e pubblicato da VLACQ a Gouda sotto il titolo di *Trigonometria Britannica*. BRIGGS morì il 26 gennaio 1630 al Merton College dove venne sepolto, nel coro della cappella.

3.2 I logaritmi di BRIGGS nell'*Arithmetica Logarithmica*

Esaminiamo in dettaglio la struttura dell'opera principale di BRIGGS sui logaritmi seguendo la versione commentata da Ian BRUCE [1] che, oltre a riportare l'originale in latino ne offre una traduzione inglese moderno e fornisce per ognuno dei trentadue capitoli una sinossi corredata da una serie di note e commenti. Come accennato in precedenza, la parte dedicata alla definizione dei logaritmi e

all'analisi delle tecniche per ottenere le tavole occupa i capitoli I-XVI, mentre i capitoli successivi sono dedicati alle applicazioni. In questa sezione ci concentriamo sui primi quattro capitoli che contengono gli elementi della teoria. Il primo capitolo contiene la definizione di logaritmo, in stile neperiano[4]

I logaritmi sono numeri che, associati a numeri proporzionali, mantengono uguali differenze.[5] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-8)

Parafrasando un poco, i logaritmi costituiscono una progressione *aritmetica* posta in corrispondenza ad una *geometrica*. Come Nepero, anche Briggs illustra definizioni e proposizioni con esempi che, tra l'altro, a volte fungono da surrogato di dimostrazione. In questo caso Briggs illustra il concetto di logaritmo con la tabella seguente dove accanto ai numeri della forma 2^n ($n = 0, 1, ...7$) compaiono quattro diversi sistemi di logaritmi, alcuni dei quali (colonne $A - C$) sono crescenti mentre uno è decrescente (colonna D):

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
numeri proportionales	Logar.	Logar.	Logar.	Logar.

Come puoi qui vedere, si possono associare come logaritmi i numeri indicati con A, B, C, oppure D. O ancora degli altri, a patto di conservare questa proprietà, cioè che le differenze dei logaritmi, vuoi crescenti vuoi decrescenti, si mantengano uguali ogni volta che i numeri cui essi sono associati sono in proporzione. Per questo non è sconveniente riferirsi ai logaritmi come a dei compagni equidifferenti di numeri proporzionali.[6] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-8)

Alla definizione Briggs aggiunge due lemmi elementari, validi per tutti i sistemi di logaritmi ammissibili.

Lemma primo. Se sono assegnati numeri arbitrari ma che crescono o decrescono uniformemente, le loro differenze sono proporzionali ai loro intervalli.[7] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-8)

[4] In tutte le citazioni indicherò l'*Arithmetica Logaritmica* con la sigla *AL*. Oltre che al testo di Bruce mi sono servito della versione di Vlacq [3] del 1628.

[5] Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant differentias.

[6] Poterunt ijs pro Logarithmis adjungi numeri insigniti A, vel B, vel C, vel D, ut hic vides. Vel alij, modo hoc unicum servetur, ut Logarithmorum, una crescentium vel decrescentium differentiae sint aequales, quoties numeri quibus sunt adjuncti sunt proportionales. Ut non incommode Logarithmi dici possint, numerorum proportionalium comites aequidifferentes.

[7] Lemma primum. Si quotlibet numeri statuantur aequaliter crescentes vel decrescentes eorum differentiae sunt intervallis eorundem proportionales.

Come abitudine del tempo, all'enunciato non segue una dimostrazione formale, quanto uno o più esempi convincenti che servono ad aprire la mente del lettore. In questo caso, Briggs si riferisce alla tabella precedente e nota

Così si consideri il primo, il terzo e l'ottavo dei numeri indicati con D: 35.29.14. Tra il primo ed il terzo vi sono due intervalli, tra il terzo e l'ottavo ve ne sono cinque. Dico che la differenza tra il primo ed il terzo, cioè 6, sta alla differenza 15 tra il terzo e l'ottavo, come due sta a cinque.[8] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-8)

All'esempio segue poi una applicazione che riportiamo per esteso per render conto del modo di procedere in un'epoca in cui le notazioni sintetiche cui siamo abituati erano solo agli inizi [9]

Pertanto, siano assegnati i logaritmi di due elementi qualsiasi di una serie di numeri in progressione continuata; potremo trovare il logaritmo di un qualsivoglia elemento della progressione. È infatti assegnata la differenza di questi numeri e del terzo da uno qualsiasi dei primi due; è allora assegnata la differenza dei logaritmi assegnati. Dati infatti due intervalli e la differenza dei logaritmi assegnati, sarà possibile trovare l'altra differenza proporzionale dei logaritmi assegnato ed incognito. Siano ad esempio assegnati i numeri in proporzione continua $4.6.9.13\frac{1}{2}.20\frac{1}{4}.30\frac{3}{8}$ *e siano 060206 e 095424 i logaritmi del primo e del terzo numero dato, cosicché la loro differenza è 035218. È richiesto il logaritmo del sesto numero della progressione,* $30\frac{3}{8}$*. Gli intervalli noti tra il primo ed il terzo numero assegnato sono due, mentre sono tre gli intervalli tra il terzo ed il sesto; la differenza nota dei logaritmi è 035218 ed il quarto numero proporzionale richiesto, 0528273, è la differenza dei logaritmi cercata che, sommata al logaritmo assegnato del terzo numero della serie, fornisce 148251 come logaritmo richiesto del sesto numero della serie.*[10] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-8)

Il capitolo si chiude con un secondo lemma elementare

Lemma secondo. Dati quattro numeri con la proprietà che il primo supera il secondo della stessa quantità di cui il terzo supera il quarto, allora la somma del primo e del quarto è uguale alla somma del secondo e del terzo, e viceversa.

---

[8] Ut in numeris D signatis sumantur primus, tertius & octavus, 35.29.14. Inter primum & tertium sunt duo intervalla, inter tertium & octavum sunt quinque intervalla. Aio differentiam primi & tertij 6, esse ad differentiam tertij & octavi 15, ut duo ad quinque.

[9] I valori numerici dei logaritmi utilizzati in questo esempio provengono dalla tabella ricavata da Briggs. Lo zero iniziale è la caratteristica e in notazione moderna andrebbe scritto 0.60206.

[10] Idcirco in serie numerorum continue proportionalium, datis duorum quorumcunque Logarithmis; poterimus alterius cuiusvis Logarithmum invenire. Datur enim horum numerorum inter se intervallum & tertij ab horum alterutro, datur etiam datorum Logarithmorum differentia. Datis ergo duobus intervallis & Logarithmorum datorum differentia, altera dati & quaesiti Logarithmorum differentia proportionalis inventa erit. Ut sunto $4.6.9.13\frac{1}{2}.20\frac{1}{4}.30\frac{3}{8}$ continue proportionales, & sint Logarithmi primi & tertij numeri dati, & 060206, & 095424, eorum differentia 035218. Quaeritur Logarithmus numeri $30\frac{3}{8}$, sexti nempe datorum. Data intervalla inter primum numerum & tertium sunt duo, inter tertium & sextum tria; data Logarithmorum differentia 035218, quartus quaesitus numerus proportionalis 0528273 est differentia Logarithmorum quaesita, quae tertij numeri dato Logarithmo adiecta, dat 148251 Logarithmum sexti numeri quaesitum.

Così nei numeri 9.5.15.11 la somma sia dei medi che degli estremi è 20.[11] (*AL* Cap. I, in [1], p.1-9)

Nel Capitolo II, intitolato *Logarithmus unitatis sit 0*, Briggs seleziona tra i possibili sistemi logaritmici quelli che gli appaiono come più convenienti, cioè a dire quelli che hanno zero come logaritmo dell'unità.

Benché sia lecito adattare più specie di logaritmi agli stessi numeri in questo modo, tuttavia ve ne è una che è più comoda di tutte e consiste nel porre uguale a zero il logaritmo dell'unità.[12] (*AL* Cap. II, in [1], p.2-6)

Una prima conseguenza di questa scelta è che il logaritmo coincide od è proporzionale all'esponente (*index*) n che compete ad un numero della forma q^n in una progressione geometrica.

Come logaritmi di un numero qualsiasi si possono utilizzare sia i numeri che vengono detti Indici, (...) sia numeri proporzionali a questi indici comuni.[13] (*AL* Cap. II, in [1], p.2-6)

Le conseguenze principali della scelta di Briggs riguardano le proprietà algebriche dei logaritmi così ottenuti che, finalmente, trasformano prodotti in somme:

Il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.[14] (*AL* Cap. II, in [1], p.2-6)

La dimostrazione poggia sulla proporzione

$$1 : y = x : xy$$

da cui segue, per la definizione di logaritmo, che

$$\mathrm{bl}\,(1) - \mathrm{bl}\,(y) = \mathrm{bl}\,(x) - \mathrm{bl}\,(xy)$$

e, *siccome* $\mathrm{bl}\,(1) = 0$, si ha effettivamente

$$\mathrm{bl}\,(xy) = \mathrm{bl}\,(x) + \mathrm{bl}\,(y)\ :$$

Il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori. Infatti, per la proprietà della moltiplicazione, il rapporto tra l'unità ed il moltiplicatore è sempre uguale a quello tra moltiplicando e prodotto, dalla definizione di logaritmo segue che i logaritmi di numeri proporzionali sono equidifferenti: è evidente in virtù del secondo lemma che i logaritmi del primo e quarto termine cioè l'unità ed il prodotto uguagliano i logaritmi del secondo e

[11] Lemma secundum. Si e quatuor numeris, quantum primus superat secundum tantundem tertius superet quartum: erit summa primi & quarti, aequalis summae secundi & tertij: & contra. vt 9.5.15.11 summa tam mediorum quam extremorum est 20.

[12] Licet autem possimus Logarithmorum plures species ijsdem numeris ad hunc modum aptare, erit tamen commodissimum unica tantum uti specie, eaque quae cyphram ponit pro Logarithmo unitatis.

[13] Omnium numerorum Logarithmos esse, vel eos numeros qui Indices appellantur, (...) vel hisce usitatis Indicibus proportionales

[14] Logarithmum facti aequari Logarithmis facientium

del terzo, cioè del moltiplicando e del moltiplicatore. E siccome il logaritmo dell'unità è zero, è evidente che il logaritmo del solo prodotto è uguale ai logaritmi dei fattori.[15] (*AL* Cap. II, in [1], p.2-6)

Alla dimostrazione verbale ora riportata fa seguito, come d'abitudine, un esempio numerico che convinca il lettore. Di seguito, Briggs enuncia l'estensione della regola al caso di prodotti formati da più di due fattori. Ripetendo l'argomento usato per il prodotto, Briggs dimostra l'analoga proprietà per la divisione

Il logaritmo del dividendo è uguale al logaritmo del divisore più quello del quoto.[16](*AL* Cap. II, in [1], p.2-7)

Per individuare un sistema di logaritmi in modo *univoco* occorre fissare il valore del logaritmo di un numero distinto dall'unità. È questo l'obiettivo del Capitolo III dove, per comodità, Briggs fissa come riferimento il numero 10 cui attribuisce il valore 1,00000,00000,0000 (lo zero è ripetuto 14 volte) per contenere nell'intervallo $[0, 1]$ un numero molto grande di medi proporzionali e mantenere una grande precisione nei risultati.

Assegnato il valore al logaritmo dell'unità, il passo successivo è la ricerca di un altro numero di uso molto frequente e sommamente necessario, ed attribuiamogli un logaritmo comodo che sia ad un tempo molto facile da descrivere ogni volta che serve e da tenere a mente. Nessun numero sembra più indicato allo scopo che il dieci, il cui logaritmo sia 1,00000,00000,0000. I numeri principali sono così l'unità ed il dieci ed i loro logaritmi 0 e 1,00000,00000,0000. La scelta di questi quattro numeri non è guidata da alcuna necessità ma dall'arbitrio; né da essa ci si attende la certezza delle operazioni aritmetiche quanto la loro semplicità. (...) I logaritmi rimanenti (per decidere i quali non è lecito ad alcuno agire secondo arbitrio) vanno tutti adattati a questi primi affinché ci sia consenso dall'inizio alla fine, obbediscano alle stesse leggi e siano coerenti con questi ogni volta che l'utilizzo lo richiede.[17] (*AL* Cap. III, in [1], p.3-5)

A questo punto, pertanto, non ci sono altri gradi di libertà da giocare ed occorre determinare i logaritmi dei numeri restanti di cui Briggs dà un sag-

[15]Logarithmum facti aequari Logarithmis facientium. Cum enim ex multiplicationis lege, eadem semper sit ratio Unitatis ad Multiplicantem, quae est Multiplicati ad Factum, & ex ipsa Logarithmorum definitione constet, proportionalium Logarithmos esse aequidifferentes: patet per secundum Lemma, Logarithmos primi & quarti, id est unitatis & facti, aequari Logarithmis secundi & tertij, id est, multiplicantis et multiplicati. Et cum unitatis Logarithmus sit 0, manifestum est facti solius Logarithmum, aequari Logarithmis facientium.

[16]Logarithmum divisi aequari logarithmis divisoris & quoti.

[17]Unitatis Logarithmo constituto, proximum est ut alium quaeramus numerum, cuius usus est frequentissimus & maxime necessarius, eique tribuamus Logarithmum aliquem commodum, qui facillime & describi quoties opus fuerit & memoria teneri poterit. Ex omnibus autem numeris, nullis videtur Denario prestantior, aut huic negotio accommodatur, cuius Logarithmus esto 1,00000,00000,0000. Sunto igitur numeri praecipui Unitatis et Denarius, eorumque Logarithmi 0, & 1,00000,00000,0000. Primos autem hosce quatuor statuimus, non necessitate aliqua adducti, sed pro arbitrio; nec operationum Arithmeticarum certitudinem spectantes (....) sed facilitatem. Reliqui Logarithmi (cum in ijs costituendis non sit integrum quicquam agere pro arbitrio) sunt omnes hisce primis ita aptandi ut summo consensu a principio ad finem usque, ijsdem legibus obtemperent, eundemque quoties usus postulat effectum dent.

gio calcolando i logaritmi di potenze–intere e decimali– di 10 che sono numeri *razionali*, proponendo la seguente tabella

A	B	A	C	B
1	0	1	1	0
10	100000	$\ell\ell.10$	1$\underline{77827941}$	025000
100	200000	$\ell.10$	3$\underline{16227766}$	050000
1000	300000	$\ell\ell.1000$	5$\underline{62341325}$	075000
10000	400000	10	10	100000
		$\ell\ell.100000$	17$\underline{7827941}$	125000
		$\ell.1000$	31$\underline{6227766}$	150000
		$\ell\ell.1000000$	56$\underline{2341325}$	175000
		100	100	200000

dove nelle colonne indicate con A compaiono numeri in progressione geometrica (nella prima colonna la ragione è 10, nella seconda è $\sqrt[4]{10}$), in quelle indicate con B i rispettivi logaritmi espressi da numeri razionali[18] ed nella colonna C compaiono gli allineamenti decimali di quelli espressi in colonna A. La tabella mostrata è interessante per due aspetti notazionali. Anzitutto, la notazione $\ell.n$ per indicare la radice quadrata di un numero n. La ℓ sta per *latus* con allusione al fatto che se n è l'area di un quadrato, la sua radice quadrata ne rappresenta appunto il lato. Il simbolo $\sqrt{n}$ comparirà nell'edizione di VLACQ ma era stato introdotto in precedenza da RUDOLFF ([1] §148). Similmente $\ell\ell.n$ significa $\sqrt[4]{n}$. L'altro aspetto interessante è la notazione per la parte decimale dei numeri di colonna B che è sottolineata: 17$\underline{7827941}$ equivale a 17,7827941. Vediamo dunque un esempio della difficoltà che la notazione neperiana ebbe ad imporsi. Infine, BRIGGS nota che i numeri che non stanno in una progressione geometrica comprendente 1 e 10 debbono avere logaritmi irrazionali che possono essere approssimati bene quanto si voglia da numeri razionali.

Tutti gli altri numeri che non appartengono a questa progressione geometrica (alla quale appartengono i due numeri dati, l'unità ed il dieci) hanno logaritmi irrazionali che non possono essere espressi accuratamente né da numeri interi né dalle loro parti che sono dette frazioni. Benché però non conosciamo accuratamente tali numeri, potremo trovarne altri vicini a loro quanto vogliamo, se manteniamo per certo che tra i razionali e gli irrazionali non vi sia nulla.[19] (*AL* Cap. III, in [1], p.3-5)

Il Capitolo IV è molto breve e contiene la definizione di *caratteristica*, la parte intera del logaritmo di un numero n, che si ottiene diminuendo di una unità il numero di cifre (*notae*) della parte intera di n.

[18] Si ricordi che BRIGGS omette spesso il segno di separazione tra la parte intera e quella decimale.

[19] Reliqui omnes numeri qui in huiusmodi aliquam continue proportionalium serium (in qua dati duo numeri Unitatis & Denarius siti sunt) cadere non possunt, habent Logarithmos irrationales, qui neque in numeris integri neque in partibus quas fractiones appellant accurate exprimi poterunt. Licet autem eos accuratos habere non possimus, poterimus tamen eos invenire adeo veris propinquos, ut si usum spectemus inter rationales & irrationales nihil intersit.

Ma di tutti i logaritmi, i fondamentali sono quelli attribuiti all'unità ed al dieci e subito dopo vanno considerati quelli associati i termini associati alla progressione geometrica di ragione dieci che contiene i primi due numeri, cioè il cento, il mille, ecc. i quali sono formati solo da zero a parte la prima cifra verso sinistra, che potremo chiamare caratteristica che indica di quanti posti il numero intero avanza oltre al luogo delle unità. (...) La caratteristica di uno e tutti i numeri che hanno parte intera composta da una cifra è nulla. La caratteristica di dieci e di tutti i numeri la cui parte intera è composta da due cifre è pari ad uno; per i numeri da cento a mille è 2, da mille a diecimila è 3 e così via con la caratteristica che cresce sempre con il numero di cifre significative prima di quella delle unità.[20] (*AL* Cap. IV, in [1], p.4-2)

3.3 Omaggio a Nepero

Con il Capitolo V entriamo nel vivo della costruzione delle tavole logaritmiche. Qui Briggs rende omaggio al grande amico Nepero presentando il metodo per il calcolo dei logaritmi decimali di piccoli numeri primi che questi usava e che Briggs aveva già esposto nell'Appendice della *Constructio* da lui curata. Si tratta di un capitolo a sé stante, che non verrà richiamato in seguito e che testimonia la maestria adoperata per raggiungere l'obiettivo. Anzitutto, Briggs espone *per exempla* cinque lemmi sulle proprietà degli esponenti di potenze con la stessa base. Il primo lemma riguarda la proprietà associativa degli esponenti. Presi due interi distinti m ed $n > m$ ed un numero positivo a diverso da 1, la progressione $1, a, a^2, ..., a^m ... a^n ....$ contiene le sottoprogressioni $1, a^m, a^{2m}, ...$ e $1, a^n, a^{2n}, ...$ ed il termine n-esimo della prima coincide con il termine m-esimo della seconda.

Lemma primo. Se da una progressione geometrica A di termine iniziale pari all'unità si considerano due numeri qualsiasi $C = 8$ e $D = 32$ insieme ai loro indici 3 e 5; e se si formano altre due progressioni geometriche E ed F ancora di termine iniziale pari all'unità e termine immediatamente successivo pari ai numeri suddetti C e D, proseguendo fino al termine di posto pari a 3 (l'indice di C nella serie assegnata A) nella progressione F e similmente fino al termine di ordine 5, pari all'indice di D, nella progressione E; i termini così ottenuti in E ed F sono uguali. (....)[21]

[20] Logarithmorum autem omnium praecipui sunt ij qui Vnitati tribuuntur & Denario, istis vero proximi ijs numeris debentur qui in decupla ratione continuantur, nempe Centenario, Millenario, &c., qui omnes cyphris tantum describuntur praeter primam notam versum sinistram, quam Characteristicam appellare poterimus, quae nobis indicet quot notis numerus integer progreditur ultra locum Vnitatis. (...) Vnitatis nempe & omnium integrorum qui unica nota scribi poterunt (...) Characteristica est cyphra. Denarij vero & reliquorum usque ad Centenarium qui duabus notis sunt descripti Characteristica est 1, a Centenario vero ad Millenarium 2 a Millenario ad decies mille 3, & sic deinceps, crescente semper Characteristica pro numero locorum ultra locum Vnitatis.

[21] Lemma Primum. Si e serie numerorum ab unitate continue proportionalium A, sumatur duo quolibet numeri C 8 & D 32, & eorum Indices 3 & 5; & instituantur duae aliae continue proportionalium series E & F, in quibus dicti numeri C & D proximo ab unitate loco ponantur, & continuentur utraque series donec 3 (Index numeri C in data serie A) respondeat continue

Q	A	B	P	E	M	F	N
0	1	0	0	1	0	1	0
	2	1		8	1	32	1
	4	2		64	2	1024	2
	C 8	3	1	512	3	32768	3
	16	4		4096	4		
1	D 32	5		32768	5		
	64	6	2				
	128	7					
	256	8					
	512	9	3				
2	1024	10					
	2048	11					
	4096	12	4				
	8192	13					

A: prima progressione geometrica assegnata[22]
B: indici della stessa serie[23]
E: seconda progressione geometrica.[24]
M: valori degli indici della medesima, coincidenti con quelli in P.[25]
F: terza progressione, i cui indici N sono uguali a quelli in Q.[26] (*AL* Cap. V, in [1], p.5-12)

Il secondo lemma sostanzialmente dice che il numero di divisioni per a cui bisogna sottoporre un numero a^m per arrivare ad 1 è m.

Lemma secondo. Data una progressione geometrica di termine iniziale pari ad uno, e si divida un suo termine per la ragione tutte le volte possibili: il numero di divisioni sarà l'indice del dividendo e mostrerà la distanza del numero assegnato dall'unità ovvero il numero di intervalli compresi tra l'unità ed il dividendo. Sia dato ad esempio il numero 729 e sia tre la ragione della progressione di cui fa parte. La ragione 3 divide 729 successivamente sei volte ed i quoti saranno 243.81.27.9.3.1. L'indice del numero dato sarà 6.[27] (*AL* Cap. V, in [1], p.5-12)

Il confronto di questo passo con l'originale in nota ci permette di osservare che la parola *latus* indica la ragione della progressione, mentre prima indicava la radice quadrata di un numero. Il successivo lemma è in realtà un'applicazione dei due precedenti e viene così enunciato

facto in serie F; & eodem modo 5 Index numeri D respondeat continue facto in serie E; erunt hi facti in utraque E & F aequales. (...)

[22] A: series prima continue proportionalium data.

[23] B indices eiusdem seriei.

[24] E series secunda continue proportionalium.

[25] M Indices eiusdem, quibus aequantur P.

[26] F series tertia, cuius indices N, ijsque aequales Q

[27] Lemma secundum. Si numerus quilibet in serie numerorum ab Unitate continue proportionalium, dividatur continue per suum latus quoties fieri poterit: divisionum numerus erit Index divisi, ostendens dati numeri ab unitate distantiam, vel numerum intervallorum inter Unitatem & divisum. Ut esto datus numerus 729, eiusque latus datum sit 3, hic latus continue dividet datum numerum sexis, eruntque quoti 243.81.27.9.3.1. erit igitur 6. Index dati numeri.

Lemma terzo. Dati due numeri appartenenti alla stessa progressione geometrica e l'indice di uno di essi: trovare l'indice dell'altro, ovvero la sua distanza dall'unità.[28] (*AL* Cap. V, in [1], p.5-12)

In altri termini, dati due numeri N ed $M = a^m$ appartenenti alla medesima progressione geometrica di ragione a, trovare l'esponente x tale che $N = a^x$. Briggs considera il numero N e lo moltiplica per se stesso m volte, ottenendo $a^{mx} = (a^m)^x$ che viene poi diviso successivamente per a^m fino ad arrivare ad 1: grazie al lemma secondo, il numero di divisioni necessarie è proprio x. A questo punto, Briggs enuncia la proprietà $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ come modo per trovare termini arbitrari di una progressione geometrica senza elencarli tutti.

Se si moltiplicano tra loro due termini appartenenti ad una progressione geometrica di termine iniziale pari all'unità, il prodotto apparterrà alla stessa progressione ed avrà indice pari alla somma degli indici dei termini dati.[29] (*AL* Cap. V, in [1], p.5-13)

Di contenuto differente è il quinto ed ultimo lemma che si pone il problema di trovare il numero di cifre di cui è composto il prodotto di due numeri assegnati, senza effettuare il calcolo. Briggs afferma che tale numero è la somma delle cifre che compongono i fattori o, al più, questo numero meno 1 circostanza questa che *può* presentarsi quando il prodotto delle due cifre più a sinistra è un numero ad una cifra.

Il numero delle cifre che compongono il prodotto di due numeri è pari alla somma delle cifre di entrambi i fattori. È possibile che ciò non sia vero quando il prodotto delle prime cifre verso sinistra dei due fattori sia composto da una cifra soltanto. Quando ciò succede, il numero delle cifre del prodotto è inferiore di un'unità alla somma delle cifre dei fattori. Così se 68 viene moltiplicato per 26 il prodotto 1768 è composto da quattro cifre, cioè tante quante sono complessivamente nei fattori. Se però 14 moltiplica 68, il prodotto 952 è formato da tre cifre benché il numero totale di cifre dei fattori sia quattro come nel caso precedente.[30] (*AL* Cap. V, in [1], p.5-13)

Terminata questa fase di "riscaldamento" Briggs espone il primo metodo per trovare il logaritmo di un numero qualsivoglia. In concreto, egli trova $\mathrm{bl}\,(2)$. L'idea del metodo è la seguente. Il logaritmo di 2 è l'indice che compete a 2 in una progressione geometrica costruita a partire dall'unità e che contiene 10 con indice (esponente) pari a 10^{14}: in altre parole, vengono inseriti tra 1 e 10 $10^{14} - 1$ medi proporzionali. Per applicare il lemma terzo, si costruisce una progressione ausiliaria di ragione 2 (il numero il cui indice occorre determinare)

[28] Lemma Tertium. Datis duobus numeris in eadem continue proportionalium serie positis, una cum Indice alterius datorum: reliqui Indicem vel distantiam ab unitatem invenire

[29] In serie numerorum ab unitate continue proportionalium, si numerus quilibet alterum multiplicet, factus in eadem serie continuata erit: eiusque Index erit aggregatum Indicum datorum.

[30] Quot sunt notae in utroque factore, totidem erunt in facto. Nisi forte factus a primis notis versus sinistram in utroque factore, unica nota exprimi poterit. Hoc quoties contigerit, numerus notarum in facto, unitate superatur a numeris notarum in factoribus. Ut si 68 multiplicentur per 26, factus 1768 notis scribitur quatuor: totidem scilicet quot insunt factoribus. At si 14 multiplicent 68, factus 952 tribus scribitur notis, licet in his factoribus, non minus quam in illis, sint quatuor notae.

fino al termine $2^{10^{14}}$ (l'indice di 10 nella progressione di partenza). L'impresa appare disperata, ma Briggs, servendosi del quarto lemma, osserva che non è necessario determinare l'intera serie, bensì solo alcuni termini che comprendano i numeri della forma 2^{10^k}. Egli determina pertanto le potenze di 2 corrispondenti agli indici 2, 4, 8, 10 giungendo a $1024 = 2^{10}$ e formando la prima *tetrade*. A questo punto egli procede per tetradi calcolando 2^{20}, $2^{40} = (2^{20^2})$, $2^{80} = (2^{20^3})$ e $2^{100} = (2^{20^3} \cdot 2^{20})$ e così via sino ad ottenere $2^{10^{14}}$. Anche con questa semplificazione che riduce a 57 il numero di potenze da calcolare, il traguardo sembra ancora molto lontano. Briggs osserva che in effetti non serve conoscere tutte le cifre di tutti gli elementi delle tetradi ma occorre conoscerne abbastanza per essere certi del numero di cifre di cui $2^{10^{14}}$ è composto, cioè per sapere se vale o meno nell'eccezione enunciata al lemma quinto. Che cosa indica il numero di cifre di cui è composto $2^{10^{14}}$? Non è altro che 1 più il numero di divisioni per 10 che occorre effettuare per ottenere un numero compreso tra 1 e 10. Poiché 2 è primo, il suo logaritmo è irrazionale ed infatti, nel processo di divisione successiva per 10 non si arriva ad 1, ma ad un numero compreso tra 1 e 10. Dunque, anteponendo la caratteristica 0 e a meno di un errore sull'ultima cifra decimale, Briggs ha determinato l'indice del numero 2 nella progressione originaria, cioè $\mathrm{bl}\,(2)$. Seguiamo il procedimento di Briggs nell'originale

Testo 3.1 (Briggs**,** Arithmetica Logarithmica, Cap. V**.)** in [1], pp.5-13,5-14. Originale 3.9 *Supponiamo che tutti i numeri possibili siano inseriti in un'unica progressione geometrica e che gli indici loro associati siano proprio gli stessi logaritmi che noi cerchiamo e da questa progressione infinita si prendano due numeri il primo dei quali sia il dieci, con indice pari a 1,00000,00000,0000: il secondo sia il due (o un altro numero a piacere) di cui l'indice è incognito e deve essere determinato. Oltre a questa prima progressione che chiamiamo serie infinita, da cui abbiamo estratto questi due numeri, per il terzo lemma occorre formare una seconda serie per moltiplicazione del due con se stesso e con i prodotti via via ottenuti. Questa serie deve essere continuata finché l'indice dell'ultimo fattore coincide con l'indice del dieci nella prima serie infinita. Per evitare però la noia veramente insuperabile di un numero così grande di moltiplicazioni, omessa, grazie alle proprietà delle progressioni geometriche, la maggior parte dei numeri intermedi, per il Lemma quarto di questo capitolo, ricerchiamo i fattori principali ed i loro indici, finché si trovi l'ultimo termine cercato ed il suo indice. Non sarà poi necessario scriverlo interamente, ma occorre scrivere soltanto un numero sufficiente delle sue cifre contate a partire da sinistra, troncando ed omettendo le altre: in modo che per il Lemma quinto sia noto il numero complessivo delle cifre che compongono il prodotto, se volessimo scriverlo per intero. Moltiplicando il due per se stesso si ottiene quattro, con indice 2. Il quattro, moltiplicato per se stesso dà 16, con indice 4. Il 16 moltiplicato ancora per se stesso dà 256, con indice 8, che, moltiplicato per 4 dà 1024, il cui indice 10 coincide con la somma degli indici dei fattori. Le cifre che compongono quest'ultimo prodotto sono 4 come si può ottenere per semplicissima applicazione dei lemmi quarto e quinto appena esposti. Come si vede anche di seguito:*

1	*0*	
2	*1*	
4	*2*	*1*
16	*4*	*2 prima Tetrade*
256	*8*	*3*
1024	*10*	*4*
10,48576	*20*	*7*
109,95116,27776	*40*	*13 seconda Tetrade*
12089,25819,61463	*80*	*25*
12676,50600,22823	*100*	*31*
16069,38044,25899	*200*	*61*
25822,49878,08685	*400*	*121 terza Tetrade*
66680,14432,87940	*800*	*241*
10715,08607,18618	*1000*	*302*
11481,30695,27407	*2000*	*603*
13182,04093,43051	*4000*	*1205 quarta Tetrade*
17376,62031,93695	*8000*	*2409*
19950,63116,87912	*10000*	*3011*
	Indici	*Numero di cifre*

Questi quattro numeri 4.16.256.1024. formano la prima Tetrade. Occorre ora formare un'altra tetrade il cui primo numero sia il risultato della moltiplicazione dell'ultimo numero della tetrade precedente per se stesso. Il secondo termine è ancora il quadrato del primo ed il terzo il quadrato del secondo; il quarto elemento invece si ottiene moltiplicando tra loro il primo ed il terzo elemento della tetrade. Ed i quattro indici di questi numeri sono 20.40.80.100. Nel primo termine della tetrade vi sono sette cifre, nel secondo 13, nel terzo 25, nel quarto 31. Procedo in questo modo con le altre tetradi fino a quando il quarto elemento di una tetrade non abbia indice 1,00000,00000,0000. Il numero delle cifre di questo quarto elemento sarà 30102,99956,6399. E così abbiamo circa cinquantasette numeri principali da disporre nella seconda serie. Il primo di questi, che è la radice e la ragione degli altri, è il due. L'ultimo ha invece lo stesso indice che avevamo assegnato nella prima serie infinita al numero dieci.

Per il Lemma secondo potrebbe essere descritta una terza serie se solo conoscessimo l'ultimo termine della seconda serie che infatti coincide con l'ultimo termine di questa terza serie, per il Lemma primo. Tuttavia è noto il numero di cifre di quest'ultimo elemento di entrambe le serie che supera di un'unità soltanto l'indice di questo termine nella terza serie e del due nella prima serie infinita. Infatti, per trovare questo indice nella terza serie occorre dividere successivamente l'ultimo temine per il numero assegnato dieci, di cui era anche noto l'indice. Se il dieci divide un numero qualsiasi, il quoto sarà la decima parte del dividendo e coincide con questo, dopo che ne sia stata eliminata una cifra (come 4357 diviso per 10 dà 435 come quoto) e quindi il numero di quoti o di divisioni sarà inferiore di uno soltanto al numero di cifre che compongono il dividendo ed il numero di quoti mostra anche la distanza del dividendo dall'unità ovvero l'indice del dividendo in questa terza serie, che poi coincide con

l'indice che occorre attribuire nella prima serie infinita al termine che è la ragione della seconda, cioè il due. Abbiamo dunque ottenuto il logaritmo del due che cercavamo, cioè 30102,99956,6398.

3.4 L'algoritmo della radice quadrata

I capitoli VI e VII presentano un metodo alternativo per trovare i logaritmi di numeri del tipo $10^{\frac{1}{2^n}}$—cioè dei numeri ottenuti per iterata estrazione della radice quadrata a partire da 10 (Capitolo VI)—e dei numeri primi elementari (Capitolo VII). L'algoritmo qui presentato, come pure le tecniche numeriche più sofisticate introdotte nei capitoli successivi, sono contributi più interessanti di Briggs.

Il capitolo VI si apre con la definizione di medio omogeneo tra due numeri. Precisamente,

Ricerchiamo dunque, tra gli elementi di una progressione geometrica che comprenda molti termini tra l'unità ed il dieci, alcuni elementi principali che potremo chiamare medi continui, dal momento che ciascuno di loro è medio omogeneo tra il numero che lo segue nella progressione e l'unità.[31] (*AL* Cap. V, in [1], p.6-11)

Così partendo da 2, si costruisce la successione 1,2,4,16,256,... in cui ogni termine è medio proporzionale (*medius homogeneus*) tra l'unità ed il numero successivo. Detto questo, Briggs *calcola* le radici quadrate successive di 10, cioè trova i numeri della forma $10^{\frac{1}{2^n}}$ fermandosi ad $n = 54$. Come già sottolineato nella sezione precedente, tutti questi numeri hanno logaritmi razionali, ciascuno dei quali si ottiene per bisezione da quello precedente. È impressionante il numero di cifre decimali, 32, con cui le radici quadrate vengono calcolate, soprattutto se si tiene conto della noiosità del metodo di completamento dei quadrati seguito da Briggs. Al crescere di n, Briggs osserva non solo che i numeri $10^{\frac{1}{2^n}}$ tendono ad 1 —cosa già nota a Nepero— ma che, quando dopo l'unità vi sono circa 15 zero, le rimanenti cifre di due numeri successivi hanno rapporto molto vicino ad 1/2. Formalmente, se

$$10^{\frac{1}{2^n}} = 1 + A_n \qquad \text{e} \qquad 10^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1 + A_{n+1}$$

allora

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \simeq \frac{1}{2}\,.$$

D'altra parte, se si pone

$$\ell_n = \mathrm{bl}\,(10^{\frac{1}{2^n}}) \qquad \text{e} \qquad \ell_{n+1} = \mathrm{bl}\,(10^{\frac{1}{2^{n+1}}})$$

per costruzione si ha anche

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{1}{2}$$

[31] Quaerantur idcirco e satis magna continue proportionalium serie, inter Unitatem & Denarium, aliquot praecipui, quos appellare poterimus continue Medios; quia eorum quilibet est medius homogeneus inter unitatem & numerum in eadem serie ab unitate proxime remotiorem.

e si può concludere che, per n sufficientemente grande ($n \geq 51$), vale con ottima approssimazione la proporzione

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\,.$$

Briggs estende questa proprietà a numeri *non* della forma $10^{\frac{1}{2^n}}$ purché cadano nella regione dove la proporzione è valida, vale a dire purché siano più piccoli di $10^{\frac{1}{2^{51}}}$. Seguiamo ora l'originale di Briggs partendo col riprodurre la tabella dove sono riportate alcune delle radici quadrate calcolate

Testo 3.2 (Briggs, Arithmetica Logarithmica.) Cap. VI, in [1], pp.6-11,6-12. Originale 3.10

	D Medi continui tra dieci e l'unità *10*	*E* Logaritmi Razionali *1,000*
1	*31622,77660,16837,93319,98893,54*	*0,50*
2	*17782,79410,03892,28011,97304,13*	*0,25*
3	*13335,21432,16332,40256,65389,308*	*0,125*
4	*11547,81984,68945,81796,61918,213*	*0,0625*
5	*10746,07828,32131,74972,13817,6538*	*0,03125*
6	*10366,32928,43769,79972,90627,3131*	*0,015625*
7	*10181,51721,71818,18414,73723,8144*	*0,00781,25*
-	———————-	———————
-	———————-	———————
-	———————-	———————
50	*10000,00000,00000,204510638912051946*	*0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053*
51	*10000,00000,00000,1022553194560259 21* ***L***	*0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526*
52	*10000,00000,00000,051127659728012947* ***M***	*0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263*
53	*10000,00000,00000,025563829864006470* ***N***	*0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631*
54	*10000,00000,00000,012781914932003235* ***P***	*0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815*

Si cerchino dunque così i medi continui tra il dieci e l'unità, il primo dei quali sarà[32] $\ell\,.10$, *cioè* $3\underline{162277660168379331998893 54}$, *vale a dire la radice quadrata di dieci od il medio proporzionale tra 10 & 1. Cerco quindi la radice quadrata della radice quadrata appena trovata, cioè* $\ell\ell\,..10$*:* $1\underline{7782794100389228011973 0413}$, *in terzo luogo mi spingo a considerare la radice quadrata di questa radice,* $\ell\ell\ell\,..10$*:* $1\underline{3335214321633240256653 8931}$, *e procedo allo stesso modo finché la serie dei medi continui, comprendendo il dieci, contenga cinquantacinque numeri diversi che puoi vedere indicati con la lettera D, insieme ai loro logaritmi che sono indicati con la lettera E.*
Il più piccolo dei numeri che sono medi continui è
$\underline{10000,00000,00000,01278,19149,32003,23441,65}$, *il cui logaritmo si ottiene per bisezione grazie all'assioma 2 Cap. 2 e vale*

$0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815,83$. *Dall'assioma 2 del Cap. 2 è evidente che il logaritmo della radice di un numero è la metà*

[32] Si ricordi che $\ell\,.n \equiv \sqrt{n}$

del logaritmo che è assegnato al quadrato del numero di partenza, in quanto dalla moltiplicazione di una radice quadrata per sé stessa si ottiene il numero al quadrato. E dunque ciascuno di questi logaritmi è il doppio di quello del termine immediatamente successivo. Quando le cifre significative che vengono aggiunte all'unità sono precedute da quindici zero, sono la metà delle cifre del numero precedente; e ciò si verifica sia per i medi continui che per i logaritmi: questi logaritmi decrescono sempre nella stessa proporzione dei numeri ai quali corrispondono. E quindi, se questi numeri diminuiscono fino al punto in cui quindici zero si trovano dopo l'unità, le restanti cifre significative aggiunte dopo gli zero mostreranno i logaritmi veri o una loro ottima approssimazione grazie alla regola aurea di proporzionalità che, affinché tutto sia più chiaro, assegna i numeri in proporzione continua insieme ai loro logaritmi tra quelli che cadono nella zona compresa tra i numeri LMN & P: conservato quel rapporto tra i numeri più vicini che c'è tra l'unità e P, il più piccolo dei medi continui, che crescono quasi allo stesso modo dei loro logaritmi secondo il rapporto delle loro distanze, in forza della definizione. Quindi, se capita di considerare un numero tanto piccolo da essere compreso nella regione tra l'unità ed L, il suo logaritmo si troverà facilmente grazie ad una proporzione, anche se esso non appartiene alla serie di medi proporzionali. Poiché i logaritmi di numeri così piccoli crescono o decrescono con un rapporto pari a quello delle cifre significative che sono situate subito dopo gli zero. Sia dato ad esempio il numero X 10000,00000,00000,01. Dico che questi quattro numeri sono proporzionali

$$\left.\begin{array}{ll} 12781, 91493, 20032, 34416, 5 & \textit{Cifre significative dopo quindici zero} \\ 1 - - - - - - - - - - - - - - & \textit{da aggiungere all'unità} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 55511, 15123, 12578, 27021, 18158 & \textit{Cifre significative dopo la caratteristica (che è zero)} \\ 43429, 44819, 03251, 804 & \textit{ed altri sedici zero da scrivere nei logaritmi.} \end{array}\right\}$$

	Numeri in progressione geometrica maggiori dell'unità	*Logaritmi*
	1 Unità	*0,00000*
P	*10000,00000,00000,01278,19149,32003,23442*	*0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,12*
N	*10000,00000,00000,02556,38298,64006,47047*	*0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,24*
	10000,00000,00000,03834,57447,96009,70815	*0,00000,00000,00000,16653,34536,93773,48106,35*
M	*10000,00000,00000,05112,76597,28012,94747*	*0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47*
	1,0000,00000,00000,06390,95746,60016,18842	*0,00000,00000,00000,27755,57561,56289,13510,59*
	1,0000,00000,00000,07669,14895,92019,43101	*0,00000,00000,00000,33306,69703,87546,96212,71*
	1,0000,00000,00000,08947,34045,24022,67523	*0,00000,00000,00000,38857,80586,18804,78914,83*
L	*10000,00000,00000,10225,53194,56025,92108*	*0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,95*
X	*10000,00000,00000,01*	*0,00000,00000,00000,04342,94481,90325,1804*

Così il logaritmo del numero assegnato X è 0,00000,00000,00000,04342,94481,90325,1804. La prima cifra di questi numeri proporzionali è l'unità, tutte le altre cifre, sia zero che significative, ci esprimono il numeratore delle parti da aggiungere all'unità, il denominatore delle quali è la stessa unità, e degli zero uguali in numero a quelle cifre note. Il numero X non è annoverato tra questi numeri proporzionali: tuttavia credo di aver trovato in modo piuttosto preciso il suo logaritmo; poiché i logaritmi che vanno cercati con la regola delle proporzioni si trovano in

modo più semplice che usando qualsiasi altro metodo. Mentre gli altri logaritmi di questi numeri proporzionali non possono essere trovati se non con il ricorso a moltiplicazione e divisione, qui è stata sufficiente la sola moltiplicazione per raggiungere lo scopo.

Notiamo che BRIGGS legge i rapporti nella forma denominatore/numeratore e che la tabella riportata qui sopra è un arricchimento della precedente in quanto sono stati aggiunti numeri che cadono tra P ed L ma che non fanno parte della progressione precedente, bensì di una nuova progressione di ragione P. Poiché cadono nella regione in cui vale la regola di proporzionalità per il calcolo dei logaritmi, è possibile calcolare questi ultimi solo con divisioni e moltiplicazioni. Astutamente BRIGGS prende il numero X che ha solo l'unità dopo 16 zeri consecutivi, cosicché nel calcolo del logaritmo è risparmiato il ricorso alla divisione. BRUCE [1] fa notare come BRIGGS sia incappato in un errore—che per fortuna non danneggia la precisione delle tavole—nel calcolo di $\sqrt[4]{10}$ e che le circa 30 cifre con cui BRIGGS calcolò le radici quadrate (a mano, val la pena di sottolineare) sono molte più del necessario, anche per mantenere una precisione di 14 o 15 cifre per i logaritmi. Si resta comunque ammirati dalla costanza con cui BRIGGS ha affrontato un lavoro che agli inizi doveva apparire un'impresa disperata.

L'algoritmo di calcolo dei logaritmi attraverso estrazioni di radici quadrate diventa efficace per il calcolo dei logaritmi dei numeri primi che BRIGGS affronta nel Capitolo VII, concentrandosi su $\mathrm{bl}\,(2)$. La strategia è la seguente: attraverso estrazioni quadrate successive di 2, arrivare nella regione della tabella ausiliaria costruita in precedenza in cui si può far uso della regola di proporzionalità. Per questo egli usa una piccola astuzia, così da risparmiare alcune estrazioni di radice. Invece di partire da 2 egli dapprima cerca una potenza di due che abbia 1 per prima cifra, seguita da quanti più zero possibili. In questo caso la scelta cade su

$$a = 1,024 = \frac{2^{10}}{10^3}$$

che è già sufficientemente vicina all'unità. A partire da a, dopo 47 estrazioni di radice si arriva al numero $b = \sqrt[2^{47}]{a}$ che giace nella zona L-P della tabella ricavata al Capitolo VI e di cui si conosce il logaritmo dopo una proporzione. Determinato $\mathrm{bl}\,(b)$, per definizione di logaritmo si ha

$$\mathrm{bl}\,(a) = 2^{47}\mathrm{bl}\,(b)$$

e da qui si deduce, con le regole elementari ricavate al Capitolo III, l'espressione di $\mathrm{bl}\,(2)$.

Testo 3.3 (BRIGGS**,** Arithmetica Logarithmica**)** Cap. VII, in [1], pp.7-8,7-9. Originale 3.11 *Tra il numero dato (di cui si chiede il logaritmo) e l'unità si inseriscano tanti medi proporzionali (come nel capitolo precedente) fino al punto in cui si trova un numero così piccolo che l'unità precede quindici zero a cui fanno seguito una o più cifre significative. Quindi (come abbiamo mostrato alla*

fine del capitolo precedente) queste cifre significative ci daranno il logaritmo cercato dell'ultimo medio proporzionale trovato, grazie alla regola aurea.

Ora, nella prima serie di medi proporzionali abbiamo ottenuto il logaritmo dell'ultimo dei medi proporzionali per bisezione successiva operata a partire dal logaritmo noto del primo numero: qui, al contrario, moltiplicando per due il logaritmo dell'ultimo dei medi proporzionali, otterremo quello del penultimo e allo stesso modo quello di tutti gli altri fino ad arrivare al logaritmo richiesto del primo numero assegnato. (...)

Anche questo metodo è piuttosto noioso e ci siamo sforzati di ridurne la noiosità almeno in qualche parte. Infatti, abbiamo appreso in precedenza che, assegnati i logaritmi di due elementi qualsiasi di una serie di medi proporzionali, è possibile trovare il logaritmo di un altro elemento qualsivoglia, la cui posizione nella serie sia nota: per il Lemma I, cap. 1 il logaritmo del dividendo è uguale alla somma del logaritmo del divisore e del quoto; per l'assioma 3, cap. 3 potremo rimpiazzare il numero dato con un altro un po' più comodo, trovato il logaritmo del quale, quello del numero dato si otterrà nella maniera che ora illustriamo. Si moltiplichi il numero assegnato per se stesso e per i prodotti così ottenuti finché non si trovi un numero A che abbia la prima cifra pari all'unità, seguita da uno o più zero. Si divida questo numero per un altro formato dall'unità e da tanti zero quante erano le cifre oltre all'unità del dividendo: e a questo punto si inseriscano medi proporzionali tra questo quoto e l'unità, fino a raggiungere quei termini che abbiamo prima assegnato vicino alla lettera L. Questi medi proporzionali poi sono in numero minore e più facili da trovare di quelli che si sarebbero dovuti trovare tra 2 e l'unità. Illustriamo tutto ciò con un esempio. Si debba trovare il logaritmo di due: a partire dal due si formi la progressione geometrica di ragione due fino ad ottenere 1024 (A) che, diviso per 1000 (B) darà come quoto $1\underline{024}$, il cui logaritmo, una volta trovato, sommato a quello del divisore darà il logaritmo del dividendo A, 1024 per l'assioma 3, cap. 3. La decima parte di questo logaritmo sarà il logaritmo richiesto del numero due, per il Lemma 1, cap. 1.

Si determini quindi la radice quadrata del quoto appena trovato e le radici quadrate successive fino a giungere alla quarantasettesima che è[33]

$$1,00000,00000,00000,016851605705394977$$

il cui logaritmo si può ottenere grazie alla regola aurea in quanto esso giace entro i limiti della regione indicata con L; tale logaritmo vale

$$0,00000,00000,00000,07318,55936,90623,9336.$$

Abbiamo ora un certo numero, 47, di medi proporzionali compresi tra l'unità e $1\underline{024}$, il più piccolo dei quali e più vicino all'unità sia il primo. Il suo logaritmo si trova nel modo illustrato alla fine del Capitolo sesto. Moltiplicatolo successivamente per due si ottiene il logaritmo del quoto $1\underline{024}$. Dal logaritmo ottenuto occorre cercare quello di un numero più lontano, saltando alcuni termini

[33] A questo punto segue una tabella con alcune delle 47 radici quadrate di 1,024.

intermedi; si consideri la serie di numeri in progressione geometrica di termine iniziale pari all'unità e ragione due insieme agli indici comuni che sono uguali al numero di intervalli compresi tra il logaritmo dato e quello richiesto; moltiplicando questo numero per il logaritmo dato, si ottiene quello cercato. Così se si cerca il logaritmo del numero più vicino all'unità si moltiplichi per due (poiché vi è un solo intervallo); se si cerca quello del secondo, si moltiplichi per quattro; se quello del decimo, si moltiplichi per 1024, che ha indice 10: se si cerca il quarantasettesimo, il fattore moltiplicativo sarà 140737488355328.

Similmente, Briggs calcola bl (6) ricorrendo al numero ausiliario $1\underline{0077696} = 6^9/10^7$.

Quella presentata ora è la prima decisa ed originale semplificazione al metodo di Nepero da Briggs, ma poggia ancora su uno strumento di calcolo assai tedioso e soggetto a frequenti errori. Vedremo tra poco come l'ingegno di Briggs si adoperi a semplificare l'algoritmo della radice quadrata.

3.5 Schemi alle differenze finite

Con il capitolo VIII dell'*Arithmetica Logarithmica* che ci apprestiamo ad esaminare, Briggs prende di petto la semplificazione dell'algoritmo basato sull'estrazione di un gran numero di radici quadrate, con un'elevata precisione. Lo schema iterativo qui presentato da Briggs si basa sul concetto di differenze (*differentiae*) di ordine successivo tra due quantità. Nel corso del calcolo della successione di radici quadrate di numeri r_n prossimi ad 1 intrapreso nei due capitoli precedenti, Briggs si rende conto (§IV di [5]) che, posto $r_n = 1 + A_n$, la quantità

$$B_n := \frac{1}{2}A_{n-1} - A_n$$

risulta molto piccola. Non solo, ma procedendo in modo iterativo, egli osservò che

$$C_n := \frac{1}{4}B_{n-1} - B_n$$

è ancora più piccola e così via, induttivamente, che

$$\Delta_n^k := \frac{1}{2^k}\Delta_{n-1}^{k-1} - \Delta_n^k$$

diminuisce sempre più fino ad essere trascurabile rispetto alla precisione fissata per il calcolo dei logaritmi: Briggs ha intuito che $\lim_{k\to\infty} \Delta_n^k = 0$, anche senza notarlo in questi termini. Nel linguaggio di Briggs, gli A_n sono le differenze prime (*differentiae primae*) mentre le Δ_n^{k+1} sono dette differenze di ordine $k+1$ (*differentiae secundae, tertiae, etc.*). Ecco come egli esprime tutto ciò, considerando la successione di radice quadrate impiegate nel calcolo di bl (6).
Ed in questo modo potremo trovare il logaritmo di un numero scelto a piacere grazie all'inserzione di medi proporzionali che ci sono forniti in modo piuttosto faticoso tramite il calcolo di radici quadrate successive. Mostrerò ora come sia

però possibile ridurre la noiosità di una così grande fatica ricorrendo alle differenze, servendomi per questo degli stessi medi proporzionali che avevo indicato con la lettera A e grazie ai quali abbiamo trovato il logaritmo di sei. La prima cifra verso sinistra di questi numeri è l'unità; le altre esprimono le parti da aggiungere all'unità: come abbiamo ricordato sopra, alla fine del Capitolo sesto. Chiamo differenza prima queste parti aggiunte all'unità: differenza, si intende, tra il numero assegnato e l'unità. I numeri collocati subito dopo A, sono le metà delle differenze prime dei termini immediatamente precedenti: essi sono indicati come $\frac{1}{2}A$. *Da queste metà bisogna sottrarre le differenze prime soprascritte, ed i risultati di queste operazioni vengono scritti sotto, indicati con la lettera B e sono detti differenze seconde. I numeri che sono collocati sotto B sono le quarte parti delle differenze seconde immediatamente precedenti e sono indicate con* $\frac{1}{4}B$. *Se da questi vengono tolti i numeri B si ottengono le differenze terze C che, sottratte dalle parti ottave delle differenze terze precedenti indicate con C danno le differenze quarte D. Allo stesso modo si determinano le differenze quinte E, le seste F, le settime G, ecc.: le differenze quinte E si ottengono togliendo le differenze quarte D dalle parti sedicesime delle differenze quarte precedenti: e le differenze quinte E dalle parti trentaduesime delle differenze quinte precedenti: e le differenze seste F dalle parti sessantaquattresime delle differenze seste precedenti, etc.*

Tutte queste differenze si ottengono molto facilmente dalla serie dei medi proporzionali, però il loro utilizzo non porta molto lontano per quei numeri la cui differenza prima valga la centesima o la millesima parte dell'unità. Sono infatti troppo numerose ed alcune di loro sono troppo faticose da ottenere. Tuttavia, quando la cifra delle unità, collocata dapprima al primo posto è seguita da tre o più zero, queste differenze potranno ridurre una grande parte del lavoro assegnato.[34](Briggs, Arithmetica Logarithmica, Cap. VIII. In [1], pp.8-7)

È interessante come Briggs segnali l'inefficacia del metodo quando le dif-

[34]Atque ad hunc modum, cuiuscunque numeri propositi Logarithmum, per continue Medios invenire poterimus, quos nobis lateris quadrati inventio suppediat satis laboriose. Huius autem tanti laboris molestia minuetur plurimum per differentias, modum in his ipsis Medijs ostendam, quos A litera notavi & quorum ope Senarii Logarithmum invenimus. Horum numerorum prima nota versum sinistram, designat Unitatem; reliquae exprimunt partes Unitati adijciendas: ut supra ad finem sexti Capitis monuimus. Has partes Unitati adjectas, appello Differentiam primam: Differentiam scilicet dati numeri supra unitatem. Proximi numeri infra A positi, sunt semisses Differentiarum primarum proxime praecedentium: & notatur $\frac{1}{2}A$. Ex istis semissibus auferendae sunt Differentiae primae superscriptae, scribanturque numeri reliqui inferius, qui notari litera B, appellantur Differentiae Secundae. Numeri autem infra B positi sunt quadrantes differentiarum secundarum proxime precedentium: & notantur $\frac{1}{4}B$. E quibus numeri B ablati reliquunt Differentias tertias C & hae tertiae ablatae ex octavis precedentium tertiarum notatis C reliquunt Differentias quartas D. Eodem modo inveniuntur quintae Differentiae E, sextae F, septimae G, &c. ablatis quartis D e decimis sextis quartarum praecedentium: quintis E, e tricesimis secundis quintarum: & sextis F, e sexagesimis quartis sextarum, &c.

Hae omnes differentiae habentur facillime e continuata serie numerorum continue Mediorum, earum autem usus non multum conducit, in numeris quorum Differentia prima, valet centesimam aut millesimam partem Unitatis. Sunt enim & nimis multae & earum aliquae nimis operosae. Verum cum Unitatis notam primo loco positam, tres vel plures cyphrae proxime sequantur, poterunt hae Differentiae magnam suscepti laboris partem minuere.

ferenze prime non sono sufficientemente piccole. Occorre ora un procedimento che permetta di calcolare le differenze senza dover *prima* conoscere tutte le radici quadrate successive. Per raggiungere lo scopo Briggs opera, a tutti gli effetti, un troncamento di uno sviluppo in serie. Egli parte da un numero $r_n = 1 + A_n = 1 + \alpha$, con α sufficientemente piccolo. Allora $r_{n-1} = (1+\alpha)^2$, $r_{n-2} = (1+\alpha)^4$, e così via. La differenza prima al livello n è

$$A_n = \alpha\,,$$

mentre la differenza seconda è

$$B_n = \frac{1}{2}A_{n-1} - A_n = \frac{1}{2}[(1+\alpha)^2 - 1] - \alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}(2)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è adoperata la stessa notazione *circolare* introdotta da Rafael Bombelli (1526 ca.-1573) ed impiegata da Briggs. La differenza terza è

$$C_n = \frac{1}{4}B_{n-1} - B_n = \frac{1}{4}\{\frac{1}{2}[(1+\alpha)^4 - 1 - [(1+\alpha)^2 - 1]]\} - \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{1}{8}\alpha^4 = \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{8}(4)$$

e così via, la differenza quarta al livello n è data da

$$\begin{aligned}
&D_n = \tfrac{1}{8}C_{n-1} - C_n = \tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{4}B_{n-2} - B_{n-1}] - [\tfrac{1}{4}B_{n-1} - B_n] = \\
&= \tfrac{1}{32}[\tfrac{1}{2}A_{n-3} - A_{n-2}] - \tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{2}A_{n-2} - A_{n-1}] - [\tfrac{1}{2}\alpha^3 + \tfrac{1}{8}\alpha^4] = \\
&\tfrac{1}{32}[\tfrac{1}{2}[(1+\alpha)^8 - 1 - [(1+\alpha)^4 - 1]] - \tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{2}[(1+\alpha)^4 - 1] - [(1+\alpha)^2] - 1] - [\tfrac{1}{2}\alpha^3 + \tfrac{1}{8}\alpha^4] = \\
&= \tfrac{7}{8}\alpha^4 + \tfrac{7}{8}\alpha^5 + \tfrac{7}{16}\alpha^6 + \tfrac{1}{8}\alpha^7 + \tfrac{1}{64}\alpha^8 = \tfrac{7}{8}(4) + \tfrac{7}{8}(5) + \tfrac{7}{16}(6) + \tfrac{1}{8}(7) + \tfrac{1}{64}(8)\,.
\end{aligned}$$

In questo modo Briggs ottiene le differenze fino al decimo ordine in termini di α e delle sue potenze con esponente fino a 10. Esiste uno stretto legame tra il procedimento seguito da Briggs per il calcolo delle differenze e lo sviluppo in serie di $\sqrt{1+\alpha}$ che sarà ottenuto da Newton oltre 40 anni dopo [6]. Infatti Briggs sviluppa le differenze di ordine superiore in termini della differenza prima, per cui

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+\alpha} = 1 + A_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2}A_n - B_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{2}A_n - \tfrac{1}{4}B_n + C_{n+1} + ... \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}A_n - \tfrac{1}{4}B_n + \tfrac{1}{8}C_n - \tfrac{1}{16}D_n + \tfrac{1}{32}E_n - \tfrac{1}{64}F_n + ... = \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{8}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{2}\alpha^3 + \tfrac{1}{8}\alpha^4) - \tfrac{1}{16}(\tfrac{7}{8}\alpha^4 + \tfrac{7}{8}\alpha^5 + \tfrac{7}{16}\alpha^6 + \tfrac{1}{8}\alpha^7 + \tfrac{1}{64}\alpha^8) + \\
&+ \tfrac{1}{32}(\tfrac{21}{8}\alpha^5 + 7\alpha^6 + \tfrac{175}{16}\alpha^7 + \tfrac{21}{8}\alpha^8 + ...) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{8}\alpha^2 + \tfrac{1}{16}\alpha^3 - \tfrac{5}{128}\alpha^4 + \tfrac{7}{256}\alpha^5 + ...
\end{aligned}$$

che rappresenta proprio i primi termini dello sviluppo in serie di $\sqrt{1+\alpha}$. *Sarà possibile trovare queste differenze per un numero assegnato a piacere, anche quando non siano noti i medi proporzionali. Infatti, se si moltiplica la differenza di un dato numero dall'unità per se stessa e per i suoi prodotti un certo numero di volte, in modo da ottenere alcune delle potenze di queste differenze, cioè*

il quadrato, il cubo, il biquadrato, ecc., la differenza seconda sarà la metà del quadrato e le altre si otterranno secondo quanto vedi qui di seguito.[35]

$$\begin{cases} \textit{Secunda} & \frac{1}{2}\ (2) \\ \textit{Tertia} & \frac{1}{2}\ (3) + \frac{1}{8}(4) \\ \textit{Quarta} & \frac{7}{8}\ (4) + \frac{7}{8}\ (5) + \frac{7}{16}\ (6) + \frac{1}{8}\ (7) + \frac{1}{64}\ (8) \\ \textit{Quinta} & 2\frac{5}{8}\ (5) + 7\ (6) + 10\frac{15}{16}\ (7) + 12\frac{69}{128}\ (8) + 11\ \frac{11}{64}\ (9) + 1953\frac{285}{512}\ (10) \\ \textit{Sexta} & 13\frac{9}{16}\ (6) + 81\frac{3}{8}\ (7) + 296\frac{87}{128}(8) + 834\frac{43}{128}\ (9) + 1953\frac{285}{512}\ (10) \\ \textit{Septima} & 122\frac{1}{16}\ (7) + 1510\frac{67}{128}\ (8) + 11475\frac{72}{128}(9) + 68372\frac{29}{2048}\ (10) \\ \textit{Octava} & 1937\frac{95}{128}\ (8) + 47151\frac{93}{128}\ (9) + 706845\frac{1493}{8192}\ (10) \\ \textit{Nona} & 54902\frac{89}{128}\ (9) + 2558465\frac{23587}{32768}\ (10) \\ \textit{Decima} & 2805527\ (10) \end{cases}$$

(*AL* Cap. VIII, in [1], p.8-8)

Seguiamo l'argomento presentato da Bruce [1] e da Goldstine [7] per capire come Briggs si servì di questo schema per evitare il ricorso ad un numero troppo grande di estrazioni di radici quadrate. Supponiamo che siano stati calcolati i termini da $1 + A_n$ ad $1 + A_{n+5}$ con le estrazioni di radice quadrata e di volere usare le differenze finite per trovare il termine $1 + A_{n+6} = \sqrt{1 + A_{n+5}}$. Costruiamo le differenze secondo questo schema, basato sull'esempio di Briggs che esamineremo tra poco.

	Diff. 2^a	Diff. 3^a	Diff. 4^a	Diff. 5^a	Diff. 6^a
$1 + A_n$	-	-	-	-	-
$1 + A_{n+1}$	$B_{n+1} = \frac{A_n}{2} - A_{n+1}$	-	-	-	-
$1 + A_{n+2}$	$B_{n+2} = \frac{A_{n+1}}{2} - A_{n+2}$	$C_{n+2} = \frac{B_{n+1}}{4} - B_{n+2}$	-	-	-
$1 + A_{n+3}$	$B_{n+3} = \frac{A_{n+2}}{2} - A_{n+3}$	$C_{n+3} = \frac{B_{n+2}}{4} - B_{n+3}$	$D_{n+3} = \frac{C_{n+2}}{8} - C_{n+3}$	-	-
$1 + A_{n+4}$	$B_{n+4} = \frac{A_{n+3}}{2} - A_{n+4}$	$C_{n+4} = \frac{B_{n+3}}{4} - B_{n+4}$	$D_{n+4} = \frac{C_{n+3}}{8} - C_{n+4}$	$E_{n+4} = \frac{D_{n+3}}{16} - D_{n+4}$	-
$1 + A_{n+5}$	$B_{n+5} = \frac{A_{n+4}}{2} - A_{n+5}$	$C_{n+5} = \frac{B_{n+4}}{4} - B_{n+5}$	$D_{n+5} = \frac{C_{n+4}}{8} - C_{n+5}$	$E_{n+5} = \frac{D_{n+4}}{16} - D_{n+5}$	$F_{n+5} = \frac{E_{n+4}}{32} - E_{n+5}$
$1 + A_{n+6}$	$A_{n+6} = \frac{A_{n+5}}{2} - B_{n+6}$	$B_{n+6} = \frac{B_{n+5}}{4} - C_{n+6}$	$C_{n+6} = \frac{C_{n+5}}{8} - D_{n+6}$	$D_{n+6} = \frac{D_{n+5}}{16} - E_{n+6}$	$E_{n+6} = \frac{E_{n+5}}{32}$
$1 + A_{n+7}$	$A_{n+7} = \frac{A_{n+6}}{2} - B_{n+7}$	$B_{n+7} = \frac{B_{n+6}}{4} - C_{n+6}$	$C_{n+7} = \frac{C_{n+6}}{8} - D_{n+7}$	$D_{n+7} = \frac{D_{n+6}}{16} - E_{n+7}$	$E_{n+7} = \frac{E_{n+6}}{32}$

Briggs determina le differenze al livello $n + 5$ fino a quando ne trova una nulla, nell'esempio da discutere la differenza sesta $F_{n+5} \simeq 0$. *Se* si suppone che anche $F_{n+6} \simeq 0$ si ha $E_{n+6} \simeq \frac{1}{32}E_{n+5}$, che è noto in quanto si *conosce* dal livello $n + 5$ che $E_{n+5} \simeq \frac{1}{32}E_{n+4}$. A questo punto, l'algoritmo viene applicato

[35] Poterunt etiam hae differentiae inveniri pro dato quolibet numero, licet continue Medij nulli dati fuerint. Nam si dati numeri differentia supra unitatem, seipsam suosque factos aliquoties multiplicet, ut ejusdem differentiae aliquot potestates habeantur, nempe Quadratus, Cubus, Biquadratus, &c. erit Differentia secunda semissis Quadrati, reliquae etiam ut hic vides

a ritroso, fino a determinare A_{n+6} e viene iterato ai passaggi successivi, con notevole riduzione dei calcoli.

Il prossimo passo dell'*Arithmetica Logarithmica* fa riferimento al calcolo del termine $1 + A_{10}$ nella successione formata a partire da $1.0077696 = 6^9/10^7$ utilizzata nel calcolo di bl (6).

Testo 3.4 (Briggs, Arithmetica Logarithmica, Cap. VIII) In [1], pp.8-9. Originale 3.12.

38	*10000,15116,46599,90567,29504,88*	$1 + A_9$
	15116,58025,28288,79823,97	$A_8/2$
	11425,54992,70108,02	B_9
†	*11425,54992,70108,02*	$B_8/4$
	17271,19788,93	C_9
	17271,65478,36	$C_8/8$
	45689,43	D_9
	45691,50	$D_8/16$
	2,07	E_9
	2,07	$E_8/32$
37	*65*	$E_{10}/32$
	2855,589	$D_9/16$
	2855,524	D_{10}
	2158,89973,616	$C_9/8$
	2158,87118,092	C_{10}
	2856,34430,37579,775	$B_9/4$
	2856,32271,50461,683	B_{10}
	7558,23299,95283,64752,440	$A_9/2$
	7558,20443,63012,14290,767	A_{10}
	10000,07558,20443,63012,14290,767	$1 + A_{10}$

Come vediamo nell'esempio riportato in cui i numeri medi proporzionali forniscono queste differenze tramite divisioni e sottrazioni, fino a giungere al segno †. Successivamente, sono queste differenze a generare i medi proporzionali: infatti 6$\underline{5}$, parte trentaduesima del numero E 207, sottratta dal numero 2855589, che è la parte sedicesima del numero D 4568943, dà 285552$\underline{4}$ come numero D, ovvero come differenza quarta. Questa stessa differenza quarta D, sottratta dalla parte ottava del numero C precedente, dà la stessa differenza terza la quale, sottratta dalla quarta parte del numero B superiore, dà la stessa (differenza seconda) B. E questa B, sottratta dalla metà del numero A precedente dà la stessa (differenza prima) che, sommata all'unità è il medio proporzionale richiesto $10000, 07558, 20443, 63012, 14290, 760$. *Grazie a queste differenze troveremo allo stesso modo tutti i medi proporzionali successivi, continuando fino al punto in cui tutte le differenze a poco a poco vengono meno fuorché le prime le quali, quando mancheranno le altre, saranno proprio uguali alle metà delle differenze prime precedenti. In verità, le differenze rimaste sono da trattare con la regola aurea, come sopra.*

Ottenuto in modo efficiente un grande numero di radici quadrate successive, Briggs passa a calcolare i logaritmi dei numeri primi maggiori di cinque, ricorrendo anche qui ad un ingegnoso procedimento che egli espone nel Capitolo IX per i primi minori di 100. Supponiamo noti i logaritmi dei numeri primi inferiori al numero p primo di cui si vuole trovare il logaritmo. Si prendano tre numeri consecutivi a, b, c tali che: 1) uno dei tre abbia p come fattore e 2) tutti gli altri numeri primi coinvolti nella scomposizione di a, b, c siano inferiori a p e dunque si possa supporre noto il loro logaritmo. I tre numeri trovati soddisfano, per evidenti proprietà algebriche, la relazione

$$b^2 = ac + 1$$

per cui il quoziente b^2/ac è della forma

$$\frac{b^2}{ac} = 1 + \frac{1}{ac}$$

e dunque adatto ad applicare lo schema messo a punto nei capitoli precedenti. Determinato il logaritmo di tale quoziente è poi possibile risalire al logaritmo di p, sfruttando le proprietà elementari dei logaritmi.

Testo 3.5 (Briggs**,** Arithmetica Logarithmica**, Cap. IX.)** p.9-5 di [1]. Originale 3.13 *Dopo aver trovato i logaritmi di questi numeri: 1.2.3.5.10 e, grazie agli assiomi 1 e 2. del Cap. 2, quelli di tutti i numeri ottenuti per moltiplicazione o divisione di questi, restano da ottenere i logaritmi degli altri numeri primi la cui ricerca sarà quasi come prima, però alquanto semplificata. Si prendano infatti due numeri composti, il maggiore dei quali supera di un'unità il minore; ed il primo sia il prodotto del numero dato (di cui si cerca il logaritmo) o per se stesso o per un numero il cui logaritmo sia noto. E per ottenere due numeri composti di questo tipo in modo più semplice, si prenda come primo numero proprio quello di cui si cerca il logaritmo con i due successivi, uno minore e l'altro maggiore, che sono sempre numeri composti. Oppure, al posto del primo, si prenda un suo multiplo con due numeri successivi, o entrambi maggiori o minori, oppure uno maggiore ed uno minore, il modo tale che il medio di questi tre numeri, moltiplicato per se stesso dia per risultato un numero che supera di un'unità il prodotto dei due numeri estremi, in virtù del 5 libro degli Elementi di Euclide, p.2. Si divida allora il prodotto maggiore per il minore e, con l'inserzione di medi proporzionale tra il quoto e l'unità si determini il logaritmo del quoto, come mostrato prima al Capitolo 7. Ad Esempio: il quadrato di sette (di cui si cerca il logaritmo), 49, moltiplicato per se stesso dà 2401; mentre il prodotto dei due numeri ad esso più vicini, 48 e 50 è 2400. Se quest'ultimo divide il maggiore, il quoto sarà 1$\underline{00041/23}$ o 1$\underline{00041666666666666667}$; il quarantaquattresimo di medi compresi tra il quoto appena ottenuto e l'unità è*

10000,00000,00000,00236,79824,90433,36405 ed ha logaritmo

0,00000,00000,00000,01028,40172,88387,29715 che, raddoppiato quarantaquattro volte, ovvero moltiplicato per 17592186044416 darà per risultato

0.00018,09183,45421,30, pari al logaritmo del quoto 1$\underline{00041666666666666667}$ che, sommato al logaritmo del divisore 2400, darà il logaritmo del dividendo 2401 la cui settima parte è il logaritmo di sette che si ricercava.

Briggs mostra diverse scomposizioni del tipo di quella appena indicata per il calcolo di bl (7), senza però mai precisare come abbia ottenuto i numeri a, b, c. Seguendo Bruce, appare plausibile che abbia attinto a tavole di scomposizioni in numeri primi (p.9-4 di [1]).

Il Capitolo X spiega le regole per il calcolo delle frazioni (*Partes*), proprie od improprie: nel primo caso Briggs afferma che il logaritmo è negativo (*defectivus*), nel secondo caso è positivo (*abundans*). Di questo capitolo riportiamo solo un breve passaggio in cui, esaminando la progressione geometrica di ragione 10 contenente i numeri $\frac{125}{1000}$ (A), $\frac{125}{100}$ (B), 1 (C), $1\frac{25}{100}$ (D) e $12\frac{5}{10}$ (E) Briggs osserva che, $\log D - \log E = \log A - \log B$ benché B e D siano molto più distanti tra loro di quanto non lo siano A e B. Briggs ha chiaro il principio generale che è alla base delle scale logaritmiche il cui scopo è comprimere i dati molto lontani e dilatare quelli molto piccoli. A proposito, ricordiamo che la prima scala logaritmica venne introdotta nel 1620 da Edmund Gunter (1581-1626), professore di astronomia al Gresham College [8].

La distanza tra C e D però è molto minore di quella tra D ed E; ciononostante, se la distanza del logaritmo di B, che è minore di 0, viene sommata alla distanza (del logaritmo) di D, che è maggiore di 0, la distanza complessiva tra (i logaritmi) di B e D, uguaglierà la distanza tra (i logaritmi) di D ed E, o di B ed A. I logaritmi negativi di numeri minori di 1 cambiano caratteristica allo stesso modo dei logaritmi positivi. Infatti, dall'unità al dieci la caratteristica è 0, da dieci a cento è 1, da cento a mille 2, e così via, come abbiamo mostrato al Cap. 4. Allo stesso modo nei logaritmi negativi: tra l'unità ed un decimo la caratteristica è zero, tra un decimo ed un centesimo 1, tra un centesimo ed un millesimo è 2, ecc.[36] (*AL* Cap. X, p.10-5,10-5 di [1])

3.6 Metodi di interpolazione

Le tavole logaritmiche di Briggs ottenute grazie ai metodi riassunti nelle sezioni precedenti coprono gli interi da 1 a 20000 e quelli da 90000 a 100000. Egli affronta nei Capitoli XI-XIV il problema di come ottenere espressioni accurate per i logaritmi di numeri che non compaiono nelle tavole o, al contrario, dato un logaritmo non reperibile nelle tavole, risalire ad un accurato valore per l'antilogaritmo. Dal punto di vista matematico, il problema che si pone a Briggs è quello di maneggiare il comportamento *non* lineare della funzione logaritmo che viene espresso in termini di differenze da Briggs in questi termini

Tuttavia questa parte proporzionale ottenuta per mezzo di queste differenze non è del tutto corretta; ma si discosta sempre un pochino dal valore vero che noi

[36] Distantia autem inter C & D multo minor est quam inter D & E; veruntamen, si distantia Logarithmi B, infra constitutum terminum 0; addatur distantiae D, supra eundem, tota distantia inter B & D, aequabitur distantiae inter D & E, vel inter B & A. Isti autem partium Logarithmi Defectivi, Characteristicam mutant eodem modo quo Abundantes. Nam ab Unitate ad Decem Characteristica est 0, a Decem ad Centum, 1. a Cento ad Millem, 2. & sic Deinceps, ut cap. 4 ostendimus. Eodem modo in Defectivis: ab Unitatem ad partem Decimam, 0. a parte Decima ad Centesimam, 1. a Centesima ad Millesimam, 2. &.

cerchiamo. Infatti, anche se i numeri assoluti crescono in modo uniforme, i logaritmi hanno incrementi minori laddove hanno valori maggiori: se occorre aumentare il logaritmo di un numero di poco inferiore al posto di un numero assoluto con l'ausilio della parte proporzionale, la parte ottenuta con l'aggiunta della differenza sarà sempre minore del dovuto. Al contrario, se si ricerca il numero assoluto corrispondente ad un assegnato logaritmo, con l'aggiunta della parte proporzionale lo si troverà sempre di poco maggiore. Lo stesso problema si riscontra per Seni, Tangenti e Secanti; e lo stesso in tutte le tavole numeriche, dove le differenze sono da una parte uguali, diverse dall'altra.[37] (*AL* Cap. XI, p.11-8 di [1])

È dunque chiaro che il problema non si pone per i logaritmi soltanto ma che è comune alle funzioni trigonometriche, alla cui tabulazione Briggs dedicò molto lavoro. In questa sezione esaminiamo tre metodi proposti da Briggs per ovviare all'inconveniente, in ordine crescente di raffinamento. Il Capitolo XI ha come titolo programmatico *Numerum in Chiliadibus repertum, per partem proportionalem emendare*: si tratta dunque, noto il logaritmo di un numero, di approssimarne l'antilogaritmo. L'osservazione basilare per comprendere la strategia di Briggs è che l'interpolazione lineare è buona nelle ultime migliaia tabulate. Sfruttando le proprietà elementari della funzione logaritmo, Briggs riduce il margine di errore nel calcolo dell'antilogaritmo di x calcolando l'antilogaritmo di un altro numero, legato ad x, che cade molto vicino a 100000 dove l'interpolazione lineare è suscettibile di piccoli errori. Seguiamo l'esempio discusso da Briggs ed illustrato da Bruce [1]. Si vuole trovare il valore numerico di $\sqrt{1200} = a$, ricorrendo alle sole tavole. Anzitutto si nota che $\mathrm{bl}\,(1200)$ è noto e che dunque lo è anche $\mathrm{bl}\,(\sqrt{1200}) = \frac{1}{2}\mathrm{bl}\,(1200)$. Per prima cosa Briggs toglie la caratteristica ad a, riducendolo ad un numero compreso tra 1 e 10: nel caso specifico, egli considera $a/10$. Di questo numero egli definisce il *complemento aritmetico* come quel numero b il cui logaritmo è il complemento ad 1 di $\mathrm{bl}\,(a/10)$. Dalle proprietà elementari dei logaritmi è pertanto $ab/10 = 10$. Si cerca nella tabella un numero c il cui logaritmo, privato della caratteristica, sia leggermente inferiore a $\mathrm{bl}\,(b)$: nell'esempio riportato, $c = 2866$. In questo modo, il numero $ac/10^4$ è di poco inferiore a 10 per cui ac è prossimo a 10^5 e si possono determinare dalla tabella due numeri consecutivi h ed $h+1$ (qui $h = 99973$) tali che

$$\mathrm{bl}\,(h) < \mathrm{bl}\,(ac) < \mathrm{bl}\,(h+1)\,.$$

Se il comportamento del logaritmo in questa regione è circa lineare, allora si

[37] Ista autem pars proportionalis, quae per has acquiritur differentias, non est absolute perfecta; sed semper aliquantulum recedit ab ea quam quaerimus accurata veritate. Cum enim numeri absoluti crescant aequaliter, Logarithmi autem quo sunt maiores eo minora habent incrementa: si pro numero absoluto, Logarithmus numeri proxime minoris, sit per partem proportionalem augendus, pars illa per differentiam interjectam quaesita, erit semper minor quam oportuit. Contra autem, si pro Logarithmo dato quaeratur numerus absolutus, is per partem proportionalem auctus erit iusto maior. Idem accidit incommodi in Sinubus, Tangentibus, Secantibus; omninoque in omnibus tabulis numerorum, ubi differentiae ex altera parte aequales, ex reliqua inequales.

può scrivere la proporzione

$$\frac{\mathrm{bl}\,(h+1)-\mathrm{bl}\,(h)}{1}=\frac{\mathrm{bl}\,(ac)-\mathrm{bl}\,(h)}{ac-h}$$

che può essere risolta in termini di ac e dunque di a. Il risultato ottenuto è preciso fino alla decima cifra decimale.
Si tolga la caratteristica dal logaritmo assegnato (di cui si cerca il numero assoluto) che non può cambiare in alcun modo il numero richiesto ma solo spostarlo ad un grado più alto e più lontano dall'unità, poi lo si sottragga dal logaritmo di dieci, pari ad 1,00000,00000,0000. Non è sconveniente chiamare il numero rimasto il complemento aritmetico del precedente. Cerchiamo nelle tavole quest'ultimo numero (dopo avergli aggiunta una caratteristica che abbiamo visto in precedenza essere estremamente utile) e si prenda il logaritmo che meglio lo approssima per difetto e lo si aggiunga al logaritmo dato (il cui numero assoluto è stato messo da parte per tempo). Il risultato cadrà necessariamente nell'ultimo migliaio, dal quale occorre prendere il corrispondente numero assoluto che potremo correggere con l'uso della parte proporzionale. Si divida questo numero per il numero messo prima da parte; il quoto sarà il numero corrispondente al logaritmo assegnato che cercavamo all'inizio.[38] (*AL* Cap. XI, p.11-8 di [1])

Per evitare l'imbarazzo di una difficile divisione per un numero di quattro cifre come c, Briggs prepara una tavola in cui sono contenuti diversi numeri a quattro cifre con una fattorizzazione semplice e scelti in modo che le loro mantisse (parti decimali) coprano in modo pressoché uniforme l'intervallo $(0,1)$. In questo modo, la divisione finale viene spezzata in divisioni successive con numeri ad una cifra soltanto.

Nel capitolo XII, Briggs presenta uno schema di interpolazione più raffinato che funziona egregiamente per i numeri da 1 a 20000 e da 90000 a 100000 compresi nelle tavole. Il problema che dà il titolo al capitolo, omesso da Vlacq nell'edizione del 1628, è *Siano dati due numeri successivi con i loro logaritmi: trovarne altri nove equidistanti compresi tra quelli assegnati e determinarne i logaritmi.*[39] In termini moderni, Briggs utilizza la formula di Newton troncata al terzo ordine per una funzione $f(x)$:

$$f(x+a)=f(a)+\Delta f(a)x+\frac{1}{2}\Delta^2 f(a)x(x-1)+\frac{1}{3!}\Delta^3 f(a)x(x-1)(x-2)+\ldots \quad (3.1)$$

[38] Datus Logarithmus (cuius numerus absolutus quaeritur) in primis deponat Characteristicam (quae numerum quaesitum nullo modo mutare potest, sed tantum promovere in gradum altiorem & ab Unitatem loco remotiorem) deinde auferatur e Logarithmo Denarij 1,00000,00000,0000. Reliquus non incommode vocare poterit complementum Arithmeticum. Hunc reliquum (addita prius Characteristica quae nobis visa fuerit commodissima), quaeramus inter Chiliades, sumaturque Logarithmus proxime minor & (numero eiusdem absoluto ad tempus seposito) addatur dato Logarithmo. Totus incidet necessario in ultimam Chiliadem, in qua sumendus est numerus absolutus eidem congruens quem per partem proportionalem adjectam emendare poterimus. Hunc numerum inventum & emendatum, dividat prior numerus antea sepositus; quotus erit numerus dato Logarithmo congruens, quem in primis quaerabamus.

[39] Datis duobus numeris proximis, una cum eorum Logarithmis: invenire alios novem aequidistantes, inter eosdem & eorum Logarithmos invenire.

dove $x \in (0,1)$, $\Delta f(a) := f(a+1) - f(a)$ è la differenza prima, mentre $\Delta^k f(a)$ sono le differenze successive, definite con procedimento ricorsivo. Il metodo è efficace se le differenze seconde sono pressoché costanti. Nel primo esempio Briggs considera incrementi nella forma $x = i/10$, con $i = 1, 2, ..., 9$ e prende due numeri consecutivi 91235 e 91236 i cui logaritmi hanno differenza prima $C = 47601,4799$ e differenze seconde entrambe uguali a $D = 5217$. L'algoritmo proposto da Briggs (senza che siano fornite spiegazioni) impone di formare il prodotto di D per 45, togliere le ultime tre cifre ed aggiungere a $C/10$ per ottenere $\mathrm{bl}\,(a + x)$, con $x = 1/10$. Applichiamo l'equazione (3.1) prendendo questo valore di x e troncando al secondo ordine

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{1}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{C}{10} + \frac{9}{200}D = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{C}{10} + \frac{45}{1000}D$$

che spiega la comparsa del valore 45 con la preferenza per le frazioni decimali. Per calcolare $\mathrm{bl}\,(a + \frac{2}{10})$ Briggs può scrivere

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{2}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{2C}{10} + \frac{16}{200}D = \mathrm{bl}\,(a + \frac{1}{10}) + \frac{C}{10} + \frac{35}{1000}D$$

e questo spiega l'algoritmo proposto: formare il prodotto tra D e 35, privato delle ultime tre cifre. Successivamente,

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{3}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{3C}{10} + \frac{21}{200}D = \mathrm{bl}\,(a + \frac{2}{10}) + \frac{C}{10} + \frac{25}{1000}D\,,$$

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{4}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{4C}{10} + \frac{24}{200}D = \mathrm{bl}\,(a + \frac{3}{10}) + \frac{C}{10} + \frac{15}{1000}D\,,$$

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{5}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{5C}{10} + \frac{25}{200}D = \mathrm{bl}\,(a + \frac{4}{10}) + \frac{C}{10} + \frac{5}{1000}D$$

e, da questo punto in poi, lo schema si ripete in modo simmetrico

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{6}{10}) = \mathrm{bl}\,(a) + \frac{6C}{10} + \frac{24}{200}D = \mathrm{bl}\,(a + \frac{2}{10}) + \frac{C}{10} - \frac{5}{1000}D\,,$$

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{7}{10}) = \mathrm{bl}\,(a + \frac{6}{10}) + \frac{C}{10} - \frac{15}{1000}D\,,$$

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{8}{10}) = \mathrm{bl}\,(a + \frac{7}{10}) + \frac{C}{10} - \frac{25}{1000}D\,,$$

$$\mathrm{bl}\,(a + \frac{9}{10}) = \mathrm{bl}\,(a + \frac{8}{10}) + \frac{C}{10} - \frac{35}{1000}D$$

e

$$\mathrm{bl}\,(a+1) = \mathrm{bl}\,(a + \frac{9}{10}) + \frac{C}{10} - \frac{45}{1000}D\,.$$

Se le differenze seconde sono leggermente diverse tra loro, Briggs ne assume la media aritmetica come valore per D. Qualora si voglia conoscere un solo valore intermedio, è più utile usare lo schema precedente esprimendo $\mathrm{bl}\,(a + \frac{i}{10})$ in termini di $\mathrm{bl}\,(a)$ e non di $\mathrm{bl}\,(a + \frac{i-1}{10})$. Si spiega in questo modo la

nuova successione di numeri $45, 80, 105, 120, 125$ che Briggs pone a fattore di D. Infine, il metodo è applicato all'algoritmo presentato nel capitolo XI per trovare con maggior precisione le parti proporzionali. Infatti, una volta ingabbiato ac tra due numeri consecutivi h ed $h+1$ nell'ultimo migliaio di numeri tabulati, si calcola la differenza prima $\Delta_h := \mathrm{bl}\,(h+1) - \mathrm{bl}\,(h)$ e la differenza prima $\Delta_{ac} := \mathrm{bl}\,(ac) - \mathrm{bl}\,(h)$ e si determina l'intero n prossimo alla soluzione y della proporzione

$$\Delta_h : \Delta_{ac} = 10 : y\,,$$

individuando l'intervallo di ampiezza $1/10$ ove cade ac. A questo punto, lo schema alle differenze ora esposto viene applicato per ottenere il logaritmo cercato. Gli estratti che seguono si riferiscono nell'ordine ai tre problemi appena illustrati.

Si considerino due numeri consecutivi A con i loro logaritmi B insieme alle differenze prime C e seconde D. Se le differenze seconde sono uguali, se ne moltiplichi una per i numeri contenuti nella tabella E che sono associati ai primi dieci numeri naturali: dai prodotti si eliminino le ultime tre cifre e si combini il risultato alla decima parte della differenza prima compresa (tra i due numeri A), aggiungendola per i primi cinque numeri, sottraendola per gli altri: i numeri ottenuti sono le differenze dei logaritmi che, sommate al logaritmo più piccolo secondo la loro posizione danno i logaritmi cercati come vedi qui: siano dati i numeri 91235.91236. e la differenza prima 47601,4799[40]

			E	
47602,0016 C			1. 45	*prodotti*
91235 A	4,96016,14763,8639 B	5217 D	2. 35	*da aggiungere*
	47601,4799 C		3. 25	
91236 A	4,96016,62365,3438 B	5217 D	4. 15	
	47600,9582 C		5. 5	
			6. 5	*prodotti*
			7. 15	*da sottrarre*
			8. 25	
			9. 35	
			10. 45	

[40]Sumantur duo numeri proximi A & eorum Logarithmi B, una cum eorum differentiis primis C, & secundis D. Si differentiae secundae sint aequales, multiplicetur eorum altera per numeros in abaco E, decem primis numeris adiunctos: facti autem F G H I K demptis tribus ultimis notis, pro primis quinque addantur, pro totidem reliquis auferantur parti decimae differentiae primae C interiectae: toti & reliqui erunt differentiae Logarithmorum; quae dato minori Logarithmo, suo ordine continue additae, dabunt Logarithmos quaesitos, ut hic vides. Sunto dati numeri 91235.91236. differentia prima 47601,4799

Num. Ass.	*Logaritmi*		*prodotti*	5217 *fattore*
912350	4,96016,14763,8639		F—234| 765	45
	4760,1715	C+F	G—182| 595	35
912351	4,96016,19524,0354		H–130| 425	25
	4760,1662	C+G	I—78| 255	15
912352	4,96016,24284,2016		K—26| 085	5
	4760,1610	C+H	47601479|9	$\frac{1}{10}$C
912353	4,96016,29044,3626		47601714|7	C+F
	4760,1558	C+I	47601662|5	C+G
912354	4,96016,33804,5184		47601610|3	C+H
	4760,1506	C+K	47601558|2	C+I
912355	4,96016,38564,6690		47601506|0	C+K
	4760,1454	C-K	47601453|8	C-K
912356	4,96016,43324,8144		47601401|6	C-I
	4760,1402	C-I	47601349|5	C-H
912357	4,96016,48084,9546		47601297|3	C-G
	4760,1350	C-H	47601245|1	C-F
912358	4,96016,52845,0896			
	4760,1297	C-G		
912359	4,96016,57605,2193			
	4760,1245	C-F		
912360	4,96016,62365,3438			

(*AL* Cap. XII, p.12-9,12-10 di [1])

Si vuole ora trovare bl (96157) noti bl (96150) e bl (96160), saltando i passaggi intermedi.

Se desideri trovare solo uno (di questi logaritmi) omettendo gli altri (procedi così): moltiplica per un numero minore di dieci, associato al numero A, la differenza prima C e moltiplica il numero associato (ad A) nella tabella E[41]*. per la differenza seconda; somma i prodotti omettendo la cifra più a destra nel primo e le tre cifre più a destra nel secondo: il risultato finale, sommato al logaritmo assegnato, darà il logaritmo cercato. Ad esempio, se volessi sapere il valore del logaritmo del numero 96157, moltiplico la differenza data 4516608416 per 7 ottenendo 31616258912 e poi moltiplicherei la differenza seconda 469721 per il numero 105 che si trova in corrispondenza del 7 nella tabella E. Tolte le tre ultime cifre al prodotto 49320| 705, e sommatolo al prodotto precedente da cui ho omesso l'ultima cifra, 3161625891, ottengo 3161675212 che sommato al logaritmo dato darà il logaritmo cercato 3,98298,09053,2662.*[42] (*AL* Cap. XII, p.12-10,12-11 di [1])

[41] Si tratta di una tabella che contiene i coefficienti 45,80,105,120,125,120,105,80,45 per i quali occorre moltiplicare la differenza seconda in funzione dell'intervallo decimale occupato dal numero di cui si cerca il logaritmo

[42] Quod si horum aliquem invenire cupias, reliquis omissis: numerus denario minor, numero A adiectus, multiplicet datam differentiam C & numerus eidem adiunctus in abaco E, multiplicet differentiam secundam, & demptis hinc tribus, illinc unica nota, addantur facti: totus dato Logarithmo additus, dabit Logarithmum quaesitum. Ut si scire velim quis sit Logarithmus numeri 96157, data differentia 4516608416 multiplicetur per 7 factus 31616258912, deinde 105 situs e regione numeri 7 in abaco E, multiplicet differentiam secundam 469721, factus 49320| 705 ablatis tribus notis ultimis, addatur priori facto, cui unica nota detracta fuerit 3161625891, totus 3161675212 addatur dato Logarithmo totus 3,98298,09053,2662 erit

Infine, ecco come Briggs combina la tecnica di interpolazione per trovare parti proporzionali più accurate di quelle trovate nel precedente capitolo.

E questo modo consente di ottenere una parte proporzionale sufficientemente accurata. Infatti, dopo aver trasferito il logaritmo assegnato dalla sua posizione all'ultimo o penultimo migliaio, secondo le regole insegnate nel capitolo precedente, potremo aggiungere la prima cifra della parte proporzionale al numero assoluto trovato nella tabella e trovare il logaritmo di questo numero grazie al metodo appena esposto, insieme alla differenza tra questo ed il numero immediatamente successivo. Questa differenza fornirà la parte proporzionale cercata con estrema precisione, come possiamo vedere grazie ad un unico esempio. Si voglia trovare il valore della radice quadrata di 147. Il logaritmo del numero dato è 2,16731,73347,4814, la cui metà, 1,08365,86673,7409, è il logaritmo della radice cercata.[43]

	Logaritmi	
$\sqrt{147}$	1,08365,86673,7409	*dato*
8192	0,91338,99436,3175	*prossimo al complemento*
N.N	0,99704,86110,0584	*totale*
	31548,5329	*differenza*
99322	0,99704,54561,5255	
	43725,6897	*differenza*
99323	0,99704,98287,2152	

Fin qui, secondo le regole del Cap. XI che hanno fornito il numero 7 da associare al numero 99322 trovato nelle tavole; le altre si possono trovare secondo quelle che subito le precedono.

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{r} 43725 \\ 31548 \end{array}\right\} & \text{differenze date} \\ 10 & \\ 7 & \text{richiesta} \end{array}\right.$$

(*AL* Cap. XII, p.12-11 di [1])

I metodi di interpolazione più raffinati sono presentati nel Capitolo XIII dove Briggs deve trovare i logaritmi di quattro numeri equidistanti e compresi tra due numeri tabulari, separati di cinque unità, di cui sono noti i logaritmi. Briggs presenta ancora un lavoro di sub-tabulazione ma questa volta il compito è più arduo in quanto sono note le differenze di numeri ben separati tra loro: in

Logarithmus quaesitus.

[43] Atque hic modus partem proportionalem inveniet satis accuratam. Cum enim secundum ea quae superiori capite tradebantur, Logarithmum datum transtulimus, a loco proportio in ultimam vel penultimam Chiliadem, poterimus primam partis proportionalis notam, numero absoluto in Chiliade reperto adijcere, & numeri aucti Logarithmum per proxime precedentiam invenire, una cum differentia inter eundem & proxime maiorem. Haec differentiam dabit partem proportionalem quam quaerimus accuratissimam huius rei unicum videamus exemplum. Quaeratur latus numeri 147. Dati Logarithmus est 2,16731,73347,4814, huius semissis, 1,08365,86673,7409 est Logarithmus quaesiti lateris. Hucusque per praecepta Cap. XI quae dederunt notam 7, numero 99322 in abaco reperto adijciendam, reliqua quaerantur secundum ea quae proxime praecesserunt.

pratica si possono conoscere le differenze $\mathrm{bl}\,(a+5)-\mathrm{bl}\,(a)$ e le successive, mentre occorre estrapolare le differenze del tipo $\mathrm{bl}\,(a+1)-\mathrm{bl}\,(a)$ e le successive. Come di consueto, Briggs fornisce la ricetta, senza indicare il fondamento teorico su cui poggia ed in effetti, data l'assenza di un adeguato formalismo, resta ancora da capire come Briggs sia riuscito ad ottenere gli schemi qui enunciati. Per comprendere i testi, seguiamo le ricostruzioni di Goldstine [7] e Bruce [1]. Iniziamo con il definire l'operatore di scorrimento a destra E come

$$Ef(a) := f(a+1)$$

e di scorrimento a sinistra

$$E^{-1}f(a) = f(a-1):$$

la notazione è appropriata in quanto $E^{-1}Ef(a) = EE^{-1}f(a) = f(a)$. In generale

$$E^n f(a) = f(a+n)\,.$$

Grazie a questo operatore è possibile scrivere la differenza

$$\Delta f(a) := f(a+1) - f(a)$$

come

$$\Delta f(a) = (E-I)f(a)$$

dove I è l'identità. Similmente, le differenze di ordine superiore si possono scrivere come applicazioni successive di $E-I$ ad $f(a)$:

$$\Delta^2 f(a) := \Delta[\Delta f(a)] = f(a+2)-2f(a+1)+f(a) = (E-I)^2 f(a), \quad \Delta^n f(a) = (E-I)^n f(a)\,.$$

È anche utile introdurre l'operatore

$$\Delta_1^1 f(a) := E\Delta f(a) = f(a+2) - f(a+1)$$

ed, in generale,

$$\Delta_k^n f(a) = E^k \Delta^n f(a)\,.$$

Osserviamo a margine che gli operatori E e Δ commutano: $\Delta E f(a) = E\Delta f(a)$. Infine, occorre considerare le differenze medie (*differentiae mediae*)

$${}_m\Delta f(a) := \frac{f(a+m) - f(a)}{m}\,.$$

L'obiettivo di Briggs è quello di risalire alle differenze Δ^n partendo dalle differenze medie ${}_m\Delta_k^n$. Negli esempi discussi in questo capitolo, $m=5$ od $m=3$. Con calcoli diretti si verifica che

$$(E+E^{-1}-2I)f(a) = \Delta_{-1}^2 f(a) \tag{3.2}$$

$$(E^2+E^{-2}-2I)f(a) = (\Delta_{-2}^4 + 4\Delta_{-1}^2)f(a) \tag{3.3}$$

da cui possiamo estrarre un legame tra differenze medie e differenze semplici. Infatti,

$$_5\Delta^1 f(a) = \frac{f(a+5)-f(a)}{5} = \frac{(E^5-I)}{5} f(a) = \frac{(E-I)(E^4+E^3+E^2+E+I)}{5} f(a) =$$

$$= \frac{(E-I)E^2(E^2+E+I+E^{-1}+E^{-2})}{5} f(a) = \frac{1}{5}\Delta^1_2(\Delta^4_{-2} + 5\Delta^2_{-1} + 5I)f(a) = (\frac{1}{5}\Delta^5 + \Delta^3_1 + \Delta^1_2)f(a)$$

che può essere risolta in termini di $\Delta^1 f(a)$, dopo aver moltiplicato ambo i membri a sinistra per E^{-2}:

$$\Delta^{(1)} f(a) = ({}_5\Delta^1_{-2} - \frac{1}{5}\Delta^5_{-2} - \Delta^3_{-1})f(a)$$

dove, seguendo Bruce, si è scritta la differenza prima come $\Delta^{(1)} f(a)$, dove le parentesi indicano che tale differenza è *correzione* della differenza media.

Procedendo in modo analogo si può mostrare che

$$_5\Delta^2 = (\frac{1}{5}\Delta^5 + \Delta^3_1 + \Delta^1_2)^2 f(a) = (\Delta^2_4 + 2\Delta^4_3 + \frac{7}{5}\Delta^6_2 + \frac{2}{5}\Delta^8_1 + \frac{1}{25}\Delta^{10})f(a)$$

da cui si ottiene il valore corretto della differenza prima

$$\Delta^{(2)}_4 f(a) = ({}_5\Delta^2 - 2\Delta^4_3 + \frac{7}{5}\Delta^6_2 + \frac{2}{5}\Delta^8_1 + \frac{1}{25}\Delta^{10})f(a)\,.$$

Briggs portò avanti questo schema di correzioni fino a calcolare le differenze ventesime corrette. A guardare le ultime formule ottenute, si può pensare che i risultati siano inutili, in quanto nei membri di destra compaiono differenze semplici che non sono note. Ora, occorre notare che le correzioni all'ordine k di una differenza coinvolgono le differenze all'ordine $k+2$ che rapidamente cadono al di sotto della soglia di precisione—peraltro notevole— richiesta da Briggs. Ad esempio, nel caso illustrato da Briggs egli osserva che le differenze medie quarte e quinte non vanno corrette in quanto le differenze medie seste e settime si annullano ed è lecito porre $\Delta^{(5)} = \Delta^5$ e $\Delta^{(4)} = \Delta^4$. È proprio la possibilità di assumere le differenze medie come differenze corrette, almeno da un certo ordine in poi, che rende funzionale il metodo di Briggs che, per così dire, funziona "a ritroso", cominciando a produrre le correzioni agli ordini più alti e via via a scalare. Seguiamo ora per passi l'esposizione di Briggs.

Si considerino le differenze prime, seconde, terze, quarte, ecc. dei logaritmi assegnati e si dividano le prime per 5, le seconde per 25, le terze per 125, ecc. cioè con divisori che crescono ogni volta di un fattore 5: i quoti sono detti differenze medie prime, seconde, terze, ecc. Meglio ancora, invece di dividere, si moltiplichino le differenze prime per due, le seconde per quattro, le terze per otto, ecc. per poi eliminare una cifra nel primo di questi prodotti, due nel secondo, tre nel terzo, ecc. Questi prodotti che sono uguali ai quoti precedenti sono le differenze medie prime, seconde, terze, ecc. Siano dati allora questi

logaritmi insieme alle loro differenze prime, seconde, terze, quarte, quinte che sono ottenute grazie per sottrazione dal logaritmo dato.[44]

quintae	*quartae*	*tertiae*	*secundae*	*primae*	*logarithmi*	*numeri absoluti*
		1151695		102791641337		
	8138		242719568		33253,10371,71106	2115
75		1143557		102548921769		
	8063		241576011		33263,35860,92875	2120
75		1135494		102307345758		
	7988		240440517		33273,58934,38633	2125
		1127506		102066905241		

Nella posizione successiva si trovano le differenze medie cercate: la prima ottenuta moltiplicando la differenza data per due ed eliminata una cifra dal prodotto. Le altre si ottengono se si moltiplicano quelle date per 4.8.16.32. ecc. (*AL* Cap. XIII, p.13-17 di [1])

Qui Briggs definisce le differenze medie spiegando come trovarle a partire dalle differenze qui tabulate. Notiamo che egli definisce

$$ {}_5\Delta^1 = \frac{f(a+5)-f(a)}{5} = 2\frac{f(a+5)-f(a)}{10} $$

che spiega la prescrizione di moltiplicare le differenze per 2 e poi trascurare l'ultima cifra a destra. Nella tabella riportata qui sopra, compaiono le differenze $f(a+5)-f(a)$ e le successive prima della normalizzazione all'ampiezza (5) dell'intervallo che viene riportata nella seguente tabella

[44]Sumantur differentiae primae, secundae, tertiae, quartae, & c. datorum Logarithmorum;& dividantur primae per 5, secundae per 25, tertiae per 125, & c.; divisoribus quintupla ratione crescentibus: quoti appellantur differentiae mediae, primae, secundae, tertiae, &. Vel potius loco divisionis, fiat multiplicatio datarum primarum per binarium, secundarum per quaternarium, tertiarum per octonarium, &. amputaris unica nota in factis a primis, duabus in proximis, tribus in tertiis, &c. hi facti qui sunt illis quotis aequales, erunt differentiae mediae primae, secundae, tertiae, &. ut sunto dati hi Logarithmi una cum eorum differentiis primis, secundis, tertiis, quadratis, quintis, quas ipsi dati Logarithmi per subductionem ostendunt. Proximo in loco sunt differentiae mediae quaerendae, per multiplicationem, primarum datarum per binarium, facti dempta nota unica erunt primae. Reliquae mediae fiunt si datas multiplicent 4.8.16.32. &c.

	Differentiae mediae	
primae	20558328267 |4 20509784353 |8 20461469151 |6 20413381048 |2	per 2
secundae	9708782 | 72 9663040 | 44 9617620 | 68	per 4
tertiae	9213 | 560 9148 | 456 9083 | 952 9020 | 048	per 8
quartae	13 | 0208 12 | 9008 12 | 7808	per 16
quintae	| 02400 | 02400	per 32

Ora Briggs fornisce senza alcuna spiegazione la tabella cruciale, quella per effettuare le correzioni

Ed in questo modo tutte le differenze sono corrette e disposte, per assolvere il loro compito, allo stesso modo in cui dovremmo fare se vi fossero più specie di differenze, a partire da quelle più lontane e piccole. La seguente tabella indica quante vanno tolte per ciascuna specie:

20								
19								
18	18(20)							
17	17(19)							
16	16(18)	123 1 (20)						
15	15(17)	108 0 (19)						
14	14(16)	93 9 (18)	400 4 (20)					
13	13(15)	80 6 (17)	317 2 (19)					
12	12(14)	68 4 (16)	246 4 (18)	629 64 (20)				
11	11(13)	57 2 (15)	187 0 (17)	431 20 (19)				
10	10(12)	47 0 (14)	138 0 (16)	283 80 (18)	434 40 (20)			
9	9(11)	37 8 (13)	98 4 (15)	177 84 (17)	236 88 (19)			
8	8(10)	29 6 (12)	67 2 (14)	104 72 (16)	118 72 (18)	111 248 (20)		
7	7(9)	22 4 (11)	43 4 (13)	53 20 (17)	36 680 (19)			
6	6(8)	16 2 (10)	26 0 (12)	27 60 (14)	20 40 (16)	10 760 (18)	4 080 (20)	
5	5(7)	11 0 (9)	14 0 (11)	11 40 (13)	6 20 (15)	2 280 (17)	500 (19)	
4	4(6)	6 8 (8)	6 4 (10)	3 64 (12)				
3	3(5)	3 6 (7)	2 2 (9)	7 2 (11)	1 2 (13)	008 (15)		
2	2(4)	1 4 (6)	4 (8)	04 (10)				
1	1(3)	2 (5)						
A	B	C	D	E	F	G	H	I

I numeri posti nella colonna A indicano le differenze medie prime, seconde, terze, ecc. fino alle ventesime. Invece i numeri nelle colonne BCD mostrano quante e quali differenze corrette vanno tolte dalle differenze medie poste nella colonna A corrispondente alla medesima linea. Ad esempio: dalla differenza media sesta, bisogna togliere 6 differenze ottave corrette; 16 $\frac{2}{10}$ *differenze decime, 26 differenze dodicesime, ecc. Similmente dalla differenza media prima occorre togliere una differenza terza corretta e* $\frac{1}{5}$ *differenze quinte.*[45] (*AL* Cap. XIII, p.13-18, 13-19 di [1])

[45] Atque ad hunc modum sunt omnes differentiae correctae, & ad suum munus exequendum paratae eodem modo uti deberemus si plures fuissent differentiarum species, incipiendo a min-

Ottenuto lo schema per le correzioni delle differenze medie, Briggs richiama l'attenzione del lettore sulla necessità di ordinare bene le differenze, al posto opportuno, per evitare confusioni. Questo denso capitolo si chiude con la spiegazione delle correzioni da apportare alle differenze nel caso si abbiano i valori di una funzione f per punti distanti tra loro tre anziché cinque unità e con un metodo per completare la tabella dei logaritmi, usando quelle già a disposizione che coprono i primi 20000 numeri e quelli da 90000 a 100000. Così per subtabulare i logaritmi di numeri nel 21-esimo migliaio, come 20000, 20005, ecc. è sufficiente osservare che $20000 = 4000 \times 5$, $20005 = 4001 \times 5$, e così via e che dalle differenze ottenute per i logaritmi di 4000, 4001, 4002,..., si ottengono le differenze medie nel 21° migliaio.

Se hai bisogno di aggiungere un altro migliaio oltre a questi, ad esempio il ventunesimo, prendi la quinta parte del migliaio da cui stai per iniziare: il primo numero è 20000; si prendono i logaritmi della quinta parte, 4000, e dei duecento numeri successivi che, aggiunti ordinatamente al logaritmo di cinque daranno i logaritmi dei numeri nel migliaio richiesto, spaziati di cinque unità: cioè 20000, 20005, 20010, 20015 le cui differenze prime coincidono con quelle trovare tra i duecento numeri presi nel quinto migliaio.[46] (*AL* Cap. XIII, p.13-20 di [1])

3.7 Il metodo radicale

Lo scopo del Capitolo XIV dell'*Arithmetica Logarithmica* è affermato nel titolo *Dato cuicunque Logarithmo numerum absolutum convenientem invenire & contra* ed il metodo proposto da Briggs, perfezionato a più riprese, è passato alla storia come *metodo radicale*. Briggs suppone dapprima di voler trovare un numero N il cui logaritmo è noto ma non si trova nella tavola. Per questo egli cerca il numero tabulato $N_0 < N$ più vicino possibile ad N, calcola

$$\mathrm{bl}\,(N) - \mathrm{bl}\,(N_0) = \mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0}) = r_1$$

e determina un numero della forma $1 + q_1$, con $q_1 \in [10^{-k}, 10^{-k+1})$ e $k \geq 1$ tale che $\mathrm{bl}\,(1 + q_1)$ sia uguale o di poco inferiore a r_1 e calcola la differenza

$$\mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0}) - \mathrm{bl}\,(1 + q_1) = \mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0(1 + q_1)}) = r_2 < r_1$$

imis & remotissimis. Quot autem in unaquaque specie sint auferendae, indicat haec subjecta tabella: (...) Numeri in columna A positi, designant differentias medias, primas, secundas, tertias, &c. usque ad vicesimam. Numeri vero in columnis BCD &c. ostendunt quot & quales differentiae correctae auferendae ab illis differentiis mediis, quae in columna A in eadem cum illis linea sitae sunt. Exempli causa: a differentia media sexta, auferendae sunt differentiae correctae octavae 6; decime 16 $\frac{2}{10}$, duodecimae 26, &c. Eodem modo e differentia prima media auferendae sunt differentiae correctae tertia 1 & quinque $\frac{1}{5}$.

[46] Si Chiliadem aliam istis adijciendam censes, puta vicesimam primam, sumenda est pars quinta illius a quo initium sumpturus es: primus numerus erit 20000, cuius pars quinta 4000, huius Logarithmo & ducentis proximis, sigillatim addatur Logarithmus quinarij, summae erunt Logarithmi, quini cuiusque numeri, per totam Chiliadem: nempe 20000, 20005, 20010, 20015 & horum autem differentiae primae sunt illae ipsae quae in Chiliade quinta, intra illos ducentos Logarithmos inveniuntur.

ed itera la procedura cercando un numero della forma $(1+q_2)$, con q_2 almeno un ordine di grandezza minore di q_1 e tale che $\mathrm{bl}\,(1+q_2) \leq r_2$ e definisce

$$\mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0(1+q_1)}) - \mathrm{bl}\,(1+q_2) = \mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0(1+q_1)(1+q_2)}) = r_3 < r_2$$

fino a quando non arriva al passo n in cui

$$\mathrm{bl}\,(\frac{N}{N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdot\cdot(1+q_n)}) = 0$$

o comunque inferiore al grado di precisione richiesto. A questo punto è chiaro che deve essere

$$\frac{N}{N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdot\cdot(1+q_n)} = 1$$

e dunque

$$N = N_0(1+q_1)(1+q_2)\cdot\cdot(1+q_n)\,.$$

Ecco nel seguito il passo corrispondente dell'*Arithmetica Logarithmica*.

Testo 3.6 (Briggs, Arithmetica Logarithmica Cap. XIV) p.14-6 di [1]. Originale 3.14 *Abbiamo mostrato al Cap. XI come un numero trovato nella Tabella possa essere accresciuto con il ricorso alla parte proporzionale al punto che l'errore sia raramente prima della dodicesima cifra*[47]. *Mostrerò ora, grazie alla tabella che segue, come sia possibile trovare un numero vero da determinare solo con il ricorso a sottrazione e moltiplicazione: a condizione che sia un numero razionale da poter descrivere con un numero di cifre non superiore a quattordici.*

I numeri contenuti in questa tabella si distinguono in Novenari. Quelli a sinistra sono numeri interi ad una cifra e certe parti dell'unità: nella regione di destra vi sono i corrispondenti logaritmi. I primi nove numeri sono numeri ad una cifra e sono indicati con la lettera A: I nove numeri successivi, indicati con la lettera B sono unità e parti decimali di unità; come $1\underline{1}$, $1\underline{2}$, $1\underline{3}$, *ecc. I nove successivi, indicati con la lettera C, sono unità e sue parti centesime. E così via, i nove numeri indicati con D sono l'unità e sue parti millesime, quelli indicati con E sono (unità con) parti decimillesime, ecc. Per trovare, per mezzo di questi numeri, il numero assoluto corrispondente ad un dato logaritmo, si procede in questo modo. Sia assegnato il logaritmo 3,66067,57883,3852. Dopo aver tolto la caratteristica, si sottragga il logaritmo di tre, tratto dal primo Novenario, 0,47712,12547,19662: resterà 0,18355,45336,18858 da cui si potrà sottrarre il logaritmo di* $1\underline{4}$ *che la tabella contiene nel secondo Novenario e quindi occorre sottrarre il logaritmo di* $1\underline{09}$ *che si trova nel Novenario successivo e si ottiene zero. Affermo che il numero cercato è ottenuto per moltiplicazione successiva di questi tre numeri: 3,* $1\underline{4}$, $1\underline{09}$, *cioè* $4\underline{578}$. *L'operazione per esteso appare così.*

[47] Nell'edizione di Vlacq, che ha lavorato con due cifre decimali in meno di Briggs, si parla di *locum decimum*, ovvero della decima cifra decimale.

0,66067,57883,3852	*logaritmo dato*	1$\underline{4}$	*moltiplicando*
0,47712,12547,19662	*- - - 3*	*3*	*moltiplicatore*
0,18355,45336,18858	*resto*	4$\underline{2}$	*prodotto*
0,14612,80356,78238	*- - -*1$\underline{4}$	4$\underline{2}$	*moltiplicando*
0,03742,64979,40620	*resto*	1$\underline{09}$	*moltiplicatore*
0,03742,64979,40622	*- - -*1$\underline{09}$	*378*	
0,00000,00000,00000		*42*	
		4$\underline{578}$	*prodotto*

I *novenarii* cui Briggs fa riferimento sono contenuti in una tabella ausiliaria dove sono riportati i logaritmi dei numeri da 1 a 9 (primo novenario), da $1,1 = 1\frac{1}{10}$ a $1,9 = 1\frac{9}{10}$ (secondo novenario), da 1,01 a 1,09, da 1,001 a 1,009, e così via a gruppi di nove fino a giungere a $1\frac{9}{10^9} = 1,000000009$.

Nella seconda parte del capitolo, Briggs risolve il problema opposto, cioè assegnato un numero non appartenente alle tavole, trovarne il logaritmo: *Dato cuilibet numero absoluto, Logarithmum congruum invenire.* Il procedimento è analogo al precedente. Preso il numero N, se ne trova un altro N_0 il cui logaritmo è presente nella tabella e tale che N/N_0 ha 1 per parte intera. Posto

$$N - N_0 = r_1$$

si determina un numero q_1 nella forma $k/10^m$ tale che

$$r_1 = q_1 N_0 + r_2 > r_2$$

per cui

$$N - N_0 = q_1 N_0 + r_2$$

e dunque

$$N = N_0(1 + q_1) + r_2\,.$$

La procedura viene iterata cercando un altro numero q_2 tale che

$$r_2 = q_2 N_0(1 + q_1) + r_3 > r_3$$

in modo che

$$N = N_0(1 + q_1)(1 + q_2) + r_3$$

e così via fino al punto che o $r_n = 0$, o esso è minore di un prefissato livello di tolleranza. A questo punto

$$N = N_0(1 + q_1)(1 + q_2) \cdots (1 + q_n)$$

e, poiché sono noti i logaritmi dei fattori a destra, sarà ottenibile anche $\mathrm{bl}\,(N)$.

Testo 3.7 (Briggs, Arithmetica Logarithmica, Cap. XIV) pp.14-7, 14-8 di [1]. Originale 3.15.

Abbiamo prima mostrato come si debba trovare un numero assoluto corrispondente ad un dato logaritmo; grazie alla sottrazione dei logaritmi compresi nella tabella precedente e per moltiplicazione successiva dei numeri posti nella

regione: ora, al contrario, occorre mostrare come trovare il logaritmo corrispondente ad un numero assegnato; con il ricorso alla divisione del numero dato e la somma dei logaritmi corrsipondenti ai quoti. Se il numero dato è composto da non più di cinque cifre, il suo logaritmo si trova nelle tavole. Se le cifre sono di più, si consideri il numero formato solo dalle prime quattro cifre (...) che divida il numero assegnato in modo che, sottratto il divisore dal dividendo una volta, il prodotto del divisore per il quoto trovato sia aggiunto sempre al divisore: si aggiungano al logaritmo dato quelli che si trovano nella tabella in corrispondenza dei quoti particolari: il risultato finale sarà il logaritmo del numero dato. Ad esempio, se il numero dato è 3041851528656, lo divido per 3041 che sottraggo dal dividendo annotando 1 nel quoto: rimarrà 851528656. Quindi procedo e dopo tre zero metto due nel quoto e sottraggo dal dividendo il prodotto di due per il divisore dato, scrivendo al di sotto il resto. Dopo aggiungo al divisore il medesimo prodotto e divido il resto per il risultato dell'addizione; sottraendo il prodotto dal dividendo ed aggiungendo lo stesso al divisore: come prima, puoi vedere qui lo svolgimento completo dell'operazione.

A.	*3041— divisore dato* *6082 primo prodotto*	*3041851528656 (100028* *3041*
C.	*30416082 divisore aumentato* *243328656 secondo prodotto*	*851528656* *6082— primo prodotto*
E.	*3041851528656 divisore aumentato*	*243328656* *243328656 secondo prodotto*
		Logaritmi
A.	*del divisore 3041*	*348301642014413*
B.	*del secondo quoto 10002*	*0000086850211648*
C.	*del divisore aumentato*	*3483103270355778*
D.	*del terzo quoto 100008*	*0000034742168882*
E.	*del divisore aumentato di nuovo*	*3483138012524660*

La dimostrazione di tutte queste operazioni va ricercata nel capitolo due. Infatti sia A il divisore dato, B il secondo quoto, C i fattori del divisore aumentato: quest'ultimo è distinto dal divisore dato e non è improprio chiamarlo divisore secondo. Il suo logaritmo è pari (alla somma) dei logaritmi di A e B. Per 3 il terzo assioma del cap. 2 il secondo divisore gioca lo stesso ruolo, dividendo il numero complessivo e trovando il terzo quoto. Infatti, benché moltiplichi soltanto l'ultima cifra del quoto e solo il prodotto con questo venga sottratto dal resto, tuttavia comprendiamo che occorre anche sottrarre il prodotto dalla cifra delle unità nella sottrazione precedente la determinazione dell'ultimo quoto: pertanto il logaritmo di quest'ultimo quoto D viene aggiunto al logaritmo del secondo divisore C, il risultato sarà il logaritmo del divisore E nuovamente aumentato: e coincide con quello del dividendo. Questa divisione e l'incremento del divisore procede sino a quando il prodotto dei fattori sia uguale al dividendo assegnato e di cui si cerca il logaritmo.

Con quest'ultimo stratagemma di calcolo termina la parte principale della *Arithmetica Logarithmica*: *Fin qui ciò che riguarda la formazione e le proprietà*

dei logaritmi. Seguono certi esempi del loro uso[48]. I restanti capitoli sono dedicati alle applicazioni ma non li esaminiamo, volgendo piuttosto l'attenzione allo studio delle fonti di Briggs.

3.8 Fonti dei metodi di Briggs

In mancanza di riferimenti bibliografici che consentano di risalire alle fonti di Briggs, si pone il problema di sapere se tutti i metodi numerici esposti nell'*Arithmetica Logarithmica* siano originali oppure se egli sia debitore ad altri. Ci occupiamo in questa sezione delle possibili fonti per il metodo radicale e per gli schemi alle differenze. La fonte del metodo radicale si trova nell'Appendice aggiunta alla ristampa del 1618 della traduzione inglese della *Descriptio* di Nepero completata a Londra nel 1616 da Edward Wright con il titolo *A Description of the Admirable Table of Logarithms.* La traduzione fu inviata a Nepero che la approvò. Poco dopo Wright morì ed il compito di porre mano alla stampa passò al figlio Samuel. L'edizione del 1616 contiene una prefazione di Briggs che curò anche la spiegazione di una tavola ausiliaria da usare per trovare le parti proporzionali e che era stata introdotta da Edward Wright senza spiegazione alcuna. Va osservato che il numero di cifre decimali era stato ridotto a sei nella traduzione, una in meno rispetto all'originale di Nepero. La prima ristampa apparve nel 1618 e rispetto all'edizione di due anni prima contiene un nuovo frontespizio e un'Appendice di sedici pagine dal titolo *An Appendix to the Logarithmes, shewing the practise of the Calculation of Triangles, and also a new and ready way for the exact finding out of such lines and Logarithmes as are not precisely to be found in the Canon.* L'Appendice è anonima ed apparve naturale attribuirla a Briggs che, dopo tutto, aveva già dato altri contributi all'edizione del 1616. Il primo a mettere in discussione l'attribuzione a Briggs nel 1865 fu Augustus De Morgan (1806-1871) che la attribuì a William Oughtred (1574-1660) per le notazioni trigonometriche utilizzate.

Hutton attribuisce la nuova appendice a Briggs che aveva scritto nella vecchia versione. Sono propenso ad attribuirla ad Oughtred, che non si era ancora manifestato come uno scrittore di matematica, ma viveva in campagna come rettore di Albury. La mia motivazione è che la nuova appendice contiene queste abbreviazioni per il seno e per la tangente *(s e t) che Oughtred utilizzò in seguito nel suo libro sulla trigonometria (1657) e che Briggs non utilizzò, come nessuno degli altri scrittori contemporanei che sono riuscito a trovare.* [49] (p. 147 di [9]).

[48] Hactenus de creatione & affectonibus Logarithmorum. Sequuntur quaedam ad eorum usum spectantia

[49] The new appendix is attributed by Hutton to Briggs, who had written in the old part. I am inclined to attribute it to Oughtred, who had not then come forward as a mathematical writer, but was living in the country as rector of Aldbury [Albury]. And my reason is that the new appendix contains those abbreviations for sine *and* tangent *(s and t)* which Oughtred afterwards (1657) used in his work on Trigonometry, and which Briggs did not use, nor any other of their day that I can find.

La ricostruzione di De Morgan venne messa in dubbio nel 1918 da Glaisher [9] che osservò come la stessa notazione per le funzioni trigonometriche era stata utilizzata anche da Richard Norwood nella sua *Trigonometrie* del 1631. Nonostante questo, Glaisher propende per l'attribuzione della *Appendix* ad Oughtred fornendo una serie di motivazioni stringenti, basate su un'attenta lettura del testo. Anzitutto, nell'appendice le moltiplicazioni sono indicate con il simbolo $\times$ ovvero con x, che è proprio la notazione introdotta da Oughtred sia nella *Clavis Mathematicarum* del 1631 sia nel *Circle of Proportion* del 1632. Nel primo testo egli si esprime in questi termini

La moltiplicazione delle specie collega entrambe le grandezze proposte con un punto od il segno $\times$ interposto: oppure più grandezze senza alcun segno, se le grandezze vengono indicate da una sola lettera.[50] (Oughtred, *Clavis*, p.7. In [9], p.161)

La seconda motivazione addotta da Glaisher riguarda la parola *cathetus* per indicare il lato di un triangolo rettangolo perpendicolare al lato assunto come base: cateto traduce il greco $\kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\tau o\varsigma$, perpendicolare, già adoperato da Euclide. Inoltre, nella *Appendix* i vertici dei triangoli rettangoli sono indicati secondo la seguente convenzione

Converrà avere sott'occhio in ogni calcolo un triangolo , descritto secondo questa convenzione: se è un triangolo rettangolo, indichiamolo con le lettere A.B.C: in modo che A sia sempre l'angolo retto; B l'angolo (opposto) alla base B.A e C l'angolo (opposto) al cateto CA. Ma se si tratta di un triangolo scaleno, lo si indichi con le lettere BCD. BD è la base e C l'angolo opposto; da questo vertice partono i lati CB e CD. Il triangolo può essere suddiviso in due triangoli rettangoli ABC ed ADC da un cateto o perpendicolare CA. [51] (*Appendix*, in [9], p.162)

Tale convenzione va confrontata con questo passo della *Trigonometria* (1657) di Oughtred

Un triangolo rettangolo si indica con le lettere ABC in modo che A indichi sempre l'angolo retto, BA la base, CA il cateto, BC l'ipotenusa: B l'angolo alla base, C l'angolo al cateto. Un triangolo scaleno si indica con le lettere BCD in modo che il cateto condotto da C lo divida in due triangoli (rettangoli) aventi il cateto CA in comune.[52] (Oughtred, *Trigonometria*, p.2. In [9], p.163)

[50] Multiplicatio speciosa connectit utramque magnitudinem propositam cum nota in vel $\times$: vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica litera

[51] It will bee convenient in every calculation, to have in your view a triangle, described according to the present occasion: and if it bee a right angled triangle, to note it with the letters A.B.C: so that A may bee always the right angle; B the angle at the Base B. A and C the angle at the Cathetus CA. But if it be an obliquangle triangle, to note it with the letters BCD. BD being the base, and C the angle opposed thereto; the sides whereof shall be CB and CD. for so, out of the angle C. the triangle may be divided by a Cathetus or perpendicular CA into two right angled triangles, ABC & ADC.

[52] Triangulum rectangulum notatur literis ABC, ut A semper sit Angulus Rectus, BA Basis, CA Cathetus, BC Hypotenusa: B angulus ad Basem, C angulus ad Cathetum. Triangulum vero Obliquangulum notetur literis BCD, ut Catheto ex C ducta, in bina Triangula, communem Cathetum CA habentia, dispescatur.

Come si vede, il passo di OUGHTRED è la versione latina del testo inglese dell'*Appendix*. Un terzo indizio è l'uso della parola *ingredient* per indicare gli elementi di un triangolo che entrano in un problema specifico, sia come dati che come incognite da determinare. Anche qui, seguendo l'indagine di GLAISHER sembra che questo uso di *ingredient* sia comune all'*Appendix* ed alla *Trigonometrie* di OUGHTRED. Infine, l'uso di trattini e cerchi nelle figure per indicare i dati e le incognite di un problema, rispettivamente (Figura 3.1). Nell'*Appendix*,

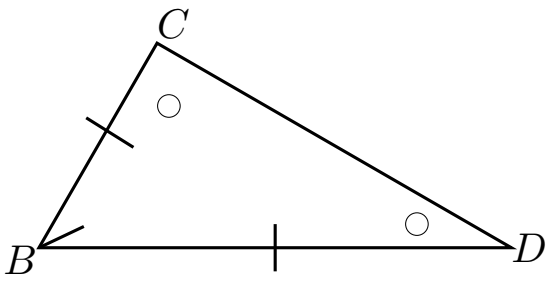

Figura 3.1: Notazioni adoperate nell'*Appendix*. Nel triangolo BCD i trattini indicano i dati del problema (CB, BD e l'angolo in B) mentre i cerchi indicano le incognite da determinare (gli angoli in C e D).

la spiegazione della notazione è la seguente

Descritto così il triangolo, indicate i suoi elementi assegnati con un trattino e gli elementi da trovare con un cerchio. Come nella figura dove, dati l'angolo B ed i due lati BC e CD, occorre trovare l'angolo D compreso tra di loro.[53] (*Appendix*, in [9], p.165)

Nel *Circles of Proportion* OUGHTRED scrive

Quando occorre risolvere un triangolo dato con l'uso della trigonometria, indicate i suoi elementi (lati od angoli) assegnati con una piccola linea che tagli quell'elemento; indicate l'incognita da determinare con un cerchietto.[54] (OUGHTRED, *Circles of Proportion*, p.96. In [9], p.165)

Al di là della somiglianza tra i due passi, va notato che questa notazione fu utilizzata da altri autori oltre ad OUGHTRED, come Richard DELAMAINE nell'Appendice alla *Grammeologia* del 1631 o John WELLS nella *Sciographia* del 1635, ma non è mai stata impiegata da BRIGGS nella *Arithmetica Logarithmica*.

A parte questi dettagli sull'attribuzione, è interessante vedere la forma del metodo radicale qui presentata.

Testo 3.8 (Appendix) cfr. pp.141-143 di [9]. Originale 3.16.

[53] Having thus described your triangle, note the parts thereof given with a right line, & the part sought with a circle. As in the figure we are by the angle B. and the two sides BD and CD to finde out the angle D intercepted bewteene them.

[54] When any triangle is given to be resolved by Trigonometrie, note the parts thereof (either sides or angles) which are given and knowne, with a little line drawne crosse each such part: and note the unknowne part which is sought for with a little circle.

Segue ora il modo di trovare quei seni e logaritmi che non sono presenti esattamente nel canone: il fondamento di questo lavoro è che, dal momento che i seni ed i logaritmi contenuti nel canone sono uguali almeno finché il seno si riduce a 980000 circa ed il logaritmo cresce fino circa a 202000[55]*. Da ciò segue che se riusciamo con un mezzo qualsiasi a ridurre un logaritmo grande in modo da renderlo minore di 202000*[56] *o ad accrescere un seno di per sé piccolo, fino al punto da renderlo maggiore di 980000, possiamo ottenere la differenza da aggiungere o sottrarre più rapidamente, senza il ricorso ad alcuna proporzione. Allo scopo, ho inventato e costruito la seguente Tavola che consiste di due parti; la prima è formata da seni assoluti, la seconda da parti decime e centesime.*

La Tavola

Sin.	*Logarith.*	*Sin.*	*Logarith.*	*Sine.*	*Logarithme*
1	000000	100	4605168	10000	9210337
2	693146	200	5298314	20000	9803483
3	1098612	300	5703780	30000	10308949
4	1386294	400	5991462	40000	10596631
5	1609437	500	6214605	50000	10819774
6	1791758	600	6396925	60000	11002095
7	1945909	700	6551077	70000	11156246
8	2079441	800	6684609	80000	11289778
9	2197223	900	6802391	90000	11407560
10	2302584	1000	6907753	100000	11512921
20	2995730	2000	7600899	200000	12206067
30	3401196	3000	8006365	300000	12611533
40	3688878	4000	8294047	400000	12899215
50	3911021	5000	8517090	500000	13122358
60	4094342	6000	8699511	600000	13304679
70	4248493	7000	8853662	700000	13458830
80	4382025	8000	8987194	800000	13592362
90	4499807	9000	9104976	900000	13710144

Supplemento della Tavola per parti decime e centesime.

Sin.	*Logarith.*	*Sin.*	*Logarith.*	*Sine.*	*Logarithme*
11	95311	17	530628	104	39222
12	182321	18	587786	105	48790
13	262364	19	641853	106	58269
14	336473	101	9951	107	67659
15	405465	102	19803	108	76962
16	470004	103	29560	109	86177

Per trovare il logaritmo di un seno o numero arbitrario con l'ausilio di questa tavola: si moltiplichi il numero dato per quel seno nella prima parte della Tavola

[55] È un refuso tipografico, il numero corretto è 20200

[56] Si veda la nota precedente

che lo avvicina maggiormente a 1000000 e se il prodotto è inferiore a 980000, lo si moltiplichi per una delle parti centesime. (Notate che moltiplicare per la decima o centesima parte non è altro che spostare di una o due posizioni indietro il prodotto formato dall'ultima cifra della parte stessa.) Dopo aver reso il numero assegnato maggiore di 980000, cercatene il logaritmo nel canone, operazione che potrete svolgere con molta facilità tramite la sola aggiunta o sottrazione della differenza, come vi indicherà la ragione. Infine, aggiungete a questo logaritmo trovato nel canone i logaritmi del seno e delle parti per cui lo avete moltiplicato, come riportati nella Tabella collaterale: la somma di tutti questi sarà il logaritmo del seno o numero proposto: a mo' di esempio, voglio determinare il logaritmo di 257.

257	*× 3000*	
771000	*x 12*	*too little.*
1542		
925200	*x 108:*	*yet too little.*
74016		
999216		

In virtù del canone il logaritmo di questo numero si determina a prima vista e vale 784. Aggiungiamo i logaritmi della tabella che corrispondono a 3000, 12, 108 ed otterremo 8266432 come valore vero del logaritmo di 257.

$$\begin{array}{r} 784 \\ 8006365 \\ 182321 \\ 76962 \\ \hline 8266432 \\ \hline \end{array}$$

*(*Appendix, cfr. *pp.141-143 di [9])*

Lo scopo del procedimento è quello di trasformare il numero di cui si cerca il logaritmo neperiano attraverso moltiplicazioni successive che facciano cadere il prodotto nella regione tra 980000 ed 1000000 dove le variazioni dei logaritmi coincidono con quelle dei seni corrispondenti e pertanto il loro valore si determina *at first view.* I logaritmi riportati nella tavola ausiliaria *non* sono però neperiani, in quanto il logaritmo di 1 è 0. Chiamiamo [9] λ la funzione logaritmo riportata nella tavola. Ricostruiamo dunque l'algoritmo illustrato dall'esempio proposto, dove si vuol trovare $\mathrm{nl}\,(257)$. Dapprima si forma il prodotto

$$257 \times 3000 \times 1.2 \times 1.08 = 999216 :$$

Infatti, moltiplicato $257 \times 3000 = 771000$ per 12, il risultato viene incolonnato in modo si moltiplichi effettivamente per 1.2 e lo stesso per 108. Si asserisce che

$$\mathrm{nl}\,(257) = \mathrm{nl}\,(999216) + \lambda(3000) + \lambda(1.2) + \lambda(1.08).$$

i logaritmi nel supplemento alla tabella, tengono in considerazione il valore effettivo dell'argomento: $\lambda(11)$,...$\lambda(19)$ sono inferiori al valore di $\lambda(2)$ nella tabella

principale ed indicano $\lambda(1.1)$,...$\lambda(1.9)$. Ora, dalla regola del prodotto (2.4) valida per la funzione nl

$$\mathrm{nl}\,(x) + \mathrm{nl}\,(y) = \mathrm{nl}\,(xy) + \mathrm{nl}\,(1)\,,$$

seguw che, se $b = a\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, allora

$$\mathrm{nl}\,(a) = \mathrm{nl}\,(b) + [\mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(\alpha_1)] + [\mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(\alpha_2)] + [\mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(\alpha_3)]$$

che è compatibile con l'algoritmo dell'*Appendix* se

$$\lambda(x) := \mathrm{nl}\,(1) - \mathrm{nl}\,(x)\,. \tag{3.4}$$

Pertanto, possiamo concludere con Glaisher che nell'*Appendix* è utilizzato il metodo radicale così come un metodo per eliminare lo scomodo addendo $\mathrm{nl}\,(1)$ dalle formule dei prodotti, dal momento che, dalla definizione di λ, si ricava

$$\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)\,.$$

Il confronto tra le equazioni (2.7) e (3.4) mostra che i logaritmi nell'appendice sono in realtà $\lambda(x) = r\ln(x)$ così che si può affermare, con Glaisher, che l'*Appendix* contiene la prima vera tavola di logaritmi naturali o, come diciamo oggi, nella base e. In questo senso, l'anonimo autore—William Oughtred se diamo credito alla ricostruzione esposta sopra—avrebbe anticipato di un anno John Speidell che pubblicò nel 1619 l'opera *New Logarithmes* dove egli emenda i logaritmi di Nepero per facilitarne l'impiego a persone non avvezze a maneggiare numeri negativi. Nel frontespizio di quest'opera leggiamo [10]

New Logarithmes.
The First invention whereof, was, by the Honourable Lo: Iohn Nepair Baron of Marchiston, and printed at Edinburg in Scotland, Anno: 1614. In whose use was and is required the knowledge of Algebraicall Addition and Subtraction, according to + and -
These being extracted from and out of them (they being first ouerseene, corrected, and amended) require not at all any skill in Algebra, or Cossike numbers, but may be used by euery one that can onely adde and subtract, in whole numbers, according to the common or vulgar Arithmeticke, without any consideration or respect of + and -

(*cfr.* p. 36 di [10])

Il procedimento di Speidell è molto semplice in quanto egli sottrae $\mathrm{nl}\,(x)$ da 10^8 ed omette le ultime due cifre decimali. Se si tiene presente l'equazione (2.7) nel caso $r = 10^7$ si vede che il logaritmo di Speidell $\mathrm{sl}\,(x)$ di un numero x è

$$\mathrm{sl}\,(x) = 10^7(10 + \ln(x'))$$

dove $x' = x/10^7$. È però improprio vedere i logaritmi di Speidell come logaritmi in una base fissa. Va poi detto che l'opera di Speidell non sembra avere molto influenzato la comunità scientifica, a dispetto delle otto edizioni che si sono succedute fino al 1628.

Se l'*Appendix* di OUGHTRED può aver fornito l'ispirazione a BRIGGS nell'elaborazione del metodo radicale, la fonte di parte degli schemi alle differenze è rintracciabile negli scritti di Thomas HARRIOT (1560-1621) cui dobbiamo, tra l'altro, l'introduzione dei simboli di $>$ e $<$ per maggiore o minore. L'opera di HARRIOT non esercitò in genere una grande influenza, soprattutto per le travagliate vicende politiche degli ultimi anni di ELISABETTA I. Egli aveva accompagnato come consulente scientifico Sir Walter RALEIGH nella spedizione in Virginia e quando quest'ultimo, perso il favore della regina, venne impiccato, HARRIOT godette la protezione di Henry PERCY conte di Northumberland che gli garantì una ragguardevole pensione annua di 300 sterline fino a quando il conte venne imprigionato nella torre di Londra dal successore di ELISABETTA, GIACOMO I. Il deteriorarsi delle condizioni di salute impedì poi ad HARRIOT di curare la pubblicazione dei risultati ottenuti, che rimasero sotto forma di manoscritto. La formula di interpolazione utilizzata da HARRIOT è esprimibile, in formalismo moderno, come (§1.5 di [7])

$$f\left(x-\frac{k}{n}\right)=f(x)+\frac{k}{n}\Delta f(x)+\frac{1}{2!}(\frac{k}{n})(\frac{k}{n}-1)\Delta^2 f(x)+...+\frac{1}{5!}(\frac{k}{n})(\frac{k}{n}-1)\cdots(\frac{k}{n}-4)\Delta^5 f(x)\,.$$

Di questa formula egli fornisce applicazioni per produrre delle subtabulazioni. Non vi è traccia di relazioni dirette tra HARRIOT e BRIGGS, considerato il fatto che quando quest'ultimo giunse ad Oxford, la salute di HARRIOT era già compromessa. Non vi sono dunque elementi sufficienti per ipotizzare una dipendenza di BRIGGS da HARRIOT e dobbiamo limitarci a prendere atto dell'esistenza di procedimenti numerici simili portati avanti pressoché in parallelo.

3.9 Testi originali

Testo 3.9 [BRIGGS, Arithmetica Logarithmica, Cap. V.]in [1], pp.5-13,5-14
Ponamus omnes quotquot sunt numeros, in unica serie numerum ab unitate continue proportionalium esse descriptos, & Indices iisdem appositos esse hos ipsos quos quaerimus Logarithmos atque ex hac infinita serie, sumantur duo numeri, quorum primus sit Denarius, cuius Index est 1,00000,00000,0000: reliquus sit Binarius (vel alius quilibet) cuius Index ignoratur & quaeritur. Praeter hanc primam seriem quam appellamus infinitam, e qua desumpti sunt hi duo numeri, secunda series per tertium Lemma institui debet per continuam moltiplicationem Binarii in seipsum & in factos a seipso. Et continuanda est haec series, donec Index ultimi facti, aequaetur Denarii Indici dato in prima illa serie infinita. Verum ut insuperabile illud tot multiplicationum taedium vitetur, plurimis intermediis numeris omissis, secundum continue proportionalium leges, per quartum Lemma huius capitis, praecipui facti quaerantur, una cum eorum Indicibus, donec ultimus factus quaesitus cum suo indice inventus fuerit. Quem integrum adscribere non erit necessarium, sed tantum aliquot notas versus sinistram, amputatis & abjectis reliquis: ita tamen ut per quintum Lemma, notus sit numerus omnium notarum, quibus totus factus, si integer poneretur describi

debuit. Ductus igitur binarius in seipsum facit quatuor, cuius Index 2. Quaternarius in seipsum facit 16, cuius Index 4. 16 item in seipsum facit 256, cuius index 8, deinde hic factus ductus in 4 facit 1024, cuius Index 10 aequatur Indicibus facentium. Notae autem in hoc facto ultimo sunt 4 quae omnia sunt manifestissima per quartum & quintum Lemmata proxime praecedentia. ut hic vides:

1	*0*	
2	*1*	
4	*2*	*1*
16	*4*	*2 Tetras prima*
256	*8*	*3*
1024	*10*	*4*
10,48576	*20*	*7*
109,95116,27776	*40*	*13 Tetras secunda*
12089,25819,61463	*80*	*25*
12676,50600,22823	*100*	*31*
16069,38044,25899	*200*	*61*
25822,49878,08685	*400*	*121 Tetras tertia*
66680,14432,87940	*800*	*241*
10715,08607,18618	*1000*	*302*
11481,30695,27407	*2000*	*603*
13182,04093,43051	*4000*	*1205 Tetras quarta*
17376,62031,93695	*8000*	*2409*
19950,63116,87912	*10000*	*3011*
	Indices	*Numerus notarum*

Isti autem quatuor numeri 4.16.256.1024. constituunt Tetradem primam. Deinde alia Tetras instituenda est, cuius primus numerus sit multiplicatione ultimi numeri Tetradis praecedentis in seipsum. Secundus item est quadratus primi, & tertius secundi; quartus autem sit per multiplicationem primi, huius Tetradis in tertium. Atque horum quatuor Indices sunt 20.40.80.100. Sunt autem in horum primo notae septem, in secundo 13, in tertio 25, in quarto 31. Eodem modo reliquas Tetradas absolvo donec ultimae Tetradis numerus quartus habeat indicem 1,00000,00000,0000. Numerus autem notarum in eodem quarto erit 30102,99956,6399. Atque ad hunc modum habemus circiter quinquaginta septem praecipuos numeros in serie secunda ponendos. Horum primus, qui latus est et radix reliquorum, est binarius. Ultimus autem habet eundem Indicem quem in prima illa serie infinita Denario assignavimus.

Tertia series per secundum lemma describi potuisset integra, si haberemus ultimum factum secundae seriei, qui omnino aequalis est ultimo facto huius tertiae seriei per primum Lemma. Numerus autem notarum in hoc ultimo utriusque seriei notus est, idemque Indicem huius facti in tertia serie, & Binarii in illa prima serie infinita, superat tantum unitatem. Nam ut hunc Indicem in tertia serie inveniamus, continue dividendus est ultimus factus per Denarium datum numerum, cuius Index etiam datus fuit. Quod si denarius quemlibet diviserit,

Quotus erit pars decima divisi, id est idem plane cum diviso, dempta tamen unica nota (ut 4357 divisi per 10 dant quotum 435) idcirco numerus quotorum vel divisionum, unitate tantum minor erit numero notarum in diviso, quotorum autem numerus ostendit distantiam divisi ab Unitate, vel eiusdem divisi Indicem in hac tertia serie: qui idem est cum illo Indice in prima illa serie infinita, qui lateri secundae seriei, id est Binario debet adscribi. Quique est idem ille quem querimus Binarii Logarithmus, nempe 30102,99956,6398.

Testo 3.10 [Briggs, Arithmetica Logarithmica.]Cap. VI, in [1], pp.6-11,6-12.

	D Numeri continue Medij Denarium & Unitatem. *10*	*E* Logarithmi Rationales *1,000*
1	*31622,77660,16837,93319,98893,54*	*0,50*
2	*17782,79410,03892,28011,97304,13*	*0,25*
3	*13335,21432,16332,40256,65389,308*	*0,125*
4	*11547,81984,68945,81796,61918,213*	*0,0625*
5	*10746,07828,32131,74972,13817,6538*	*0,03125*
6	*10366,32928,43769,79972,90627,3131*	*0,015625*
7	*10181,51721,71818,18414,73723,8144*	*0,00781,25*
-	———————-	———————
-	———————-	———————
-	———————-	———————
50	*10000,00000,00000,204510638912051946*	*0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053*
51	*10000,00000,00000,102255319456025921* ***L***	*0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526*
52	*10000,00000,00000,051127659728012947* ***M***	*0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263*
53	*10000,00000,00000,025563829864006470* ***N***	*0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631*
54	*10000,00000,00000,012781914932003235* ***P***	*0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815*

Quaerantur autem huiusmodi Continue Medii inter Denarium & Unitatem, quorum primus erit[57] ℓ.10, nempe 3<u>1622776601683793319988935 4</u>, id est latus denarii, vel medius proportionalis inter 10 & 1. Deinde quaero latus lateris nuperrime inventi, id est $\ell\ell$. .10: 1<u>7782794100389228011973041 3</u>, tertio pergo investigare latus istius lateris, $\ell\ell\ell$. .10: 1<u>3335214321633240256653893 1</u>, eodemque servato operationis modo progredior, donec tota series continue mediorum, Una cum Denario, contineat numeros distinctos quinquaginta quinque, quos vides signari litera D: quibus e regione locantur logarithmi rationales iisdem convenientes, signati E.

Numerorum continue mediorum minimus est

$10000,00000,00000,01278,19149,32003,23441,65$, huius Logarithmus bisecando inventus est $0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815,83$. Patuit enim per 2. ax. c. 2 Logarithmorum Lateris, dimidium esse illius Logarithmi qui quadrato tribuitur[58], quia ex multiplicatione lateris in seipsum sit Quadratus. & idcirco quilibet horum logarithmorum duplus est proxime minoris. Cum autem notae significativae, quae unitati post quindecim cyphras

[57] Si ricordi che $\ell.n \equiv \sqrt{n}$

[58] Si tratta della regola $\mathrm{bl}\,(xy) = \mathrm{bl}\,(x) + \mathrm{bl}\,(y)$.

sunt adjectae, sint dimidiae notarum proxime praecedentium; tam in continue mediis, quam in Logarithmis: ipsi Logarithmi proportionem eandem decrescendo servare videntur, quam illi numeri quibus sunt adjuncti. & idcirco, si qui numeri, eo usque decreverint, ut post unitatem cyphrae quindecim in proximo locatae fuerint, reliquae notae significativae post cyphras adjectae, veros Logarithmos vel veris proximos nobis exhibebunt, per proportionis illam auream regulam quae omnia ut fiant magis manifesta, numeros aliquot continue proportionales una cum suis Logarithmis adscribere visum est, ex illis qui sunt proximi numeris LMN & P: ea inter proximos servata ratione, quae est Unitatis ad P, minimum e continue mediis, qui omnes fere crescunt aequaliter, pro ratione distantiae inter se quod eorum etiam logarithmi ex definitionis vi facere tenentur. Idcirco, si contigerit dati numerum adeo exiguum, ut intra Unitatem & numerum L locati debeat, licet non sit ullo modo censendus in numero proportionalium erit tamen eius Logarithmus inventus facilis, per proportionalis regulam. Cum in his numeris adeo exiguis crescant aut decrescant Logarithmi pro ratione notarum significativarum, quae proximo post cyphras loco sitae sunt. Ut sit datus numerus X 10000,00000,00000,01. Aio hos quatuor numeros esse proportionales

$$\left.\begin{array}{ll} 12781, 91493, 20032, 34416, 5 & \text{Notae significativae post quindecim cyphras} \\ 1 - - - - - - - - - - - - - - & \text{unitati adijciendae} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 55511, 15123, 12578, 27021, 18158 & \text{Notae significativae post Characteristica (quae est cyphra)} \\ 43429, 44819, 03251, 804 & \text{\& alias sexdecim cyphras in Logarithmis scribendae.} \end{array}\right\}$$

	Numeri continue proportionales supra unitatem	Logarithmi
	1 Unitas	0,00000
P	10000,00000,00000,01278,19149,32003,23442	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,12
N	10000,00000,00000,02556,38298,64006,47047	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,24
	10000,00000,00000,03834,57447,96009,70815	0,00000,00000,00000,16653,34536,93773,48106,35
M	10000,00000,00000,05112,76597,28012,94747	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47
	1,0000,00000,00000,06390,95746,60016,18842	0,00000,00000,00000,27755,57561,56289,13510,59
	1,0000,00000,00000,07669,14895,92019,43101	0,00000,00000,00000,33306,69703,87546,96212,71
	1,0000,00000,00000,08947,34045,24022,67523	0,00000,00000,00000,38857,80586,18804,78914,83
L	10000,00000,00000,10225,53194,56025,92108	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,95
X	10000,00000,00000,01	0,00000,00000,00000,04342,94481,90325,1804

Est igitur numeri X dati Logarithmus 0,00000,00000,00000,04342,94481,90325,1804. Horum numerorum proportionalium prima nota est unitas, reliquae omnes notae subsequentes, tam cyphrae quam significativae, exprimunt nobis Numeratorem partium unitati adijciendarum, quarum Denominator est illa ipsa unitas, & cyphrae, reliquis illis notis numero aequales. Numerus X non est inter hos proportionales numerandus: eius tamen Logarithmum diligentius exprimendum putavi; quia Logarithmi, qui per proportionis regulam quaerendi sunt, huius ope facilius inveniantur quam alterius cujusvis. Cum reliqui horum proportionalium Logarithmi, nihil possint sine multiplicatione & divisione, hic autem sola multiplicatione totum negotium absolvit.

Testo 3.11 [Briggs, Arithmetica Logarithmica]Cap. VII, in [1], pp.7-8,7-9. Inter datum numerum (cuius Logarithmus quaeritur) & unitatem, quaerantur continue medij, (ut in superiore capite) donec tandem inveniamus numerum adeo exiguum, ut Unitas praecedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notae significativae sequantur. Deinde (ut ad finem precedentis capitis ostendimus) hae notae significativae, per proportionis regulam dabunt nobis quaesitum logarithmum, illius numeri medii ultimo inventi.

In priore autem illa continue mediorum serie, a primi numeri Logarithmo dato, bisecando devenimus ad ultimi medii Logarithmorum quaesitum: hic contra, duplicando ultimi medii Logarithmorum inventum, penultimi Logarithmum assequemur: eodemque modo reliquorum omnium; donec tandem dati primi numeri quaesitum Logarithmum nacti simus. (...)

Atque his modus etiam in se habet molestiae plus satis, nos autem eam conabimur aliqua ex parte minuere. Cum enim antea accepimus, in continue proportionalibus, datis duorum quorumlibet Logarithmis, posse alterius cuiusvis, cuius situs a datis notus erit, Logarithmum inveniri: per Lemma I. cap. 1 & Logarithmum divisi, aequari Logarithmis divisoris & quoti, per 3. ax. cap. 3 poterimus, loco dati numeri, alium substituere commodiorem, cuius Logarithmus inventus, dati etiam numeri Logarithmorum ostendet ad hunc modum. Multiplicetur datus numerus in seipsum, & in factos a seipso, donec inveniatur numerus A, cuius prima nota versus sinistram sit Unitas, quam proximo in loco sequatur cyphra una aut plures: deinde ille numerus dividatur, per numerum qui describitur per unitatis notam & tot cyphras quot fuerint notae in dividendo praeter Unitatem: tandemque inter quotum hunc & Unitatem quaerantur numeri continue medij, donec ad illos terminos pervenerimus, quos supra assignavimus, iuxta numerum L. Isti autem medii sunt & numero pauciores, & inventu faciliores, quam illi qui quaerabantur inter datum numerum 2 & Unitatem. Quae omnia sunt exemplo illustranda. Quaerendus esto Logarithmum Binarii: fiat per multiplicationiem Binarii, series continue proportionalium donec inveniatur 1024 . A si dividatur per 1000 .B. quotus erit 1$\underline{024}$, cuius Logarithmus ubi inventus fuerit, additus Logarithmo divisoris, dabit Logarithmum numeri A divisi 1024. per 3 ax. cap. 3 huius autem Logarithmi pars decima per Lemma 1. cap. 1 erit Logarithmus Binarii quaesitus.

Quaerantur idcirco latus quoti inventi, reliquique; continue medij, usque dum pervenerimus ad quadragesimum septimum medium, inter datum quotorum & Unitatem qui est 1,00000,00000,00000,016851605705394977 qui cum intra limites superius constitutos iuxta L situs sit, eius Logarithmus per auream regulam invenitur 0,00000,00000,00000,07318,55936,90623,9336.

Hic habemus aliquot e continue mediis inter Unitatem & 1$\underline{024}$, totus eorum numerus est 47, quorum minimus & unitati proximus sit primus. Huius Logarithmus invenitur eo modo qui traditur ad finem sexti Capitis. Reliquos vero inveniemus duplicando hunc inventum, reliquosque per continuam duplicationem inventos, donec ad ipsius quoti 1$\underline{024}$. Logarithmum perventum fuerit vel, si visum fuerit, omissis aliquot intermedij, remotioris alicuius Logarithmum quaerere; fiat series numerorum ab unitate continue proportionalium in ratione dupla, quibus adjungantur Indices vulgares & sumatur numerus, situs e regione Indicis illius, qui aequatur numero intervallorum

inter datum Logarithmum & quaesitum, is numerus multiplicet datum Logarithmum; factus erit Logarithmus quesitus. Ut si proximus quaeratur Logarithmus (quia unicum est intervallum) binarius multiplicet; si secundus a dato quaternarius; si decimus a dato, multiplicet 1024, quia huius numeri Index est 10: si quadragesimus septimus a dato, factor erit 140737488355328.

Testo 3.12 /Briggs, Arithmetica Logarithmica, Cap. VIII/In [1], pp.8-9

38	*10000,15116,46599,90567,29504,88*	$1 + A_9$
	15116,58025,28288,79823,97	$A_8/2$
	11425,54992,70108,02	B_9
†	*11425,54992,70108,02*	$B_8/4$
	17271,19788,93	C_9
	17271,65478,36	$C_8/8$
	45689,43	D_9
	45691,50	$D_8/16$
	2,07	E_9
	2,07	$E_8/32$
37	*65*	$E_{10}/32$
	2855,589	$D_9/16$
	2855,524	D_{10}
	2158,89973,616	$C_9/8$
	2158,87118,092	C_{10}
	2856,34430,37579,775	$B_9/4$
	2856,32271,50461,683	B_{10}
	7558,23299,95283,64752,440	$A_9/2$
	7558,20443,63012,14290,767	A_{10}
	10000,07558,20443,63012,14290,767	$1 + A_{10}$

Uti in exemplo adscripto videmus, in quo numeri continue Medij, istas nobis per Divisionem & Subductionem ministrant Differentias, donec perventum sit ad †. Postea vero, hae Differentiae pariunt ipsos continue medios: nam 6$\underline{5}$, pars tricesima secunda numeri E 207, ablata e numero 285558$\underline{9}$, parte decima sexta numeri D 4568943, relinquit 285552$\underline{4}$ numerum D, vel differentiam quartam. Eadem haec differentia quarta D, ablata e parte octava C prioris, relinquit ipsam Differentiam tertiam C, quae ablata e quadrante superioris B, relinquit ipsam B. Atque eadem B, ablata e semisse prioris A, relinquit ipsam A quae adjecta Unitati, est medius quaesitus 10000, 07558, 20443, 63012, 14290, 760. Eodem modo reliquos omnes Medios subsequentes per hujusmodi Differentias inveniemus, progrediendo donec tandem omnes differentiae paulatim deficiant praeter primas, quae cum reliquae defecerint, omnino aequabuntur semissibus primarum praecedentium. Reliqua vero sunt peragenda per proportionalis regulam: ut supra.

Testo 3.13 /Briggs, Arithmetica Logarithmica, *Cap. IX.*/p.9-5 di [1]. Post inventos Logarithmos horum numerorum 1.2.3.5.10 & per 1.& 2. ax. cap. 2.

omnium ex mutua multiplicatione vel divisione provenientium: resta ut reliquorum primorum Logarithmos quaeramus, quorum investigatio fere erit quae antea, aliquanto tamen facilior. Sumantur enim duo numeri compositi, quorum maior minorem unitate tantum superat; & sit primus, factus a dato (cujus Logarithmus quaeritur) ducto vel in seipsum, vel in numerum cuius Logarithmus datus erit: secundi vero Logarithmus sit datus. Atque ut huiusmodi duos compositos facilius consequamur, sumatur primus ille cuius Logarithmus quaeritur, cum duobus utrinque proximis, qui semper sunt compositi. Vel loco primi, sumatur multiplus ejusdem, cum duobus utrinque, vel ex altera parte proximis, horum medius in seipsum ductus, facit numerum unitate supearantem factum a circumpositis, per 5. p.2 lib Eucl. Factus autem minor majorem dividat, & per continue medios inter quotum & Unitatem, quaeratur Logarithmus quoti, ut antea Capite 7 ostendimus. Exempli gratia: Quadratus Septenarii (cujus Logarithmus quaeritur) 49 in seipsum ductus facit 2401; factus autem ab utrinque proximis 48 & 50 est 2400. Hic si majorem dividat, quotus erit $1\underline{00041/23}$ vel $1\underline{00041666666666666667}$, inter quem et Unitatem, minimus quadraginta quatuor Mediorum est

10000,00000,00000,00236,79824,90433,36405, cujus Logarithmus

0,00000,00000,00000,01028,40172,88387,29715, qui quadragies quater duplicatus, vel ductus in 17592186044416 dabit

0.00018,09183,45421,30 Logarithmum quoti $1\underline{00041666666666666667}$, qui additus Logarithmo Divisoris 2400, dabit Logarithmum Divisi 2401, cuius pars quarta est Logarithmus Septenarii quaesitus.

Testo 3.14 (Briggs, Arithmetica Logarithmica Cap. XIV) p.14-6 di [1]. Ostendimus Cap. XI quomodo numerus inter Chiliadas repertus, per partem proportionalem augeri possit, ut vix errori sit locus intra locum duodecimum[59]. Nunc ostendam quomodo ope huius in proximo sequentis tabellae, per solam subductionem & multiplicationem numerus verus quaesitus inveniri possit: si modo sit numerus rationalis, & quatuordecim aut paucioribus notis describi poterit.

Numeri qui hac tabella continentur, distinguntur per Novenarios. Qui sunt a sinistris, sunt Unitates & unitatis aliquot particulae: a dextris e regione siti sunt eorum Logarithmi. Primi novem sunt Unitates, & signantur litera A: proximi novem signati litera B, sunt Unitates & unitatum partes decimae; ut $1\underline{1}$, $1\underline{2}$, $1\underline{3}$, &c. Proximi novem signati litera C sunt Unitates & centesimae. Reliquae Novenarii deinceps similiter, D millesimas adijciunt unitati. E decies millesimas, &c. Horum ope, dato Logarithmo invenitur numerus conveniens absolutus ad hunc modum. Esto datus Logarithmus 3,66067,57883,3852. Ab hoc (ubi Characteristicam deposuerit) Logarithmus Ternarii 0,47712,12547,19662, e primo Novenario desumptus auferatur, restabit 0,18355,45336,18858: a quo auferri poterit Logarithmus $1\underline{4}$ quem tabella haec exhibet in secundo Novenario, deinde in proximo Novenario Logarithmus $1\underline{09}$ auferendus est, & restabit nihil. Aio continue factus

[59] Nell'edizione di Vlacq, che ha lavorato con due cifre decimali in meno di Briggs, si parla di *locum decimum*.

ab his tribus 3, 1$\underline{4}$, 1$\underline{09}$, nempe 4$\underline{578}$ esse numerum quaesitum. Tota operatio sic se habet.

0,66067,57883,3852	*logarithmus datus*	1$\underline{4}$	*multiplicandus*
0,47712,12547,19662	*- - - 3*	*3*	*multiplicator*
0,18355,45336,18858	*reliquus*	4$\underline{2}$	*factus*
0,14612,80356,78238	- - -1$\underline{4}$	4$\underline{2}$	*multiplicandus*
0,03742,64979,40620	*reliquus*	1$\underline{09}$	*multiplicator*
0,03742,64979,40622	- - -1$\underline{09}$	*378*	
0,00000,00000,00000		*42*	
		4$\underline{578}$	*factus*

Testo 3.15 [Briggs, Arithmetica Logarithmica, Cap. XIV.] pp.14-7, 14-8 di [1]. Superius ostendimus, quomodo dato Logarithmo numerus conveniens absolutus sit inveniendus; per subductionem Logarithmorum in praecedente tabula comprehensorum & continuam multiplicationem numerorum e regione positorum: hic contra ostendendum, quomodo dato numero Logarithmus conveniens sit quaerendus; per dati divisionem, & Logarithmorum quotis respondentium additionem. Si datus numerus quinque tantum notis scribatur, eius Logarithmus inter Chiliadas descriptur habetur. Sin pluribus; sumatur numerus primis quatuor tantum notis comprehensus (...). Is datum numerum ita dividat, ut postquam divisorem semel subduxeris e dividendo, factus a divisore ducto in quotum inventum, additur semper divisori: quotorum autem particularium in tabella reperti Logarithmi, addantur divisoris primi Logarithmo: totus erit dati numeri quaesitus Log. Ut si datus numerus 3041851528656, hunc numerum divido per 3041, quem subduco e numero dividendo, adnotans in quoto 1: restabit 851528656. Deinde pergo & post tres cyphras pono 2 in quoto, & factum a 2 in datum divisorem subduco a dividendo, subscribens reliquum. Postea eundem factum addo divisori & per eundem auctum, reliquum divido; factum auferens e dividendo, & eundem addens divisori: ut antea Totius operationis modum hic cernere poteris

A.	*3041— divisor datus* *6082 factus primus*	*3041851528656 (100028* *3041*
C.	*30416082 divisor auctus* *243328656 factus secundus*	*851528656* *6082— factus primus*
E.	*3041851528656 divisor auctus*	*243328656* *243328656 factus secundus*
		Logarithmi
A.	*Divisoris 3041*	*348301642014413*
B.	*Quoti secundi 10002*	*0000086850211648*
C.	*Divisoris aucti*	*3483103270355778*
D.	*Quoti Tertij 100008*	*0000034742168882*
E.	*Divisoris aucti denuo*	*3483138012524660*

Horum omnium demostratio petenda est e capite secundo. Sunt enim Divisor datus A, & Quotus secundus B, factores Divisoris aucti C: qui alius est a

divisore dato, & non injuria appellari poterit divisor secundus. Ejusque Logarithmus aequatur Logarithmis A & B. Per 3 ax. cap 2 deinde secundus divisor idem negotium suscipit, dividens totum datum numerum, & inveniens quotum tertium 100008. Nam licet ultima quoti nota multiplicet tantummodo, & factus ad eodem, solus auferatur e reliquo, tamen intelligimus factum ab unitatis nota etiam auferri, in ea divisione quae hujus ultimi quoti inventionem praecessit: idcirco si hujus ultimi quoti D Logarithmus, addatur Logarithmo divisoris secundi C, totus erit Logarithmus divisoris denuo aucti E: id est ipsius dividendi. Progreditur enim haec divisio, ejusque augendo divisorem, donec accessione factorum tandem fiat aequalis ipsi dividendo dato, cuius Logarithmus quaeritur.

Testo 3.16 (Appendix) cfr. pp.141-143 di [9].
Now followeth the way of finding out such sines and logarithmes, as are not in the canon precisely to be had: the ground of which worke is, because the differences of the sines and logarithmes in this canon, are equall so farre untill the sine decreases about 980000. and the logarithme increase about 202000[60]. Wherefore if wee shall by any art bring the logarithme, being it selfe great, that it may be less then 202000[61], or the sine being it self little, that it may bee greater then 980000. we may have the difference to bee added, or subtracted, most readily without any proportion. For the performance whereof, I have invented and framed this Table following: which consisteth of two parts; the former being of absolute sines, the latter of tenth and hundreth parts.

The Table

Sin.	*Logarith.*	*Sin.*	*Logarith.*	*Sine.*	*Logarithme*
1	*000000*	*100*	*4605168*	*10000*	*9210337*
2	*693146*	*200*	*5298314*	*20000*	*9803483*
3	*1098612*	*300*	*5703780*	*30000*	*10308949*
4	*1386294*	*400*	*5991462*	*40000*	*10596631*
5	*1609437*	*500*	*6214605*	*50000*	*10819774*
6	*1791758*	*600*	*6396925*	*60000*	*11002095*
7	*1945909*	*700*	*6551077*	*70000*	*11156246*
8	*2079441*	*800*	*6684609*	*80000*	*11289778*
9	*2197223*	*900*	*6802391*	*90000*	*11407560*
10	*2302584*	*1000*	*6907753*	*100000*	*11512921*
20	*2995730*	*2000*	*7600899*	*200000*	*12206067*
30	*3401196*	*3000*	*8006365*	*300000*	*12611533*
40	*3688878*	*4000*	*8294047*	*400000*	*12899215*
50	*3911021*	*5000*	*8517090*	*500000*	*13122358*
60	*4094342*	*6000*	*8699511*	*600000*	*13304679*
70	*4248493*	*7000*	*8853662*	*700000*	*13458830*
80	*4382025*	*8000*	*8987194*	*800000*	*13592362*
90	*4499807*	*9000*	*9104976*	*900000*	*13710144*

[60] È un refuso tipografico, il numero corretto è 20200
[61] Si veda la nota precedente

The supplement of the Table for tenth and hundreth parts.

Sin.	*Logarith.*	*Sin.*	*Logarith.*	*Sine.*	*Logarithme*
11	*95311*	*17*	*530628*	*104*	*39222*
12	*182321*	*18*	*587786*	*105*	*48790*
13	*262364*	*19*	*641853*	*106*	*58269*
14	*336473*	*101*	*9951*	*107*	*67659*
15	*405465*	*102*	*19803*	*108*	*76962*
16	*470004*	*103*	*29560*	*109*	*86177*

To finde out the Logarithme of any sine or number whatsoever by helpe of this Table. Multiply the number given by that sine in the former part of this Table which you find will bring it nerest unto 1000000 and if you finde the product lesse, then 980000. multiply the same product by one of the hunderd parts. (Note that the multiplying by tenths and hundreth parts, is nothing else but to set the product made by the latter figure of the same partes one or two places backward.) Then having thus brought your number given to exceed 980000. seeke the logarithme of it in the canon, which you shal most easily finde onely by adding or subtracting the difference, as your own reason shal direct you. Lastly, to this Logarithme found out by the canon, adde the logarithms of the Table collaterall to the sine & parts wherewith you multiplyed, and the summe of all shall be the logarithme of the sine or number proposed: as for example, I would have the logarithme of 257.

257	× *3000*	
771000	*x 12*	*too little.*
1542		
925200	*x 108:*	*yet too little.*
74016		
999216		

the logarithme of this by the canon at the first view appareth to be 784. unto this adde the logarithmes of the table colaterall to 3000. & 12. & 108. and so shal you have 8266432 for the true logarithme of 257.

784
8006365
182321
76962
8266432

Bibliografia

[1] I. Bruce: Briggs' Arithmetica Logarithmica, Introductory Chapter. Appunti disponibili sul sito web http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html (2006).

[2] J.W.L. Glaisher: On early tables of logarithms and the early history of logarithms. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **48**, 151–192, (1920).

[3] H. Briggs: *Arithmetica Logarithmica*, Editio Secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum (1628). Ristampa anastatica, Georg Olms, Hildesheim (1976).

[4] F. Cajori: *History of Mathematical Notations I. Notations in Elementary Mathematics.* Open Court, La Salle, Illinois (U.S.A.), (1974); ristampa dell'originale pubblicato nel 1928 dalla stessa casa editrice.

[5] D.T. Whiteside: Patterns of mathematical thought in the later Seventeenth Century. *Arch. Hist. Exact Sciences* **1**, 179–388, (1960-1962).

[6] D.T. Whiteside: Henry Briggs: The binomial theorem anticipated. *Math. Gazette* **45**, 9–12, (1964).

[7] H.H. Goldstine: *A History of Numerical Analysis From the 16th Through the 19th Century.* Springer, New-York, (1977).

[8] F. Cajori: *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments.* Astragal, Mendham, New Jersey (U.S.A.), (1994); ristampa dell'originale pubblicato nel 1910 dalla Chelsea Publishing Company, New York.

[9] J.W.L. Glaisher: The earliest use of the radix method for calculating logarithms, with historical notices relating to the contributions of Oughtred and others to mathematical notation. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **46**, 125–197, (1918).

[10] F. Cajori: Notes on the History of Logarithms, *Abhand. Gesch. Math.*, 33–39, (1899).

Capitolo 4

Fine dell'età pioneristica

4.1 Keplero e la diffusione dei logaritmi in Germania

I logaritmi si diffusero rapidamente in tutta Europa in quanto venivano a risolvere seri problemi di calcolo in astronomia. Tra i più entusiasti sostenitori dell'opera di Nepero troviamo l'astronomo Johannes Kepler (Keplero 1571-1630) che, ignaro della morte di Nepero, gli indirizzò una lettera elogiativa datata agosto 1619. Oltre ad essere un utente di tavole logaritmiche, Keplero scrisse sui logaritmi, componendo le *Chiliades Logarithmorum* (Marburgo, 1624), che contiene 1036 logaritmi di numeri N nella forma $10^5 \ln(10^5/N)$ ed il *Supplementum chiliadis Logarithmorum* (Marburgo, 1625) che contiene esempi illustrativi del metodo. Le *Tabulae Rudolphinae* (Ulm, 1627) contengono due tavole logaritmiche: la prima—*Heptacosias logarithmorum logisticorum*—ha 700 logaritmi che si possono esprimere come $-\ln(x)$, con argomento x in forma sessagesimale. La seconda tavola è il *Canon Logaritmhorum et Antilogarithmorum ad Singula semicirculi Scrupula* che riporta i logaritmi $-10^5 \ln(\sin(x))$, ad intervalli di 1' per x.

Nella lettera a Nepero, Keplero confida di aver utilizzato da tempo un procedimento che conduceva a risultati coerenti con quelli ottenuti da Nepero anche se sotto l'ipotesi restrittiva che l'argomento del logaritmo fosse lontano dall'angolo retto: *Non funziona se non quando l'arco differisce sensibilmente da quello retto.*[1]:

Quell'esercizio di numeri svolto da te in generale e di cui io utilizzavo già fa molti anni una piccola parte, mi ero proposto di farlo diventare parte di tavole.[2] (*cfr.* p. 130 di [1])

Keplero non accenna al modo in cui ha ottenuto le tavole, né spiega il loro utilizzo. Sappiamo che egli venne a conoscenza delle tavole neperiane a Praga nel

[1] locum non esse, nisi ubi arcus a rectis sensibile differt

[2] Generale factum ab te exercitium illud numerorum cuius ego particulam exiguam iam a multis annis in usu habebam, tabularum partem face proposueram

1617, senza però poterle studiare. L'anno successivo lesse il *Cursus Mathematici Pratici* di Beniamin URSINUS dove le tavole di NEPERO erano riprodotte ed i logaritmi applicati alla soluzione di vari problemi di trigonometria sferica. Questo testo rianimò la curiosità di KEPLERO che riuscì, grazie anche alla prima lettura della *Descriptio*, a riottenere i logaritmi neperiani in modo autonomo, visto che la *Constructio* era appena stata stampata in Scozia e KEPLERO afferma nelle sue lettere di averla consultata solo nel 1621, anche perché in quegli anni era assorbito dalla stesura dell'*Harmonices Mundi* (1619), dove figurano le celebri leggi sul moto dei pianeti. Una svolta si ha quando il maestro di KEPLERO, Michael MAESTLIN, astronomo a Tubinga, che aveva guadagnato GALILEO alla teoria copernicana, gli scrive una lettera, datata 2 marzo 1620, dove esprime tutte le sue perplessità di fronte all'opera di NEPERO confessando la propria incapacità a riprodurre le dimostrazioni. La risposta di KEPLERO mostra come, al contrario, egli all'epoca avesse il pieno controllo della teoria neperiana, tanto da riprodurne i risultati per una via diversa che fa riferimento al metodo di bisezione e dunque assomiglia nello spirito all'approccio di BRIGGS.

La spinta decisiva che orientò il lavoro di KEPLERO nella stesura delle *Chiliades* venne da un viaggio intrapreso in Germania del Nord l'anno 1621, in cui rimase colpito dallo scetticismo nei confronti dei logaritmi che i colleghi astronomi nutrivano. Le critiche essenziali riguardavano gli argomenti cinematici posti da NEPERO a fondamento della sua costruzione, (*la cui scivolosità è inadatta*[3]) per concludere che si trattava di uno strumento di calcolo sospetto, privo di un solido sostrato teorico e dunque da evitare: *(è pericoloso) utilizzare una forma di calcolo come legittima senza una dimostrazione*[4]. KEPLERO, entusiasta sostenitore dell'uso dei logaritmi si sentì in dovere di fornirne una legittimazione agli occhi dei colleghi: *Mi bastò questo perché elaborassi subito una qualche forma rudimentale di dimostrazione legittima*[5]. Nel 1622 le *Chiliades Logarithmorum* furono inviate a MAESTLIN perché le correggesse ma l'anziano maestro tergiversò a lungo prima di restituirle, dopo ripetute richieste dell'autore, nel 1623. FILIPPO, langravio di Assia, ne curò a sue spese la stampa nel 1624. La parte teorica dell'opera—*Demonstratio Structurae Logarithmorum*—(pp. 322-345 di [2]) contiene un certo numero di postulati, uno schema per il calcolo di $\log 7$ e trenta proposizioni che, nelle intenzioni di KEPLERO dovrebbero stabilire su un solido fondamento i logaritmi neperiani. I postulati di KEPLERO sono di stile euclideo, basato sulla teoria delle proporzioni. Il primo ostacolo è proprio stabilire la misura m di un rapporto che non è semplicemente il confronto tra grandezze riferite ad un'unità di misura comune, ma una relazione tra le grandezze medesime. Il valore numerico di $m = a/b = c/d = e/f$, la cui esistenza è postulata da KEPLERO, porta alla definizione di logaritmo.

Postulato I. *Misurare ovvero esprimere tutti i rapporti uguali tra loro con una*

[3] cuius lubricitas et fluxibilitas inepta esset

[4] sine demonstratione legitimi formam calculi in usum recipere

[5] Haec, mihi, causa fuit, statim tunc concipiendi rudimentum aliquod Demonstrationis legitimae

stessa quantità, qualunque sia la natura dei due termini di uno e dell'altro.[6] (p. 322 di [2])

KEPLERO antepone al calcolo di $\log 7$ due assiomi ed una proposizione che precisano le proprietà elementari delle proporzioni continue.

Assioma I. *Se sono date delle quantità arbitrarie dello stesso genere che si succedono una con l'altra in un ordine qualsiasi, come ad esempio se si succedono in ordine di grandezza, si capisce che il rapporto dei termini estremi è composto da tutti i rapporti intermedi delle coppie e delle coppie vicine o, ciò che è lo stesso, un rapporto diminuisce all'aumentare del termine minore o al diminuire del maggiore, mentre cresce in caso contrario.*[7] (p. 322 di [2])

In termini formali, presa la proporzione continua

$$a : b = b : c = c : d = d : e = e : f = ...$$

si vuole trovare il rapporto $a : f$ degli estremi. La *ricetta* corretta di KEPLERO è

$$\frac{a}{f} = \frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d}\frac{d}{e}\frac{e}{f}.$$

Questo rapporto aumenta al crescere del termine maggiore o al diminuire di quello minore. Il medio proporzionale b tra due termini a e c divide la proporzione $a : c$ in due proporzioni uguali: $a : b = b : c$

Proposizione I. *Il medio proporzionale tra due termini ne divide il rapporto in due rapporti uguali tra loro.*[8] (p. 322 di [2])

In questa parte elementare KEPLERO sente il bisogno di enunciare un assioma il cui contenuto è il seguente: dato un numero n di quantità arbitrarie disposte in ordine crescente, il rapporto formato daglle grandezze estreme viene diviso dalle $n - 2$ interne in $n - 1 = (n - 2) + 1$ parti.

Assioma II. *Date delle quantità qualsiasi, poste in ordine crescente, il rapporto formato dalle estreme viene diviso da quelle intermedie in un numero di parti che supera di un'unità il numero dei rapporti intermedi.*[9] (p. 322 di [2])

Con il secondo postulato, KEPLERO intende affermare la possibilità di dividere un rapporto in un numero arbitrario di parti. L'esempio presentato è l'inserzione di trenta medi proporzionali tra 10 e 7.

Postulato II. *È possibile dividere un rapporto tra due termini assegnati arbitrari in un numero arbitrario di parti (come accade per le parti innumerevoli di una*

[6] Omnes proportiones inter se aequales, quacunque varietate binorum unius et binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

[7] Si fuerint quantitates quotcunque ejusdem generis, quocunque ordine sibi invicem succedentes, ut si ordine magnitudinis sibi invicem succedant, proportio extremarum composita esse intellegitur ex omnibus proportionibus intermediis binarum et binarum inter se vicinarum, seu quod eodem redit, proportio minuitur aucto minori termino vel diminuto majori, augetur rationibus contrariis.

[8] Medium proportionale inter duos termini dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se aequales.

[9] Si fuerint quantitates quotcunque, crescentes ordine proportio extremarum divisa est per intermedias in partes una plures, quam sunt intermediae, divisionem facientes.

progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$) fino al punto che le parti ottenute siano minori di una quantità assegnata.[10]. (p. 322 di [2])

Nell'esempio, KEPLERO suddivide il rapporto 10 : 7 in $1073741824 = 2^{30}$ parti eguali, in modo che la differenza tra 10 ed il termine successivo della proporzione è molto piccola. Il passo seguente è in realtà un arbitrio, in quanto KEPLERO assume come misura del rapporto più piccolo (*minimo*) della proporzione infittita la differenza (*excessum*) dei suoi termini:

$$m\left(\frac{a}{b}\right) := |a-b|\,.$$

Per quanto arbitraria sia questa definizione, essa è di sapore logaritmico perché, presi quattro numeri $a > b > c > d$, dalle identità

$$\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d} = \frac{a}{d}$$

e

$$(a-b)+(b-c)+(c-d) = (a-d)$$

si vede che

$$m(\frac{a}{b}) + m(\frac{b}{c}) + m(\frac{c}{d}) = m(\frac{a}{d})$$

che corrisponde all'identità

$$\log\left(\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d}\right) = \log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log\left(\frac{c}{d}\right)\,.$$

Postulato III. *È possibile assegnare o misurare con una quantità arbitraria il minimo elemento di una proporzione, minuscolo quanto si vuole, come ad esempio tramite la differenza dei termini di questo elemento.*[11] (p. 324 di [2])

Nel commento all'esempio discusso in precedenza, KEPLERO torna su questa definizione. Introdotti i 30 medi proporzionali tra 7 e 10, il termine che precede 10 è 9.9999999966782056900 e KEPLERO prende $0.0000000033217943100 = 10 - 9.9999999966782056900$ come misura del rapporto 10 : 9.9999999966782056900.

KEPLERO torna a proposizioni generali sulle proporzioni continue che enunciamo per completezza senza proporre la dimostrazione. La Proposizione II afferma semplicemente che, se $a : b = b : c$, allora $a : b = (a-b) : (b-c)$

Proposizione II. *Assegnati tre termini di una proporzione continuata, il rapporto tra il primo ed il secondo, ovvero del secondo con il terzo, coincide con il rapporto tra la differenza dei primi due termini e la differenza degli ultimi due.*[12] (p. 324 di [2])

[10] Proportionem inter datos duos terminos quoscunque dividere in partes quotcunque (ut in partes numero continue multiplici progressionis binariae) et eo usque, donec partes oriantur minores quantitate proposita

[11] Minimum proportionis elementum, quantulum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque, ut per excessum terminorum hujus elementi.

[12] Cum fuerint tres continue proportionales, quae est proportio primae ad secundam, vel secundae ad tertiam, eadem est proportio differentiae priorum ad differentiam posteriorum.

Applicando questa proposizione alla proporzione continua $a : b = b : c = c : d = d : e$... si ottengono le proporzioni

$$\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-c} \quad \frac{b}{c} = \frac{b-c}{c-d} \quad \frac{c}{d} = \frac{c-d}{d-e}$$

che, composte, forniscono $a : d = (a-b) : (d-e)$. Se gli elementi a, b, c, d, e sono posti in ordine crescente, anche le differenze tra termini successivi $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$ sono crescenti.

Proposizione III. *Date un certo numero di quantità in proporzione continua, la differenza più piccola compete al rapporto con i termini minori, quella massima a quello con i termini maggiori.*[13] (p. 324 di [2])

Come conseguenza, se si prende $d-e$ come misura di d/e, la misura di $a-b$ di a/b ($a,\ b < d,\ e$) risulterà minore di $d-e$ benché, stante la proporzione continua, la misura dovrebbe essere comune a tutti i rapporti.

Proposizione IV. *Date un certo numero di quantità in proporzione continua, se si prende come misura comune la differenza tra i termini maggiori, le differenze di due qualsiasi altre quantità successive saranno minori della corretta misura della proporzione di cui fanno parte.*[14] (p. 324 di [2])

Viceversa, la misura che compete a rapporti come a/b per il fatto di far parte di una proporzione continua è più grande della differenza tra i suoi termini $|a-b|$.

Proposizione V. *Se si assume in una proporzione continua la differenza tra i termini più grandi come misura del loro rapporto, tutti i rapporti restanti tra il massimo ed uno qualsiasi dei minori rimasti avranno una misura maggiore della differenza dei termini che li compongono.*[15] (pp. 324-325 di [2])

Così, se nella sequenza di numeri in proporzione continua 1000, 900, 810, 729 si prende $m(1000/900) = 100$, si ha $m(900/810) = 90 < 100$. Inoltre, il rapporto composto $1000/729$ dovrebbe avere misura 300, in quanto vi sono due medi proporzionali inseriti tra 729 e 1000. Al contrario, la differenza dei termini è solo 271 (p. 325 di [2]).

Un problema simile si incontra se si decide di prendere come misura della proporzione continua $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f = ...$ la differenza $f - c$ tra termini non contigui e di attribuire ai rapporti $c : d = d : e = e : f$ misura pari a $(f-c)/3$. In realtà, alcuni rapporti avranno misura minore ed altri maggiore di quella stabilita.

Proposizione VI. *Se si assume come misura di una proporzione continua la differenza tra il termine più grande ed uno dei termini minori che non lo seguono immediatamente, le proporzioni formate dal termine più grande e da un termine maggiore di quello adottato in precedenza avranno una misura minore*

[13] Cum fuerint aliquot quantitates in proportione continua, minimarum minima est differentia, maximarum maxima.

[14] Cum fuerint aliquot quantitates in proportione continua: si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum, differentiae quarumcunque duarum deinceps erunt minores mensura proportionis illarum justa.

[15] In continue proportionalibus si differentia maximarum statuitur mensura proportionis illarum, omnes reliquae proportiones, quae sunt inter maximam et unamquamlibet reliquarum minorum, sortientur mensuras majores differentiis suorum terminorum

della differenza dei loro termini; quelle proporzioni che invece tra il termine maggiore ed un termine maggiore di quello scelto in precedenza, daranno una misura maggiore della differenza dei suoi termini.[16] (p. 325 di [2])

Nella successiva Proposizione VII, KEPLERO ribadisce la definizione di proporzione continua, in vista della caratterizzazione dei rapporti contenuta nella Proposizione VIII.

Proposizione VII. *Se si dispone un certo numero di quantità in ordine di grandezza, in modo che le proporzioni formate da due termini successivi siano tra loro uguali, le stesse quantità formeranno una proporzione continua.*[17] (p. 325 di [2])

Nella Proposizione VIII si afferma che, inserendo tra due numeri qualsiasi a e b altri numeri che non appartengono ad una proporzione continua contenente a e b, allora il rapporto a/b non viene diviso in parti aventi una misura comune.

Proposizione VIII. *Se si dispone un numero qualsiasi di quantità una dopo l'altra in ordine di grandezza e le grandezze intermedie non appartengono ad alcuna proporzione continua, prolungata effettivamente o idealmente con l'interposizione dei termini omessi, allora tali proporzioni intermedie non dividono quella dei termini estremi in parti commensurabili.*[18] (pp. 326-327 di [2])

Se si vogliono inserire k medi proporzionali razionali (*effabiles*) tra numeri razionali della forma $\alpha(a^n)$ e $\alpha(b^n)$ (*ejusdem speciei figurativae*), allora $k = n-1$.

Proposizione IX. *Quando due lunghezze razionali non stanno tra loro come due numeri della stessa specie figurativa, cioè come due quadrati o due cubi, allora tra quelle lunghezze non cadono altre lunghezze razionali se non nel numero stabilito dalla specie medesima, cioè una tra due quadrati, due tra dei cubi, tre tra due biquadrati, ecc.*[19] (p. 327 di [2])

Come ovvio corollario, se $n = 1$ allora $k = 0$, come precisato dalla Proposizione X.

Proposizione X. *Se le due quantità estreme di un certo numero di quantità razionali, disposte in ordine di grandezza, non stanno tra loro come due quadrati o due cubi o due altri della medesima specie, allora nessuna delle proporzioni*

[16] In continue proportionalibus si differentia maximae et unius minorum non deinceps sequentis statuitur mensura proportionis illarum, reliquae proportiones, quae quidem sunt inter maximam et unam prius ascita majorem, sortientur mensuram minorem differentia suorum terminorum; quae vero proportiones sunt inter quantitatem maximam et unamquamlibet, prius ascita minorem, nanciscentur mensuram majorem, quam est differentia suorum terminorum.

[17] Si quantitates aliquot ordine magnitudine deinceps collocentur, binae deinceps proportiones aequales facientes, ipsae quantitates continue proportionales erunt.

[18] Si quantitates quaecunque deinceps collocentur ordine magnitudinis, quarum quae intermediae non sint inter proportionales medias proportionis cujuscunque, sive actu continuatae, sive potestate continuandae interpositione omissarum: intermediae tales proportionem extremarum non dividunt in commensurabilia.

[19] Cum duae longitudines effabiles non fuerint ad invicem, ut duo numeri ejusdem speciei figurativae, v. c. duo quadrati aut duo cubi: non cadent inter illas longitudines aliae effabiles mediae proportionales numero tot, quot ipsa species postulat, v.c. quadrati unam, cubi duas, biquadrati tres etc.

intermedie divide quella assegnata in parti commensurabili.[20] (pp. 327-328 di [2])

Con la Proposizione XI entrano in scena le progressioni aritmetiche e KEPLERO mostra che una progressione aritmetica di termini razionali non può far parte di una proporzione continua di numeri razionali.

Proposizione XI *Tutte le proporzioni ordinate in successione che sono formate da termini razionali che differiscono tra loro di una quantità costante, sono tra loro incommensurabili.*[21] (p. 328 di [2])

La Proposizione XII estende il contenuto della Proposizione VI al caso di numeri qualsiasi, posti in ordine crescente:

Proposizione XII *Se delle quantità qualsiasi vengono disposte una accanto all'altra in ordine di grandezza e si definisce come misura della proporzione la differenza tra le quantità maggiori, allora la differenza tra qualsiasi altra coppia di grandezze di quelle date sarà minore della misura della proporzione di cui fa parte; e se si assume come misura della proporzione la differenza delle due quantità più piccole, allora le altre differenze saranno maggiori della misura della proporzione di cui fanno parte.*[22] (p. 328 di [2])

KEPLERO si riconduce al caso esaminato nella Prop. VI inserendo un numero arbitrariamente grande di medi proporzionali tra i numeri proposti.

Corollario. *Benché la misura di una proporzione superi la differenza tra i termini maggiori, il rapporto tra questa misura e questa differenza sarà più piccolo del rapporto tra la misura successiva e la sua differenza, quando il rapporto dei termini proporzionali è lo stesso.*[23] (p. 329 di [2])

Prese infatti delle quantità $a > b > c > ....$ si costruisca una progressione geometrica di ragione $q = 1 - \varepsilon$ e siano n i medi proporzionali inseriti tra a e b e k quelli inseriti tra b e c. La misura della progressione costruita è $a\varepsilon$ in quanto il termine che segue a è $aq = (1 - \varepsilon)a$. La misura di a/b è pari a quella della progressione per il numero di medi inseriti tra a e b, dunque $m(a/b) = na\varepsilon$. D'altra parte la misura di b/c è $m(b/c) = ka\varepsilon$. Quanto alle differenze $a - b$ e $b - c$ si ha $a - b = a(1 - q^n) \simeq an\varepsilon$ e $b - c = b(1 - q^k) \simeq bk\varepsilon = ak\varepsilon q^{-n}$ Pertanto

$$m(a : b) : m(b : c) = n/k \leq (a - b) : (b - c) = (n/k)q^n \,.$$

Si conclude pertanto

$$\frac{m(a : b)}{a - b} \leq \frac{m(b : c)}{b - c} \,, \tag{4.1}$$

[20] Si ex aliquot quantitatibus effabilibus, ordine magnitudinis invicem sequentibus, duae extremae non fuerint ad invicem ut duo numeri quadrati aut duo cubi aut duo alii ejusdem speciei, intermediarum nulla dividet proportionem in commensurabilia.

[21] Omnes proportiones deinceps ordinatae, quae sunt inter terminos effabiles, aequalitate arithmetica se invicem excedentes, inter se sunt incommensurabiles.

[22] Si quantitates quaecunque deinceps collocentur ordine magnitudinis, proportionis vero inter maximas mensura statuatur differentia inter eas, differentia inter quascunque alias ex positis minor erit mensura suae proportionis; et si proportionis inter minimas mensura statuatur differentia minimarum, differentiae reliquae erunt majores mensura proportionis suorum terminorum.

[23] Quodsi superet mensura proportionis inter maximas differentiam earum, hujus mensurae ad hanc differentiam proportio minor erit quam sequentis mensurae ad differentiam suam, cum proportionalium eadem sit ratio.

risultato che sarà ripreso nella Proposizione XXIII per ottenere stime logaritmiche.

Con le Proposizioni XIV e XV KEPLERO deduce alcune stime sulla misura di rapporti. Nella Prop. XIV, KEPLERO mostra che, se $a - b = b - c$, $a > b > c$, allora $m(a : c) > 2m(a : b)$.

Proposizione XIV *Se tre quantità sono ordinate in successione e la differenza tra due termimi (successivi) è costante, il rapporto tra le quantità estreme è maggiore del rapporto doppio delle quantità maggiori.*[24] (p. 329 di [2])

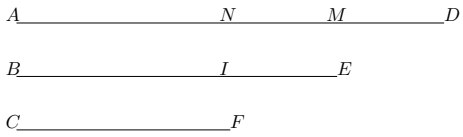

Figura 4.1: Lo schema della dimostrazione della Proposizione XIV delle *Chiliades Logarithmorum* di KEPLERO.

Disposti tre segmenti AD, BE ed FC in ordine decrescente di lunghezza (Fig. 4.1), sia DM l'eccesso di AD su BE e $EI = MN = DM$ l'eccesso di BE su FC, occorre mostrare che la proporzione $AD : CF$ è maggiore del doppio del rapporto tra AD e BE. Misurato il rapporto $AD : BE$ con DM, la misura di $BE : CF$ sarà maggiore della differenza $EI = DM$ tra BE e CF. Allora $DM = m(AD : BE) < m(BE : CF)$. Poiché $AD : CF = (AD : BE) \cdot (BE : CF)$ si ha anche $m(AD : CF) = m(AD : BE) + m(BE : CF) > 2m(AD : BE)$.

La Proposizione XV confronta un rapporto con quello ottenuto sottraendo la metà del termine maggiore dal numeratore e dal denominatore.

Proposizione XV. *Se da entrambe le quantità che formano un rapporto si sottrae la metà della quantità maggiore, allora le quantità residue formano un rapporto maggiore del doppio del precedente.*[25] (p. 329 di [2])

L'illustrazione è in verità un gioco formale un po' artificioso. KEPLERO considera il rapporto $10 : 9$ ai cui termini sottrae $5 = 10 : 2$ ottenendo $5 : 4$ che è equivalente a $10 : 8$ che ha differenza tra i termini pari a 2, il doppio della differenza tra i termini $10 : 9$ del rapporto di partenza.

La Proposizione XVI stabilisce l'incommensurabilità di parti arbitrarie di proporzioni tra loro incommensurabili e chiude l'introduzione alla costruzione vera e propria delle tavole logaritmiche.

Proposizione XVI. *La parti qualsiasi di proporzioni incommensurabili sono pure incommensurabili tra sé.*[26] (p. 330 di [2])

Sinora abbiamo visto KEPLERO lottare per introdurre un'appropriata misura di un rapporto e scontrarsi contro molte difficoltà che, in sintesi, si riassumono

[24] Si quantitates tres ordinentur deinceps, aequalibus differentiis invicem excedentes: proportio inter extremas est major quam dupla proportionis maximarum.

[25] Si duae quantitates proportionem constituerint, dimidium vero quantitatis majoris dematur de quantitate utraque, residuae quantitates proportionem constituent majorem dupla prioris

[26] Incommensurabilium proportionum partes aliquotae sunt inter se incommensurabiles.

dicendo che, quando il numeratore ed il denominatore di proporzioni equivalenti sono molto distanti tra loro, la misura $m(a/b)$ di un rapporto oscilla in maniera significativa. Queste oscillazioni possono essere ridotte sotto una soglia di tolleranza stabilita a priori inserendo un numero molto grande di medi proporzionali tra due numeri assegnati a e b, con $a > b$. In questo modo, detta $\varepsilon \ll 1$ la differenza tra il termine a e quello immediatamente precedente, la misura del rapporto $a/(a-\varepsilon)$ è ε e le oscillazioni subite percorrendo a ritroso la progressione geometrica fino al termine b sono trascurabili. La misura di a/b è data da $N\varepsilon$, dove N è il numero di parti in cui è stato suddiviso il rapporto a/b. Per ottenere una misura pressoché costante di un rapporto a/c, dove $c < b$ occorre infittire opportunamente la divisione. Seguiamo un estratto del tormentato commento alla Proposizione XVII in cui KEPLERO applica questo procedimento prendendo $a = 1000$ e variando b a ritroso sugli interi tra 999 e 500.

Testo 4.1 (KEPLER**,** Chiliades Logarithmorum**.)** pp. 331-332 di [2]. Originale 4.7 *Si cerchi allora il medio proporzionale tra 1000 e 999. Esso dividerà il rapporto dei due termini in parti uguali (prop. 1); si cerchi in secondo luogo un altro medio proporzionale tra il medio appena trovato e mille, cosicché la media precedente è da intendersi circondata da altri due medi proporzionali dei quali però è necessario studiare solo quello vicino a 1000. Il rapporto viene dunque diviso in quattro parti grazie a questi tre medi (come nell'assioma 2). Così un terzo medio proporzionale tra quello appena trovato e mille la dividerà in 8 parti, un quarto in 16 e via discorrendo (post. 2) in 32, 64, 128, 256, 512,1024, ciò che accade nella decima divisione. E pertanto questo studio ha stabilito in questo numero di 1024 le particole minori dell'eccesso in quanto il rapporto lo contiene meno di 1000 volte mentre qui vengono stabilite 1024 particole. Pertanto, questa 1024*ª *particola contiene come misura la differenza del suo termine minore ovvero del decimo medio proporzionale a partire dal termine maggiore 1000, per il postulato 3.*

*Otteniamo una suddivisione simile del rapporto tra 1000 e 998. Questo è infatti incommensurabile al precedente tra 1000 e 999 dal momento che, per la prop. 11, il rapporto tra 999 e 998 è incommensurabile rispetto a quella tra 1000 e 999, perché i termini corrispondenti differiscono di una unità ma il rapporto tra 1000 ad 998 è formato da quelli che sono tra loro incommensurabili (ass. 1). Ora, quando una quantità è suddivisa in parti incommensurabili, la quantità è incommensurabile ai singoli (Eucl. X. 17). Ora, questo rapporto tra 1000 e 998 è maggiore del doppio del rapporto di prima tra 1000 e 999, come indicato in quanto allegato al precedente punto 14. Pertanto, la 1024*ª *parte di questo (rapporto) è maggiore del doppio del minimo elemento del (rapporto) precedente; si bisechi pertanto, cosicché si ottengano 1024 parti dell'intero grazie alla ricerca dell'undicesimo medio proporzionale. Allora questo elemento sarà circa uguale all'elemento più piccolo precedente, restando tuttavia maggiore e incommensurabile rispetto ad esso per la precedente Proposizione 16.*

Se dunque quell'elemento ha ricevuto come misura la differenza dei suoi termini, già questo elemento della proporzione, di certo maggiore dell'altro, avrà una misura maggiore della differenza dei suoi termini (prop 12.) E parimenti,

se la differenza dei termini dell'elemento precedente viene moltiplicata (per se stessa) 1024 *volte per ottenere la misura del rapporto tra 1000 e 999, allora la differenza dei termini dell'elemento successivo, moltiplicata (per se stessa)* 2048 *volte, sarà ancora minore della misura della proporzione tra 1000 e 998.*

Se tuttavia consideriamo l'entità di questa differenza, essa è del tutto trascurabile ed impercepibile nei calcoli. Poiché infatti il rapporto tra 1000 e 999 è stato suddiviso in più di 1000 parti e si è presa come misura di un elemento tanto piccolo la differenza dei termini 1000000 et 999999, cioè 1, il rapporto vicino tra 999999 e 999998, maggiore del precedente (prop. 12) e sin qui certamente minore, avrà una misura che a stento supererà la prima differenza dei termini della sua milionesima parte e pertanto il rapporto composto tra 1000000 e 999998 è maggiore di due volte il rapporto di prima per poco più di due milionesimi della parte precedente. Ma già l'elemento del secondo rapporto tra 1000 e 998, stabilito in precedenza, non è in alcun modo maggiore del doppio dell'elemento del primo rapporto: proprio per questo se ne sono formate 2048 parti, anziché 1024, così che questa parte fosse pressoché uguale alla precedente.

Questo processo di infittimento viene proseguito fino al rapporto 1000:500. Per i numeri inferiori si osserva che, ad esempio $1000 : 499 = (1000 : 998)/(1000 : 500)$ sicché si è ricondotti a rapporti già considerati in precedenza.

Ottenuta una soddisfacente misura di un rapporto, Keplero ne può mostrare le proprietà algebriche elementari. Così, (Prop. XVIII) se è noto il rapporto tra 1000 ed un numero A, sono noti i rapporti tra 1000 ed i termini di una proporzione continua basata su A. Infatti, se $A : B = B : C = C : D = D : E...$, tutti i rapporti avranno la stessa misura. Poiché le misure di rapporti sono additive rispetto alla composizione di proporzioni, $m(A : C) = m[(A : B)(B : C)] = 2m(A : B)$, visto che si tratta di una proporzione continua.

Proposizione XVIII. *Noto il rapporto tra un numero qualsiasi ed il primo, 1000, si conoscono subito anche quelli tra gli altri numeri della stessa proporzione continua e lo stesso primo numero 1000.*

Sia nota la misura del rapporto tra A e B e si abbia che A sta a B come B sta a C come C sta a D come D sta ad E. Pertanto (postul. 1) le misure di queste singole proporzioni saranno uguali a quella nota tra A e B. Ora, il rapporto tra A e C si compone dei due rapporti tra A e B e tra B e C (Ass. 1), per cui anche la misura del rapporto tra A e C si ottiene sommando le misure dei rapporti tra A e B e tra B e C, cioè il doppio della misura del rapporto tra A e B dà quella del rapporto tra A e C, il triplo quello del rapporto tra A e D, il quadruplo quella del rapporto tra A ed E.[27] (p. 332 di [2])

[27] Cognita proportione numeri cujuscunque ad primum 1000, simul cognoscitur etiam numerorum reliquorum continuae ejusdem proportionis ad eundem primum 1000 proportio.

Nota sit mensura proportionis inter A et B, et sit ut A ad B sic B ad C et C ad D et D ad E. Erunt igitur aequales mensurae proportionum harum singularum ei, quae est primo nota A ad B (postul. 1). Jam vero proportio A ad C componetur ex duarum proportionum A ad B et B ad C (Ax. 1), quare et mensura proportionis A ad C componetur ex duarum proportionum A ad B et B ad C mensuris, id est mensura ipsius A ad B duplicata dat mensuram ipsius A ad C, triplicata ipsius A ad D, quadruplicata ipsius A ad E.

Nella Proposizione XIX si tratta il caso in cui $A = 1000$ e sono note le misure $m(A : B)$ ed $m(A : C)$ come il fatto che $A : B = C : D$. Allora si conosce anche $m(A : D)$. Infatti, $m(A : B) = m(C : D)$ e poiché $A : D = (A : C)(C : D)$ si ha $m(A : D) = m(A : C) + m(C : D) = m(A : C) + m(A : B)$, in virtù della proporzione $A : B = C : D$.

Proposizione XIX. *Noto il rapporto tra un numero e 1000 e se altri numeri stanno tra loro nel medesimo rapporto, noto il rapporto di uno di questi con 1000, si conosce anche il rapporto dell'altro con 1000.*

Poniamo $A = 1000$ *e supponiamo di conoscere il rapporto tra* A *e* B*. Sappiamo anche che* A *sta a* B *come* C *sta a* D *e conosciamo la misura del rapporto tra* A *e* C*: affermo che è nota anche la misura del rapporto tra* A *e* D*. Infatti, dalla conoscenza della misura del rapporto tra* A *e* B *si conosce anche quella del rapporto tra* C *e* D *che è uguale al primo (postul. 1); è poi anche nota la misura del rapporto di* A *con* C *ed il rapporto tra* A *e* D *che è composto dei rapporti di* A *con* C *e di* C *con* D *(ass. 1) ha una misura che è la somma di quelle dei rapporti tra* A *e* C *e tra* C *e* D*, quest'ultima uguale alla misura tra* A *e* B.[28] (pp. 332-333 di [2])

Con un procedimento simile, KEPLERO mostra nella Proposizione XX che, noti quattro numeri in proporzione tra loro, se si conoscono le misure dei rapporti tra 1000 e tre dei numeri coinvolti nella proporzione di partenza, allora è nota anche la misura del rapporto tra 1000 ed il quarto termine della proporzione.

Proposizione XX. *Quando un primo numero sta ad un secondo come un terzo sta ad un quarto e sono noti i rapporti tra 1000 e tre dei numeri precedenti, allora è noto anche il rapporto tra 1000 ed il quarto numero.*[29] (p. 333 di [2])

Finalmente, KEPLERO definisce ora il logaritmo di un rapporto $1000/b$ con $b < 1000$: è la misura del rapporto $1000/b$, cioè $N\varepsilon$. KEPLERO interpreta l'origine della parola logaritmo come numero ($\grave{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$) che indica il rapporto ($\lambda o\gamma o\nu$) tra 1000 ed il numero di cui si calcola il logaritmo.

Definizione. *La misura di un qualunque rapporto tra 1000 ed un numero minore, come definita in precedenza viene espressa da un numero che viene associato a questo numero tabulare minore ed è detto logaritmo di quest'ultimo, cioè il numero ($\grave{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$), che indica il rapporto ($\lambda o\gamma o\nu$) con 1000 del numero cui si associa il logaritmo.*[30] (pp. 333-334 di [2])

---

[28] Cognita proportione numeri ad primum 1000, si duo alii in eadem inter se proportione fuerint, eorum unius proportione ad 1000 cognita, noscetur etiam reliqui proportio ad eundem 1000.

Sit A 1000 et nota mensura proportionis A ad B. Sit vero A ad B sic C ad D et sit nota mensura proportionis A ad C: dico etiam innotescere mensuram proportionis A ad D. Quia enim nota est mensura ipsius A ad B proportionis, nota etiam erit ipsius C ad D proportionis, ut quae illi ponitur aequalis (postul. 1); nota vero est etiam A ad C, et A ad D est composita ex A ad C et C ad D (ax. 1), quare etiam mensura ipsius A ad D componetur ex mensura ipsius A ad C ut ex mensura ipsius C ad D, id est ipsius A ad B.

[29] Quando fuerint ut primus ad secundum sic tertius ad quartum, notae vero fuerint proportiones ipsius 1000 ad tres priores, innotescet etiam proportio ejusdem 1000 ad quartum.

[30] Mensura cujuslibet proportionis inter 1000 et numerum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade dicaturque Logarithmus ejus, h. e. numerus ($\grave{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$), indicans proportionem ($\lambda o\gamma o\nu$), quam habet ad

Con la Proposizione XXI inizia una serie di stime che coinvolgono i logaritmi di funzioni trigonometriche.

Proposizione XXI *Se il primo numero è il semidiametro del cerchio ovvero il seno totale: ogni numero ad esso inferiore, come il coseno di un qualche arco, ha un logaritmo che è maggiore della freccia dell'arco stesso ma minore della differenza tra la secante dell'arco rispetto al raggio o semidiametro, con l'eccezione dell'unico arco che è circa uguale al semidiametro e che per ipotesi ha logaritmo uguale alla freccia dell'arco.*[31] (p.334 di [2])

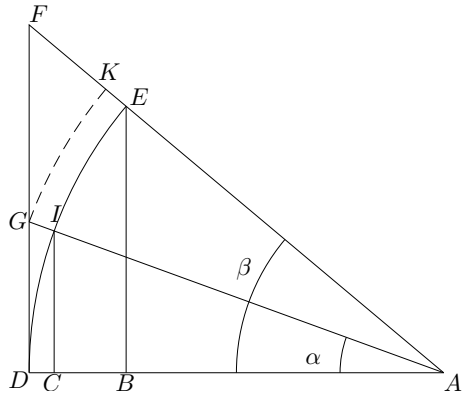

Figura 4.2: Lo schema della dimostrazione delle Proposizioni XXI e XXVIII delle *Chiliades Logarithmorum* di Keplero.

Se ricordiamo che il coseno dell'arco α è da intendere come $R\cos\alpha$ nella trigonometria dell'epoca e che la freccia (*sagitta*) dell'arco è $R(1-\cos\alpha)$, la proposizione si può tradurre nelle disuguaglianze (Figura 4.2)

$$R(1-\cos\beta) < \mathrm{kl}\,(R\cos\beta) < R(\sec\beta - 1)\,, \tag{4.2}$$

dove $\mathrm{kl}\,(a)$ indica il logaritmo kepleriano di un numero.

Per la dimostrazione, Keplero si serve di un angolo ausiliario $\alpha << 1$ in modo che sia lecito assumere $CD = AD - AC$ come logaritmo di $AC = R\cos\alpha$, in quanto $AD \simeq AC$. Come primo passo introduce un angolo β tale che

$$AD : AC = AC : AB \qquad \text{cioè} \qquad R : R\cos\alpha = R\cos\alpha : R\cos\beta\,. \tag{4.3}$$

Poiché $DC = \mathrm{kl}\,AC = m\left(\frac{AC}{AD}\right)$, la misura di AB/AD, supera $AD - AB = DB$ e dunque

$$\mathrm{kl}\,(R\cos\beta) = \mathrm{kl}\,(AB) = m\left(\frac{AB}{AD}\right) > AD - AB = BD = R(1-\cos\beta) \tag{4.4}$$

1000 numerus ille, cui logarithmus apponitur.

[31] Si primus numerus sit semidiameter circuli seu sinus totus: omnis numerus minor, ut sinus complementi alicujus arcus, logarithmum habet majorem sagitta arcus, minorem vero excessu secantis arcus supra radium seu semidiametrum, excepto unico proximo post semidiametrum quia illius logarithmus ex hypothesi est aequalis sagittae.

che mostra la prima disuguaglianza di (4.2). Come passo successivo, KEPLERO dimostra la seconda disuguaglianza di (4.2) per l'angolo α per il quale si può porre $CD = R(1 - \cos\alpha) = \mathrm{kl}\,(R\cos\alpha)$. Per similitudine tra i triangoli rettangoli ADG ed ACI si ha anche

$$CA : AD = IA : AG = AD : AG \tag{4.5}$$

e dunque AD è medio proporzionale tra CA ed AG: per la Proposizione II allora è anche $CA : AD = (AD - CA) : (AG - AD) = CD : IG$. Poiché $CA < AD$ è anche $DC < IG$, cioè $\mathrm{kl}\,(R\cos\alpha) < R(\sec\alpha - 1)$. Per l'angolo β occorre mostrare che $\mathrm{kl}\,AB = \mathrm{kl}\,(R\cos\beta) < EF = R(\sec\beta - 1)$. Ripetendo lo stesso argomento che ha condotto a (4.5) si mostra che

$$BA : AD = AD : AF\,; \tag{4.6}$$

d'altro canto, la proporzione (4.3) si può rileggere come

$$R : R\sec\alpha = R\sec\alpha : R\sec\beta \qquad \text{cioè} \qquad AE(= AD) : AG(= AK) = AG(= AK) : AF \tag{4.7}$$

dove KEPLERO ha staccato su AF un segmento $AK = AG = R\sec\alpha$. Dalle proporzioni (4.3), (4.5) (con $AG = AK$) e (4.7) si può dunque formare la proporzione continua

$$AB : AC = AC : AD = AD : AK = AK : AF\,, \tag{4.8}$$

che può essere prolungata grazie alla Proposizione II ottenendo

$$AB : AC = AC : AD = AD : AK = AK : AF = CB : CD = EK(= IG) : KF\,, \tag{4.9}$$

Poiché $DC < IG$ per quanto mostrato sopra, dalla (4.9) segue anche $KE = IG < KF$ per cui $EF = KE + FK = IG + FK > 2IG > 2CD$. In virtù di (4.3), della legge di composizione della misura di un rapporto e del Postulato I si ha che

$$\begin{aligned}&\mathrm{kl}\,AB = m\left(\tfrac{AB}{AD}\right) = m\left(\tfrac{AB}{AC}\right) + m\left(\tfrac{AC}{AD}\right) = 2m\left(\tfrac{AC}{AD}\right) = 2\mathrm{kl}\,(AC) = \\ &= 2CD < EF = R(\sec\beta - 1)\end{aligned}$$

che completa la dimostrazione. Di seguito riportiamo l'originale di KEPLERO

Testo 4.2 (KEPLERO**,** Chiliades Logarithmorum**)** (p.334 di [2]). Originale 4.8

Sia A il centro del cerchio, AD il semidiametro, DI e DE gli archi di seni IC ed EB, cosicché il seno dei complementi sono CA e BA e le frecce degli archi CD e BD. Sia inoltre che AD sta ad AC come AC ad AB. Prolungati gli archi oltre gli estremi I ed E fino ai segmenti tangenti DG e DF, siano AG ed AF le secanti degli archi e si tolga da AF un segmento AK uguale ad AG; infine, sia CD la misura del rapporto tra AC ed AD preso come arbitrario elemento minimo. Dico che la misura del rapporto tra AB ed AD, cioè il logaritmo del medesimo BA è maggiore di BD ma minore di EF. Che sia maggiore di BD è

stato mostrato in precedenza alla prop. 12; che poi le misure di questi rapporti siano minori di IG ed EF si mostra in questo modo. Partiamo da CA: nel momento in cui si prende come logaritmo di CA la stessa freccia CD, come compete al più piccolo elemento di un rapporto, si ha che CD è minore di IG. Come infatti CA sta ad AD così IA, cioè DA, sta ad AG, poiché DG, CI sono parallele. Dunque AD è medio proporzionale tra CA ed AG; pertanto CA sta ad AD come la differenza tra CA ed AD (cioè CD) sta alla differenza degli elementi successivi AG ed DA (cioè al segmento IG). CA è però minore di AD, e dunque CD è minore di IG. CD è però il logaritmo dello stesso CA, coseno dell'arco ID ed IG è la differenza tra la secante ed il suo arco e pertanto il logaritmo è minore di questa differenza.

Passando a BA, occorre mostrare che il suo logaritmo è maggiore di BD ma si mantiene anche minore dello stesso EF. Nuovamente pertanto AD è medio proporzionale tra BA ed AF e poiché per ipotesi BA sta ad AC come AC sta ad AD, si ha anche che EA sta ad AG oppure ad AK come AK oppure GA sta ad AF. Le quantità AB, AC, AD, AK od AG ed AF appartengono dunque ad una proporzione continua di cui fanno parte anche BC, CD, IG. Ora, CD è minore di IG, come mostrato in precedenza, pertanto IG oppure EK sarà minore di KF, e dunque l'intero EF è maggiore del doppio dello stesso IG e a maggiore ragione EF sarà maggiore del doppio del segmento minore CD. Ma la misura del rapporto tra BA ed AD, o logaritmo di AB, è più del doppio di quella del rapporto tra lo stesso BA ed AC (prop. 1) che è esattamente il doppio del logaritmo dello stesso CD (postul. 1): dunque il logaritmo dello stesso BA supera l'eccesso EF della secante (sul raggio) ed era già maggiore della freccia BD: come ci eravamo proposti.

Con tecniche simili, nella Proposizione XXII troviamo dimostrata la disuguaglianza

$$2\mathrm{kl}\,(R\cos\alpha) < R(\sec\alpha - \cos\alpha)$$

che viene enunciata in questi termini

Proposizione XXII *Sotto le medesime ipotesi, la freccia dell'arco sommata all'eccesso della secante (sul raggio) è maggiore del doppio del logaritmo corrispondente al coseno dell'arco.*[32] (p.334 di [2])

Anche qui la dimostrazione è divisa in due parti, la prima dedicata ad angoli α piccoli, la seconda al caso generale. Nel primo caso, poiché $\mathrm{kl}\,(R\cos\alpha) = CD < IG$ si ha che $IG + CD > 2\mathrm{kl}\,(R\cos\alpha)$, come era da dimostrare, visto il significato di CD ed IG. Nel caso generale occorre far vedere che

$$2\mathrm{kl}\,AB < EF + BD \tag{4.10}$$

partendo dalle proporzioni (4.3), (4.6). In particolare, poiché in una proporzione $x_4 : x_3 = x_2 : x_1$ in cui $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$ per la proprietà dello scomporre si ha $x_4 : (x_4 - x_3) = x_2 : (x_2 - x_1)$, segue che $(x_4 - x_3)/(x_2 - x_1) = x_4/x_2 > 1$ e quindi

[32] Iisdem positis, sagitta arcus cum excessu secantis superat duplum logarithmi ad sinum complementi apponendi.

$x_4+x_1 > x_2+x_3$: la somma degli estremi supera quella dei medi. Applicando il risultato alla proporzione (4.8), riletta nella forma $AB : AC = AG(= AK) : AF$, si ha $AB + AF > AC + AG$ mentre da (4.6) segue $AB + AF > 2AD$. Poiché da (4.9) $BC : CD = IG : KF$, allora segue $BC + KF > CD + IG > 2CD$. Come mostrato nella Proposizione XXI, $EF > 2FK$ e da (4.3) si ha $AB : AC = AC : AD$ per cui $AB + AD > AC + AC$ ovvero $AB + AD - AC = AB + CD > AC$ e quindi $DC > CB$. In definitiva è dunque $DB > 2BC$ per cui $EF + DB > 2(BC + KF) > 4CD = 2\mathrm{kl}\, AB$, cioè la tesi.

Testo 4.3 (KEPLERO, Chiliades Logarithmorum) (pp. 334-335 di [2]). Originale 4.9.

Si consideri dapprima un coseno molto grande, come AC oppure una proporzione continua divisa in molte parti con molti medi proporzionali, in modo che la differenza CD ovvero la freccia dell'arco ID sia proprio la misura arbitraria del rapporto, cioè sia CD il logaritmo dello stesso CA. Ma IG è maggiore di CD e dunque la somma della differenza IG tra secante e raggio con la freccia CD è maggiore del doppio dello stesso CD.

Si consideri poi un segmento che appartiene alla stessa proporzione continua, come AB, e condotta la perpendicolare ad esso in B fino ad incontrare la circonferenza in E ed uniti A con E e prolungato DG sino ad F in modo che EF è l'eccesso della secante (sul raggio) e BD la freccia del medesimo arco ED. Dico che la somma di EF e BD supera il doppio del logaritmo da assegnare ad BA ovvero della misura del rapporto tra BA ed AD.

Poiché BA sta ad AD come DA sta ad AF e CA è medio proporzionale tra BA ed AD, allora BA sta AC come GA sta ad AF, e dunque (Eucl. V. 25) la somma di BA ed AF è maggiore di quella tra CA ed AG ovvero BA sta ad AD come DA sta ad AF per cui la somma di BA ed AF è maggiore dei due medi DA, AD. Dunque come BA sta ad AC così anche BC sta ad CD ed IG sta a KF (prop. 2), e dunque anche la somma di BC e KF è maggiore della somma di CD ed IG che però è maggiore del doppio dello stesso CD e quindi la somma di BC ed KF è a maggior ragione più grande del doppio di CD, e così BD ed EF sono più del quadruplo di CD che però è la misura del rapporto tra BA ed AD (postul. 1) e dunque la somma di BD ed EF supera il doppio del logaritmo dello stesso BA cioè la misura del rapporto tra BA ed AD.

Come illustrazione, KEPLERO considera il *seno* 99970.1490 cui corrisponde il valore 29.8510 della freccia e quello 25.8599 per la differenza tra la secante ($R \sec \alpha$) ed il *sinus totus* R. Presa 29.8555, media aritmetica di questi valori, segue la stima $25.8510 < \mathrm{kl}\, R \cos \alpha < 29.8555$, a differenza del valore 29.86 indicato da NEPERO.

Con la Proposizione XXIII, KEPLERO lega le proporzioni formate da termini successivi di una progressione aritmetica e quelle delle loro misure.

Proposizione XXIII *Se tre quantità poste in ordine crescente hanno la stessa differenza, la misura del rapporto tra la maggiore e la mediana e quella dell'altro*

rapporto tra la mediana e la minore formano un rapporto maggiore di quello tra i maggiori e minore di quello tra i minori.[33] (p. 335 di [2])

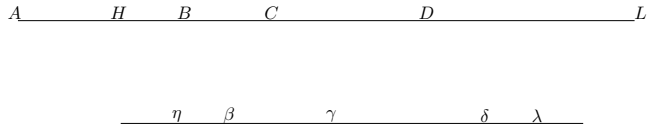

Figura 4.3: Lo schema della dimostrazione delle Proposizioni XXIII e XXIV delle *Chiliades Logarithmorum* di Keplero.

In altre parole (Figura 4.3), se $AD > AC > AH$ sono le tre grandezze in progressione aritmetica cosicché $DC = AD - AC$ e $CH = AC - AH$ sono tra loro uguali, se si indica $m(DA : AC)$ con un segmento $\delta\gamma$ ed $m(CA : AH)$ con il segmento $\gamma\eta$, allora

$$\frac{AD}{AC} < \frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \frac{AC}{AH}\,.$$

La dimostrazione è diretta, ma piuttosto articolata per lo stile verboso dell'epoca. Si introduca AB tale che

$$DA : AC = AC : AB = DC : CB\,, \tag{4.11}$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla Prop. II. Da $DA > AC$ segue anche $CD(= CH) > CB$, cosicché $BH = CH - CB > 0$. L'uguaglianza di rapporti (4.11) implica che $\delta\gamma = m(DA : AC) = m(AC : AB)$ e poiché $CA : AH = (CA : AD)(AD : AH)$ si ha che $\gamma\eta = m(CA : AH) > m(CA : AD) = \delta\gamma$. Preso $\gamma\beta = \gamma\delta$, $\beta\eta = \gamma\eta - \gamma\beta$ è la misura di $BA : AH$. Grazie al Corollario alla Prop. XII, si ha anche $(\gamma\beta : CB) < (\beta\eta : BH)$ ovvero

$$\frac{\beta\eta}{\gamma\beta} = \frac{\beta\eta}{\gamma\delta} > \frac{BH}{CB}$$

e, applicando la proprietà del comporre, che conserva il verso della disuguaglianza,

$$\frac{\gamma\eta}{\gamma\beta} = \frac{\gamma\eta}{\gamma\delta} > \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CB} = \frac{DA}{AC}\,,$$

che mostra la prima delle (4.11). Quanto all'altra disuguaglianza, il procedimento è simile. Si introduce AL tale che

$$HA : AC = CA : AL\ (= HC : CL) \tag{4.12}$$

e poiché $AC > AH$ deve essere $CL > HC = DC$. Detta $\eta\gamma = m(HA : AC) = m(AC : AL) = \gamma\lambda$, poiché $CA : AD = (CA : AL)(AL : AD)$ la misura $\gamma\delta$ di

[33] Si tres quantitates invicem successerint, aequalibus excessibus differentes, mensura proportionis inter maximam et mediam cum mensura alterius inter mediam et minimam constituet proportionem, majorem quidem proportione majorum, minorem vero proportionem minorum.

$CA : AD$ è inferiore a $\gamma\lambda$ e la differenza $\delta\lambda = \gamma\lambda - \gamma\delta$ è la misura di $DA : AL$. Poiché $DA > CA$ e $AL > DA$, per il corollario alla Prop. XII si ha

$$\frac{\delta\lambda}{\gamma\lambda} = \frac{\delta\lambda}{\gamma\eta} < \frac{DL}{CL}$$

ovvero

$$\frac{\gamma\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\gamma\eta}{\delta\lambda} > \frac{CL}{DL} \tag{4.13}$$

e dunque, per la proprietà dello scomporre

$$\frac{\gamma\delta}{\lambda\gamma} > \frac{CD}{LC} = \frac{HC}{LC} = \frac{AH}{AC}$$

che dimostra l'asserto in quanto $\eta\gamma = \gamma\lambda$.

Testo 4.4 (Keplero, *Chiliades Logarithmorum*) (pp. 335-336 di [2]). Originale 4.10. *Siano date 3 quantità AD, AC, AH, che hanno differenze DC e CH uguali ed il segmento $\delta\gamma$ sia poi pari alla misura del rapporto $DA : AC$ mentre il segmento $\gamma\eta$ sia la misura del rapporto $CA : AH$. Affermo che il rapporto dello stesso $\delta\gamma$ e di $\gamma\eta$ è maggiore del rapporto tra lo stesso CA ed AD e minore del rapporto tra lo stesso HA ed AC. Si supponga allora che DA stia ad AC come CA sta ad AB; pertanto DA sta ad AC come DC sta a CB (Prop. 2) ma DA è più lungo di AC e dunque DC deve essere più lungo di CB ed anche CH è più lungo di CB con differenza BH. Dal momento che i rapporti tra DA ed AC e tra CA ed AB sono uguali (prop. 1), allora la misura dello stesso rapporto tra DA ed AC che è il segmento $\delta\gamma$ sarà anche la misura del rapporto tra CA ed AB (postul. 1). E siccome il rapporto tra CA ad AH è composto dai rapporti tra CA ed AB e tra BA ed AH, il rapporto tra CA ed AH sarà dunque maggiore del rapporto tra DA ed AC che è poi uguale al rapporto tra CA ed AB per cui anche la sua misura $\gamma\eta$ sarà maggiore di $\gamma\delta$. Si tolga da $\gamma\eta$ un segmento $\gamma\beta$, uguale a $\gamma\delta$ cosicché la differenza $\beta\eta$ sarà misura del rapporto restante tra BA ed AH. Tuttavia il rapporto tra $\gamma\beta$ ed CB sarà minore di quello tra $\beta\eta$ e BH (prop. 12. coroll.), cioè $\beta\eta$ è maggiore rispetto a $\beta\gamma$ o $\gamma\delta$ più di quanto HB lo sia rispetto a BC. Componendo dunque i termini, da una parte $\gamma\beta$ e $\beta\eta$ per ottenere $\gamma\eta$, dall'altra CB e BH per ottenere CH, $\gamma\eta$ supererà $\gamma\beta$ ovvero $\gamma\delta$ che è uguale a quest'ultimo più di quanto CH superi CB. Pertanto il rapporto tra $\delta\gamma$ e $\gamma\eta$ è maggiore di quello tra BC e CH, cioè CD. Poiché poi BC sta a CD come CA sta ad AD (prop. 2), il rapporto tra $\delta\gamma$ e $\gamma\eta$ è maggiore di quello tra CA ed AD. Ma $\delta\gamma$ e $\gamma\eta$ sono misure, la prima del rapporto tra i termini maggiori DA ed AC, la seconda del rapporto tra i termini minori CA ed AH. Così il rapporto tra le misure è maggiore di quello tra i termini minori.*

Nuovamente si abbia HA sta ad AC come CA sta ad AL: dunque HA sta ad AC come HC sta ad CL (prop. 2). Ma HA è più corto di AC, per cui HC, cioè DC è più corto di CL, con differenza DL. Siccome i rapporti tra HA ed AC e tra CA ed AL sono uguali, rappresentata con il segmento $\eta\gamma$ la misura tra HA ed AC, anche il rapporto tra CA ed AL avrà misura uguale ad $\eta\gamma$ (postul. 1), rappresentata da $\gamma\lambda$. Ora la misura del rapporto tra CA ed

AD, rappresentata da $\gamma\delta$ era minore, per cui $\gamma\delta$ è minore di $\gamma\lambda$. Pertanto la differenza $\delta\lambda$ sarà misura del rapporto tra DA ed AL, aggiunto al rapporto tra CA ed AD. E poiché DA ed AL sono rispettivamente più lunghi di CA ed AD ne segue (prop. 12. coroll.) che $\delta\lambda$ è inferiore a $\lambda\gamma$ o a $\gamma\eta$, più di quanto DL lo sia rispetto ad LC, e il segmento restante $\gamma\delta$ supera $\gamma\lambda$ o $\gamma\eta$ più di quanto CD o HC superi CL. E dal momento che un rapporto diminuisce all'aumentare del termine minore (ax. 1), è minore il rapporto tra $\delta\gamma$ e $\gamma\eta$, misure di rapporti uno dei quali formato tra il termine maggiore ed il medio, l'altro tra il medio ed il minore, rispetto al rapporto tra i termini minori.

Nella Proposizione XXIV si dimostra che

$$\frac{\gamma\eta}{\delta\gamma} < \sqrt{\frac{AH}{AD}}\,,$$

dove $\eta\gamma = m(HA/AC)$ e $\delta\gamma = m(CA/AD)$.

Proposizione XXIV *Il suddetto rapporto tra due misure è minore di metà del rapporto tra i termini estremi.*[34] (p. 336 di [2])

Come prima, la differenza tra AH ed AC coincide con quella tra AD ed AC, cosicché AC è medio aritmetico tra AH ed AD. Detto AV il medio geometrico tra AH ed AD si pone

$$\delta\gamma = m(CA/AD) \geq CD \quad \text{e} \quad \gamma\upsilon = m(AC/AV)$$

così che

$$\delta\upsilon = \delta\gamma + \gamma\upsilon = m\left(\frac{AC}{AV}\frac{AV}{AD}\right) = m(AD/AV) = m(AV/AH) = \eta\upsilon = m(DV/VH)\,.$$

Applicando due volte il Corollario alla Proposizione XII si ha

$$\frac{\delta\upsilon}{VH} = \frac{\upsilon\eta}{VH} \geq \frac{\gamma\upsilon}{CV} \geq \frac{\gamma\delta}{CD}$$

e poiché $\eta\delta = \eta\upsilon + \upsilon\delta = \eta\gamma + \gamma\delta = m(AD/AH)$, si ha anche

$$\frac{\eta\delta}{HD} \geq \frac{\gamma\upsilon}{CV}$$

e siccome $DV + HV = DH$, $DV - HV = DC + CV - HV = HC + CV - HV = 2CV$ mentre $\eta\gamma - \gamma\delta = \upsilon\gamma + \eta\upsilon - \gamma\delta = \upsilon\gamma + \delta\upsilon - \gamma\delta = 2\upsilon\gamma$ l'ultima disuguaglianza si può porre nella forma

$$\frac{\eta\gamma + \gamma\delta}{\eta\gamma - \gamma\delta} \geq \frac{DV + HV}{DV - HV}$$

ovvero $(a+b) : (a-b) \geq (c+d) : (c-d)$ che impone $a/b < c/d$ o, in questo caso

$$\frac{\eta\gamma}{\gamma\delta} \leq \frac{DV}{HV} = \frac{DA}{AV} = \sqrt{\frac{DA}{AH}}\,.$$

[34] Dicta proportio inter duas mensuras est minor dimidia proportione inter terminos extremos.

Testo 4.5 (KEPLERO, *Chiliades Logarithmorum*) (pp. 336-337 di [2]). Originale 4.11 *Si considerino due medie dei termini estremi, come AH ed AD visti prima: la media aritmetica AC e quella geometrica AV. Sia $\delta\gamma$ la misura del rapporto tra DA ed AC o uguale allo stesso DC od anche maggiore (postul. 3) e si aggiunga a $\delta\gamma$ un altro segmento $\gamma\upsilon$ che rappresenti la misura esatta del rapporto tra CA ed AV, cosicché l'intero segmento $\delta\upsilon$ misuri il rapporto tra DA ed AV; pertanto la misura del rapporto residuo tra VA ed AH risulterà uguale al segmento $\delta\upsilon$ (postul. 1. e prop. 1); indichiamola con $\upsilon\eta$. Poiché dunque $\delta\gamma$ o è uguale a DC o gli è maggiore, il rapporto tra $\gamma\upsilon$ e CV sarà maggiore del rapporto tra $\gamma\delta$ e CD ed il rapporto del terzo segmento $\upsilon\eta$ con VH sarà nuovamente maggiore di quello del secondo segmento $\gamma\upsilon$ con CV e, per composizione, il rapporto dell'intero segmento $\eta\delta$ con HD supererà quello tra le parti $\upsilon\gamma$ e VC. Permutando i termini dunque il rapporto tra l'intero segmento $\eta\delta$, termine maggiore a sinistra nella proporzione, sta ad $\upsilon\gamma$ termine maggiore a destra nella proporzione come l'intero HD, termine minore nel primo rapporto, sta a VC, termine minore nel secondo. Ma l'intero $\eta\delta$ è formato dai termini $\eta\gamma$ e $\gamma\delta$ a cui differenza è $\gamma\upsilon$; similmente CH è formato dai termini DV e VH la cui differenza è VC, pertanto il rapporto dei termini $\eta\gamma$ e $\gamma\delta$ messi insieme sarà maggiore rispetto alla differenza $\gamma\upsilon$ più di quanto il rapporto di DV e VH rispetto alla loro differenza VC. È però noto e segue anche dal corollario alla prop. 13 che, all'aumentare del rapporto tra la somma di due termini e la loro differenza diminuisce di nuovo il rapporto dei termini posti poiché il rapporto di termini proporzionali è lo stesso. Così il rapporto tra $\eta\gamma$ e $\gamma\delta$ è minore di quello tra DV e VH. Ma il rapporto tra DV e VH è uguale a quello tra DA ed AV (prop. 2), che però è la metà di quella tra DA ad AH (prop. 1), per cui il rapporto tra $\eta\gamma$ e $\gamma\delta$, misure dei rapporti tra HA ed AC e tra CA ed AD è minore della metà del rapporto tra HA ed AD.*

Grazie ai risultati ottenuti nelle Prop. XXIII ed XXIV, KEPLERO ottiene delle stime sui logaritmi che vengono enunciate nelle Proposizioni XXV e XXVI. Dapprima, presi due interi consecutivi n ed $n+1$ KEPLERO mostra che

$$1000/(n+1)[\text{oppure } 1000/\sqrt{n(n+1)}] \leq m(n/n+1)/m(1000/999) \leq 1000/n$$

che può essere riletta in termini di logaritmi perché $m(n/n+1) = \mathrm{kl}\,(n) - \mathrm{kl}\,(n+1)$.

Proposizione XXV *Se 1000 numeri disposti uno dopo l'altro secondo l'ordine naturale, differenti l'uno dall'altro di una unità, se ne prenda una coppia, così ordinati, come se formassero i termini di uno certo rapporto: la misura di questo rapporto starà alla misura del rapporto tra i due termini maggiori del migliaio in un rapporto maggiore rispetto a quello tra lo stesso 1000 ed il maggiore dei termini considerati ma minore di quello tra lo stesso 1000 ed il minore dei termini considerati ed anche minore del rapporto tra 1000 ed il medio proporzionale tra i termini considerati.*[35] (pp. 337-338 di [2])

[35] Si numeri 1000 succedant invicem ordine naturali, bini differentes unitate, suscipiantur

Successivamente egli mostra che

$$\frac{1000}{n+1} \leq \mathrm{kl}\,(n) - \mathrm{kl}\,(n+1) \leq \frac{1000}{n}$$

Proposizione XXVI *La differenza di due logaritmi corrispondenti a numeri successivi sta alla differenza di questi numeri in un rapporto maggiore di quello tra lo stesso 1000 ed il numero maggiore ma minore del rapporto tra 1000 ed il numero minore.*[36] (p. 339 di [2])

La Proposizione XXVII contiene un articolato confronto tra logaritmi di archi prossimi al *sinus totus* ed opportune funzioni trigonometriche dell'arco stesso. Si prendano infatti AD pari al *sinus totus* ed $AC = AD\cos\alpha$, $AB = AD\cos\beta$ in modo che $DC = AD - AC = CB = AC - AB$ per cui, in virtù di quanto mostrato prima,

$$\frac{BA}{AC} > \frac{CA}{AD} \quad \text{e dunque} \quad m(\frac{BA}{AC}) > m(\frac{CA}{AD})$$

che può essere riletta in termini di logaritmi osservando che $m(\frac{CA}{AD}) = AD - AC = CD$:

$$\mathrm{kl}\,(AB) - \mathrm{kl}\,(AC) \geq CD\,.$$

Se $\delta\gamma = \mathrm{kl}\,(AC)$ e $\gamma\beta = \mathrm{kl}\,(AB)$ e $FA = AD\sec\beta$, $GA = AD\sec\alpha$, (Figura 4.2) Keplero afferma che

$$\frac{\sqrt{GA \cdot FA}}{AD} \geq \frac{FA}{AD} \geq \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \geq \frac{GA}{AD}\,.$$

A tal scopo, egli applica la Prop. XXV per concludere che

$$\frac{DA}{AB} > \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$$

e poiché $\frac{\sqrt{FA \cdot GA}}{AD} \geq \frac{FA}{AD} = \frac{DA}{AB}$, segue la prima delle disuguaglianze proposte. Allo stesso modo, si ragiona a partire dalla Prop. XXV per mostrare la seconda disuguaglianza.

Testo 4.6 (Keplero**,** Chiliades Logarithmorum**)** (pp. 339-340 di [2]). Originale 4.12.

Proposizione XXVII. Se i numeri si succedono uno dopo l'altro secondo l'ordine naturale, due successivi differendo di un'unità, si associno a ciascuno i

vero bini quicunque, deinceps ordinati, tamquam termini proportionis alicujus: erit hujus proportionis mensura ad mensuram proportionis inter duos maximos chiliadis in proportione majore quidem, quam quantam habet maximus ipse 1000 ad majorem ex terminis susceptis, minore vero, quam quantam habet idem 1000 ad minorem ex susceptis, minore etiam, quam quantam habet 1000 ad medium proportionale inter susceptos.

[36] Differentia binorum logarithmorum, qui sunt adscripti ad numeros deinceps, est ad eorundem numerorum differentiam in proportione majori quidem, quam est 1000 ad numerorum majorem, minore vero, quam idem 1000 est ad numerorum minorem.

logaritmi, indici o misure dei rapporti che quei numeri assoluti ed interi hanno con il più grande di loro, 1000; gli incrementi o differenze di questi logaritmi stanno al logaritmo dell'elemento minimo delle proporzioni come le secanti degli archi ai quali competono come coseni le coppie di numeri assoluti stanno al numero massimo ovvero al raggio del cerchio, dimodoché, considerata la differenza tra i logaritmi di due numeri, dalle rispettive secanti la minore formi un rapporto minore con il raggio di quello tra la differenza proposta con la prima di tutte, e la maggiore formi un rapporto maggiore e similmente anche con il medio proporzionale tra le secanti.

Nello schema della prop. 21. si prendano le differenze uguali DC e CB dei numeri assoluti DA, CA, BA, il più grande dei quali sia AD. E poiché DC e CB sono uguali, il rapporto tra i termini minori BA ed AC è maggiore di quello tra i termini maggiori CA ed AD (prop. 13. coroll.). Dunque la misura del rapporto tra BA ed AC supera quella del rapporto tra CA ed AD, cioè la differenza dei logaritmi corrispondenti agli stessi numeri assoluti CA e BA è maggiore del primo logaritmo rappresentato attraverso CD. Sia $\delta\gamma$ il logaritmo proprio di CA e $\gamma\beta$, dalla stessa parte del segmento, sia il logaritmo di BA ed a CA corrisponda poi la secante GA ed a BA la secante FA: dico che il rapporto tra $\beta\gamma$ e $\gamma\delta$ è maggiore di quello tra GA ed AD ma minore sia del rapporto tra FA ed AD che del medio proporzionale tra FA ed GA. Infatti (prop. 25) il rapporto tra DA ed AB è maggiore di quello tra $\beta\gamma$ e $\gamma\delta$, anche DA è maggiore del medio tra BA ed AD ma il rapporto tra FA ed AD è uguale a quello tra DA ed AB poiché DA è medio proporzionale tra BA ed AF, così pure il rapporto del medio geometrico di FA e GA con BA è uguale al rapporto[37] *tra DA ed il medio geometrico tra DA ed AB. Dunque il rapporto tra FA ed AD è anche maggiore di quello tra $\beta\gamma$ e $\gamma\delta$. Così (per la medesima ragione) il rapporto tra DA ed AC ed anche quello tra GA ed AD sono minori di quello tra $\beta\gamma$ e $\gamma\delta$.*

Keplero chiude l'esame della struttura dei logaritmi con tre proposizioni che affermano l'irrazionalità dei logaritmi ed il fatto che numeri maggiori del *sinus totus* hanno logaritmi negativi (Proposizioni XXVIII-XXX). Come Nepero, anche Keplero si serve delle disuguaglianze mostrate nelle Proposizioni XXIII e XXVII per trovare relazioni approssimate atte a costruire le tavole. Nel *Supplementum*, Keplero aggiungerà molti esempi esplicativi nello stile di Nepero e Briggs e renderà loro il giusto omaggio che era mancato nelle *Chiliades*. Le opere di Keplero sui logaritmi non sono molto interessanti, soprattutto se confrontate con la sua produzione in campo astronomico. Tuttavia esse non solo contribuirono alla diffusione dei logaritmi in Germania, ma esercitarono una certa influenza nel modo di definire i logaritmi che si troveranno in autori posteriori.

[37] In realtà, mi pare che la proporzione si legga $\sqrt{FA \cdot GA} : AD = AD : \sqrt{AB \cdot AC}$.

4.2 Cavalieri ed i logaritmi in Italia

La diffusione dei logaritmi in Italia avvenne ad opera di Bonaventura Cavalieri (1598-1647) appartenente all'ordine dei Gesuati.[38] Egli era stato allievo di Galileo che lo aveva raccomandato per la cattedra di Matematica all'università di Bologna, che tenne dal 1629 fino alla morte. Il nome di Cavalieri è legato alla sua opera più celebre, la *Geometria Indivisibilibus Continuorum* del 1635 dove gettò le basi del calcolo integrale moderno. Dei logaritmi Cavalieri si occupò in due opere, il *Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta, ac regulae demonstrantur, astronomiaeque fundamenta supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducuntur* del 1632 e la *Centuria di varii problemi per dimostrare l'vso, e la facilità de' logaritmi nella gnomica, astronomia, geografia, altimetria, pianimetria, stereometria, & aritmetica prattica* del 1639. Seguendo l'esempio di Nepero, nel *Directorium* Cavalieri intende porre i logaritmi al servizio dell'astronomia anche se l'attenzione principale è per la trigonometria sferica mentre i logaritmi figurano in quanto utile strumento di calcolo. Nell'opera, scritta su sollecitazione di amici e per ovviare alla difficoltà di reperire in Italia le opere di Nepero e Briggs, Cavalieri dimostra di possedere appieno la teoria. Possiamo osservare che Cavalieri, come Keplero, fosse alle prese con la misura di un rapporto quando le grandezze coinvolte non sono una il multiplo dell'altra: mentre definire $6/2$ era chiaro, associare un numero a $7/3$ appariva più spinoso, anche per la confusione esistente tra valore esatto ed approssimato di un numero. La via intrapresa da Cavalieri per associare in ogni caso un valore numerico ad un rapporto è originale perché poggia proprio sulla definizione di logaritmo. L'osservazione di partenza è che, presa una progressione geometrica come $8, 4, 2, 1$, dall'uguaglianza dei rapporti

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

e dalla definizione di logaritmo segue che

$$\log 8 - \log 4 = \log 4 - \log 2 = \log 2 - \log 1 = \text{costante}$$

e si può dunque prendere come valore comune ai rapporti che formano la progressione geometrica questo valore costante. Questo precedimento si può ripetere anche per la progressione

$$\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = ...$$

ed assumere come misura del rapporto $7/3$ il numero

$$\log 7 - \log 3 = \log 14 - \log 6 = \text{costante}\,.$$

[38] Non è un errore di stampa. L'ordine dei Gesuati era un movimento di impegno laicale fondato intorno al 1360 dal banchiere senese Giovanni Colombini che, convertitosi, fondò questo movimento che ebbe come carisma la cura dei malati e dei poveri, predicando il Vangelo e seguendo uno stile di vita semplice. Ebbero il periodo di maggior sviluppo nel '400 per poi declinare lentamente, fino ad essere soppressi come ordine da papa Clemente IX, nel 1668.

Il *Directorium* contiene due tavole logaritmiche, nella prima delle quali egli riporta i logaritmi del seno di un arco, della tangente, della secante e del seno-verso[39] *sinus verso*, pari a $(1 - \cos\alpha)$, attribuendo nomi diversi ai logaritmi a seconda della funzione trigonometrica cui si riferiscono. Il nome logaritmo è a attribuito a quello del seno di un arco mentre il logaritmo della tangente è detto *mesologaritmo* [40] e quello del seno-verso, *versilogaritmo*.

La *Centuria* è, fedelmente al titolo, un centone di problemi di vario genere che richiedono l'applicazione dei logaritmi. I problemi, molto numerosi, sono ripetitivi e l'opera non meriterebbe grande attenzione se non fosse per un problema, il n° 92, che propone di trovare $\log(a \pm b)$, dati due numeri a e $b < a$ di cui sono noti i logaritmi, senza fare intervenire $a \pm b$. In termini moderni, la

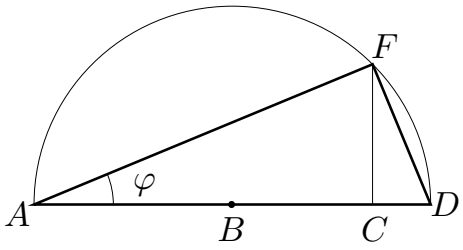

Figura 4.4: I logaritmi di addizione introdotti da Cavalieri.

regola di Cavalieri per $\log(a + b)$ si traduce definendo un angolo ausiliare ψ tale che [3]

$$\sin\psi := \frac{b}{a}$$

ed osservando che, per le formule di bisezione, si ha

$$\log\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)\right] = \log\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)}{2}} = \log\sqrt{\frac{1 + \sin\psi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\log(1 + \sin\psi) - \log 2\right]$$

da cui, ricordando la definizione di ψ, otteniamo

$$\log(a + b) = \log a + \log 2 + 2\log\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)\right].$$

Similmente, introducendo un altro angolo ausiliare φ tale che

$$\sin\varphi := \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

poiché

$$\log\cos 2\varphi = \log(1 - 2\sin^2\varphi) = \log\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \log(a - b) - \log a$$

[39] È la freccia già incontrata in Keplero.
[40] Termine già usato da Keplero.

segue la formula cercata

$$\log(a-b) = \log a + \log\cos 2\varphi\,.$$

Per quest'ultima formula, seguiamo l'argomento geometrico originale di Cavalieri che poggia sulla costruzione qui rappresentata [4] (Figura 4.4).

Costruito un semicerchio di raggio $BD = a$ si prenda il segmento $CD = b$ cosicché per il primo teorema di Euclide nel triangolo rettangolo ADF si ha $FD^2 = DC \times AD = 2ab$ grazie a cui è possibile risalire all'angolo $\widehat{DAF} = \varphi$ il cui seno è proprio $\sin\varphi = \sqrt{b/2a}$. D'altra parte $\widehat{FBD} = 2\varphi$ e dal triangolo rettangolo CBF si ha $BC = BF\cos 2\varphi$ ovvero

$$a - b = a\cos 2\varphi$$

da cui, passando ai logaritmi, segue la tesi. I logaritmi così introdotti da Cavalieri saranno ritrovati molto più tardi, nel 1802, da Giuseppe Zecchini Leonelli (1776-1847) ed infine da Carl Friederich Gauss (1777-1855) nel 1812 [5] da cui prenderanno il nome di logaritmi gaussiani, alternativo a quello di logaritmi di addizione o sottrazione.

4.3 Juan Caramuel

Chiudiamo questo capitolo sulla transizione tra l'età della scoperta dei logaritmi ed il periodo in cui i logaritmi si accostano alla geometria attraverso la quadratura dell'iperbole, con un cenno al benedettino spagnolo Juan Caramuel y Lobkowitz (1606-1682) nato in Spagna e morto a Vigevano, città della quale fu vescovo. Caramuel fu un grande erudito, versato in varie discipline, dalla matematica alle lingue ed all'architettura. Per la matematica, egli è ricordato per aver esplorato la possibilità ed i vantaggi di notazioni posizionali in base diversa da 10. La sua opera matematica principale sono i due volumi della *Mathesis Biceps Vetus et Nova*, pubblicati nel 1670 a Campagna (Salerno), città della quale fu pure vescovo. Affascinato dai logaritmi, al punto da scrivere che *Logarithmica est Musa Mathematici Parnassi decima* (p.798 di [6]), egli si pose il problema di sintetizzare i logaritmi di Briggs con quelli di Nepero proponendo un sistema alternativo—che indichiamo come $\mathrm{cl}\,x$—del quale costruì anche una tavola per i primi mille numeri interi. Dalle sue tabelle si ricava che $\mathrm{cl}10^{10} = 0$, $\mathrm{cl}10^{9} = 1$ e che, in generale

$$\mathrm{cl}10^x = 10 - x\,.$$

In effetti, un confronto più dettagliato delle tavole di Caramuel rivela che, per ogni numero a positivo

$$\mathrm{cl}a = 10 - \log_{10} a$$

cosicché va perduta la proprietà dei logaritmi di Briggs di trasformare prodotti in somme in quanto

$$\mathrm{cl}(ab) = \mathrm{cl}(a) + \mathrm{cl}(b) - 10\,.$$

4.4 Testi originali

Testo 4.7 *[*Kepler*,* Chiliades Logarithmorum.*]* pp. 331-332 di [2]. Quaeratur igitur medium proportionale inter 1000 et 999. Id secabit proportionem terminorum in aequales duas partes (prop. 1); quaeratur secundo inter hanc inventam mediam et 1000 alia media proportionalis, ut ita prior media intelligatur circumdata duabus medii proportionalibus aliis, quarum tamen unum solum versus terminum 1000 investigatione opus est. Per has igitur tres medias (ut est in ax. 2) secabitur proportio in partes 4. Sic proportionalis tertia inter prius inventam et 1000 secabit in partes 8, quarta in 16 et sic consequenter (post. 2) in 32, 64, 128, 256, 512,1024, quod fit actu decimo. Hic itaque numero 1024 certo constituit particulas proportionis 1000 ad 999 minores supra investigatio excessu, quia proportio capit hujus excessus minus quam 1000, hic vero constituuntur 1024 particulae. Hic igitur particula 1024ta capiat loco mensurae differentiam termini sui minoris seu mediae proportionalis decimae a termino majore 1000 per postulatum 3.

Pergimus ad similem sectionem proportionis inter 1000 et 998. Haec igitur est incommensurabilis priori 1000 et 999; nam per prop. 11. proportio 999 ad 998 est incommensurabilis proportioni 1000 ad 999, qui termini bini differunt unitate aequaliter, sed proportio 1000 ad 998 componitur ex illis inter se incommensurabilibus (ax. 1). Cum vero totum in incommensurabilia secatur, ipsum singulis est incommensurabile (Eucl. X. 17). Est vero haec proportio 1000 ad 998 major quam dupla prioris 1000 ad 999 excessu incommensurabili, ut supra allegatione praemissae 14. indicatum. Pars igitur ejus 1024ta plus quam duplo major est minimo elemento prioris; bisecetur igitur, ut totius fiant partes 1024 per inquisitionem undecimae proportionalis. Tunc sane elementum hoc ejus erit proxime aequale elemento minimo prioris, majus tamen illo etiamnum et illi incommensurabile per 16. praemissam.

Si ergo illud accepit mensuram differentiam suorum terminorum, hoc jam elementum proportionis, quippe majus illo, mensuram habebit majorem differentia suorum terminorum (prop 12.) Ac proinde, si prioris elementi terminorum differentia multiplicetur 1024^{les} pro mensura proportionis inter 1000 et 999, tunc posterioris elementi terminorum differentia, multiplicata 2048^{les}, adhuc minor erit mensura proportionis inter 1000 et 998.

Veruntamen si attendamus ad quantitatem hujus defectus, illa est omnino subtilissima et nulla calculi diligentia observabilis. Quia enim proportio inter 1000 et 999 secta est in particulas plus quam 1000, et elementi tam parvi mensura constituta est differentia terminorum 1000000 et 999999, sc. 1, et minor adhuc certe proportio proxima inter 999999 et 999998, major priori (prop. 12), mensuram habebit, quae excedat terminorum differentiam primam vix millies millesima sui, ac proinde composita proportio 1000000 ad 999998 major est dupla prioris vix milles millesima prioris particula. At jam elementum secundae proportionis inter 1000 et 998, in superioribus constitutum, nequaquam est majus duplo prioris proportionis elemento, sed ob id ipsum factae sunt partes non 1024, sed 2048, ut esset pars ista proxime aequalis priori.

Testo 4.8 [KEPLERO, Chiliades Logarithmorum] (p.334 di [2]). Sit A centrum circuli, AD semidiameter, DI, DE arcus eorumque sinus IC, EB, sinus vero complementorum sint CA, BA, sagittae CD, BD. Sit autem ut AD ad AC sic AC ad AB. Amplius sint eorundem arcuum secantes AG, AF, per terminos I, E in tangentes DG, DF educti, et ipsi AG aequalis abscindatur ab AF, quae sit AK; denique sit CD mensura proportionis AC ad AD, ut minimi elementi arbitrarii. Dico, mensuram proportionis AB ad AD, h.e. logarithmum ipsius BA majorem esse quam BD, minorem vero quam EF. Quod major sit quam BD, demonstratum est supra prop. 12; quod vero minores sint mensurae proportionum harum IG et EF, sic probatur. Primum de CA: cum ipsa CD sagitta, utpote in minimo proportionum elemento, ponatur esse logarithmus ipsius CA, CD sane est minor quam IG. Ut enim CA ad AD sic IA, h.e. DA ad AG, quia DG, CI parallelae. Est igitur AD media proportionalis inter CA, AG; ut igitur CA ad AD sic differentia CA, AD (h.e. CD) ad differentiam sequentem AG et DA (h.e. IG). Sed CA est minor quam AD, ergo et CD est minor quam IG. Sed CD est logarithmus ipsius CA, sinus complementi arcus ID, et IG est excessus secantis ejusdem arcus, ergo logarithmus minor est hoc excessu.

Transeamus ad BA, cujus logarithmus major est quam BD, demonstrandum est, illum non esse tanto majorem ipsa BD, quin interim maneat minor ipso EF. Rursum igitur AD est media proportionalis inter BA et AF, et quia posita est ut BA ad AC sic AC ad AD, quare etiam ut EA ad AG vel AK sic AK vel GA ad AF. Sunt igitur continue proportionales istae AB, AC, AD, AK vel AG et AF. In eadem igitur proportione sunt etiam BC, CD, IG. Minor vero est CD quam IG, ut prius ostensum, minor igitur erit etiam IG vel EK quam KF, tota igitur EF major est quam dupla ipsius IG, multo magis igitur EF major erit quam dupla ipsius CD minoris. At proportionis inter BA et AD, ut quae dupla est ipsius BA ad AC (prop. 1), mensura seu logarithmus ipsius BA est praecise duplus ipsius CD (postul. 1): minor est ergo logarithmus ipsius BA excessu secantis EF, erat autem major sagitta BD: patet ergo propositum.

Testo 4.9 [KEPLERO, Chiliades Logarithmorum] (pp. 334-335 di [2])

Sit enim primo sinus complementi longissimus aut longissima mediarum proportionalium, quibus aliqua proportio dividitur in partes arbitrario numero multas, sic ut ejus, v.c. AC, residuum CD seu sagitta arcus ID sit ipsissima mensura arbitraria proportionis CD, logarithmus igitur ipsius CA est CD. At IG est major ipsa CD, juncti igitur excessus secantis IG et sagitta CD plus efficiunt, quam duplum ipsius CD.

Sit deinde alia quaecunque minor linea proportionis continuae, ut AB, et ducta ex B perpendiculari in circumferentiam E connexisque A, E et D, G continuatis in F, sit EF excessus secantis et BD sagitta ejusdem arcus ED. Dico junctos EF et BD facere plus quam duplum logarithmi ad BA apponendi seu mensurae ipsius BA, AD proportionis.

Quia est ut BA ad AD sic DA ad AF et CA media proportionalis inter BA, AD, ut igitur BA ad AC sic GA ad AF, quare (Eucl. V. 25) BA, AF junctae sunt longiores quam junctis CA, AG, sive quia ut BA ad AD sic DA ad AF,

quare BA, AF junctae superant DA, AD duas medias. Ut vero BA ad AC sic etiam BC ad CD et IG ad KF (prop. 2), quare etiam BC et KF junctae superant CD et IG junctas. At CD, IG plus sunt quam duplum ipsius CD, ergo BC, KF junctae multo plus sunt quam duplum ipsius CD, et sic BD, EF plus sunt quam quadruplum ipsius CD. Sed duplum ipsius CD est logarithmus seu mensura proportionis BA ad AD (postul. 1), ergo BD, EF junctae plus sunt quam duplum logarithmi ipsius BA seu mensurae proportionis BA, AD.

Testo 4.10 *[*Kepler*, Chiliades Logarithmorum]*(pp. 335-336 di [2]). Sint 3 quantitates AD, AC, AH, aequalibus excessibus DC, CH, sit autem mensura proportionis $DA : AC$ linea $\delta\gamma$, mensura vero proportionis $CA : AH$ linea $\gamma\eta$. Dico proportionem ipsius $\delta\gamma$ ad $\gamma\eta$ majorem quidem esse proportione ipsius CA ad AD, minorem vero proportione ipsius HA ad AC. Fiat enim ut DA ad AC sic CA ad AB; ut igitur DA ad AC sic DC ad CB (Prop. 2), sed longior est DA quam AC, longior igitur DC quam CB, longior igitur et CH quam CB, differentia BH. Cum igitur aequales sint proportiones DA ad AC et CA ad AB (prop. 1), mensura vero ipsius DA ad AC sit linea $\delta\gamma$, habebit et CA ad AB mensuram aequalem ipsi $\delta\gamma$ (postul. 1). Et cum proportio CA ad AH sit composita ex proportione CA ad AB et proportione BA ad AH, major igitur erit proportio CA ad AH quam proportio DA ad AC, aequalis ipsi CA ad AB, major igitur etiam mensura ejus $\gamma\eta$ quam $\gamma\delta$. Abscindatur a $\gamma\eta$ aequalis ipsi $\gamma\delta$, quae sit $\gamma\beta$, residua igitur $\beta\eta$ mensura erit residuae proportionis BA ad AH. Erit autem proportio $\gamma\beta$ ad CB minor quam $\beta\eta$ ad BH (prop. 12. coroll.), id est major est $\beta\eta$ respectu $\beta\gamma$ vel $\gamma\delta$, quam HB respectu BC. Compositis igitur terminis, illic $\gamma\beta$ et $\beta\eta$ in $\gamma\eta$, hic CB et BH in CH, major erit $\gamma\eta$ respectu $\gamma\beta$ vel ejus aequalis $\gamma\delta$, quam CH respectu CB. Major igitur est proportio inter $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ quam inter BC et CH, id est CD. Ut vero BC ad CD sic CA ad AD (prop. 2), major igitur proportio inter $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ quam inter CA et AD. Sed $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ sunt mensurae, illa quidem proportionis inter DA et AC majores, haec vero proportionis inter CA et AH minores. Ergo proportio mensurarum major est proportione terminorum minorum.

Rursum fiat ut HA ad AC sic CA ad AL: ut igitur HA ad AC sic HC ad CL (prop. 2). Sed brevior est HA quam AC, brevior igitur HC, h.e. DC quam CL, differentia DL. Cum igitur aequales sint proportiones HA ad AC et CA ad AL, mensura vero ipsius HA ad AC sit linea $\eta\gamma$, habebit et CA ad AL mensuram aequalem ipsi $\eta\gamma$ (postul. 1); esto $\gamma\lambda$. Minor vero erat proportionis CA ad AD mensura, puta $\gamma\delta$, minor igitur est $\gamma\delta$ quam $\gamma\lambda$. Excessus igitur $\delta\lambda$ erit mensura proportionis inter DA et AL, appositae ad proportionem inter CA et AD. Et quia termini DA, AL sunt longiores quam CA, AD, quare (prop. 12. coroll.) minor est $\delta\lambda$ respectu $\lambda\gamma$ vel $\gamma\eta$, quam DL respectu LC, major igitur residua $\gamma\delta$ respectu $\gamma\lambda$ vel $\gamma\eta$, quam CD vel HC respectu CL. Et quia proportio minuitur aucto minori termino (ax. 1), minor igitur est proportio inter $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$, mensuras proportionum, quarum unam facit major terminus cum medio, alteram medius cum minimo, quam inter terminos minores.

Testo 4.11 *[*Keplero*, Chiliades Logarithmorum]*(pp. 336-337 di [2]) *Sint enim termini extremi, ut prius AH, AD media duo, arithmeticum AC, geomet-*

ricum AV; sit proportionis DA ad AC mensura $\delta\gamma$, vel aequalis ipsi DC vel etiam major (postul. 3), et applicetur ipsi $\delta\gamma$ alia $\gamma\upsilon$, quae sit mensura justa proportionis CA ad AV, ut sic tota $\delta\upsilon$ mensuret proportionem DA ad AV; residuae igitur proportionis VA ad AH mensura erit priori $\delta\upsilon$ aequalis (postul. 1. et prop. 1); sit ea $\upsilon\eta$. Quia igitur $\delta\gamma$ est vel aequalis vel major quam DC, sequentis $\gamma\upsilon$ proportio ad CV erit major quam proportio ipsius $\gamma\delta$ ad CD, et tertiae $\upsilon\eta$ proportio ad VH rursum erit major quam secundae $\gamma\upsilon$ ad secundam CV, et per compositionem totius $\eta\delta$ ad totam HD major erit proportio, quam partis $\upsilon\gamma$ ad partem VC. Permutatim igitur major erit proportio totius $\eta\delta$, termini majoris in priori, ad $\upsilon\gamma$ terminem majorem in posteriori, quam totius HD, termini minoris in priori proportione ad VC, terminum minorem in posteriori. Sed tota $\eta\delta$ constat ex terminis $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$, quorum differentia $\gamma\upsilon$; similiter CH constat ex terminis DV et VH quorum differentia VC, major igitur erit proportio terminorum $\eta\gamma$, $\gamma\delta$ junctorum ad suam differentiam $\gamma\upsilon$, quam terminorum DV, VH ad differentiam VC. At vero aucta proportione summae terminorum ad suam differentiam, minuitur ipsorum inter se terminorum seorsim positorum proportio, per prop. 13. coroll. et communem notitiam, quod proportionalium eadem sit ratio. Minor est itaque proportio inter $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$, quam inter DV et VH. Sed proportio DV ad VH est aequalis proportioni DA ad AV (prop. 2), haec vero DA ad AV proportio est dimidia ipsius DA ad AH (prop. 1), minor est ergo proportio inter $\eta\gamma$, $\gamma\delta$, mensuras proportionum HA ad AC et CA ad AD, quam dimidia inter terminos HA, AD.

Testo 4.12 [KEPLERO, Chiliades Logarithmorum](pp. 339-340 di [2]). *Propositio XXVII.* Si numeri succedant invicem ordine naturali, bini deinceps differentes unitate, ad singulos vero apponantur logarithmi, indices seu mensurae proportionum, quas constituunt absoluti illi et rotundi numeri cum eorum maximo 1000, incrementa seu differentiae horum logarithmorum se habent ad logarithmum elementi minimi proportionum, sicut secantes ipsi toti arcuum, quorum complementis absoluti bini numeri ut sinus competunt, sese habent ad numerum maximum seu radium circuli, sic ut ex duobus secantibus duorum numerorum, inter quorum logarithmos differentia proponitur, minor quidem minorem constituat proportionem cum radio, quam differentia proposita cum omnium prima, major majorem etiam medium proportionale inter secantes majorem itidem.

In schemate prop. 21. sint aequales DC, CB, differentiae numerorum absolutorum DA, CA, BA, quorum maximus AD. Et quia DC, CB aequales, major igitur est proportio BA et AC terminorum minorum, minor CA et AD majorum (prop. 13. coroll.). Major igitur est mensura proportionis BA ad AC quam proportionis CA ad AD, h.e. differentia logarithmorum, ipsis CA et BA absolutis respondentium, est major primo logarithmo per CD repraesentato. Sit $\delta\gamma$ logarithmus ipsius CA, et $\gamma\beta$ in easdem lineae partes sit logarithmus ipsius BA et respondeat ipsi CA secans GA et ipsi BA secans FA: dico, proportionem $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$ majorem esse quam proportionem GA ad AD, minorem vero quam FA ad AD, minorem etiam quam medium proportionale inter FA et GA. Nam (prop. 25) major est proportio DA ad AB quam $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$, major etiam DA ad medium inter BA et AD; sed FA ad AD proportio aequalis est proportioni

DA ad AB quia DA est medium proportionale inter BA et AF, sic etiam medii geometrici inter FA et GA ad BA proportio aequalis est proportioni DA ad medium geometricum inter DA et AB. Major igitur etiam FA ad AD, quam $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$. Sic (per eandem) minor est DA ad AC et sic etiam GA ad AD quam $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$.

Bibliografia

[1] C. Naux: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler. Tome I. La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables.* Blanchard, Parigi, (1966).

[2] J. Kepler: *Johannis Kepleri astronomi Opera Omnia*, Vol VII, A cura di Ch. Frisch. Heyder & Zimmer, Francoforte, (1868).

[3] F. Palladino, S. Siroli: *Angoli Linee Stelle. Origini e Sviluppo della Trigonometria.* Aracne, Roma, (2004).

[4] C. Naux: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler. Tome II. La promotion des logarithmes au rang de valeur analytique.* Blanchard, Parigi, (1971).

[5] C.F. Gauss: Tafel zur bequemern berechnung des logarithmen der summe oder differenz zweier grössen, welche selbst nur durch ihre logarithmen gegeben sind. , *Monatliche Correspondenz.* (1812), in C.F. Gauss *Gesammelte Werke* vol III, pp.244-246. Kaestner, Göttingen (1876).

[6] J. Caramuel y Lobkowitz: *Mathesis Biceps: Vetus et Nova*, Campagna (Salerno) (1670).

Capitolo 5

I logaritmi e la geometria

Il legame tra i logaritmi naturali e l'area sottesa dall'iperbole è condensato nel noto risultato di calcolo integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(x_1) - \ln(x_0), \qquad (x_0, x_1 > 0\,. \tag{5.1}$$

In questo capitolo esaminiamo la scoperta del legame tra logaritmi e quadratura dell'iperbole considerando l'opera di tre matematici del XVII secolo: i gesuiti Gregorio di S. Vincenzo (1584-1667) ed Alfonso Antonio De Sarasa (1618-1667) e Christiaan Huygens (1629-1695). Procederemo ad illustrare lo studio della curva logaritmica negli scritti di Evangelista Torricelli e di Huygens.

5.1 Le proprietà logaritmiche dell'iperbole

Lo studio delle sezioni coniche è uno dei rami della geometria più antichi, tanto che già nel III secolo avanti Cristo Apollonio di Perga (262 a.C.- 190 a.C.) compose un trattato esauriente sull'argomento. Con la riscoperta dei classici matematici dell'antica Grecia, lo studio delle sezioni coniche riprende slancio nel '600 ed un trattato sulle coniche—e su molto altro—particolarmente importante è l'*Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* pubblicato ad Anversa nel 1647 e scritto dal gesuita belga Gregorio di S. Vincenzo. L'*Opus Geometricum* è la sola opera a stampa di questo allievo di Clavius a Roma che si trasferì alla volta di Anversa nel 1612, anno della morte del maestro. Grande ammiratore di Galileo, Gregorio ricoprì incarichi di insegnamento presso i collegi gesuiti ad Anversa tra il 1617 ed il 1620 ed a Lovanio, tra il 1621 ed il 1625. Dopo un soggiorno a Praga che occupò il periodo tra il 1628 ed il 1631, Gregorio si stabilì definitivamente a Gand fino alla morte. Anche se l'*Opus Geometricum* venne pubblicato nel 1647, studi basati su manoscritti conservati a Bruxelles hanno permesso di concludere che buona parte dell'opera di Gregorio venne scritta prima del 1625. Si tratta di un'osservazione importante per valutare appieno l'originalità della sua opera, visto che a quella

data non erano state ancora pubblicate né la *Geometria indivisibilibus* di CAVALIERI, né la *Geometrie* di DESCARTES, stampate rispettivamente nel 1635 e nel 1637. Il trattato di GREGORIO attirò subito l'attenzione degli studiosi per via di quel riferimento alla quadratura del cerchio, problema aperto da secoli, che GREGORIO sosteneva aver finalmente risolto. Il sogno di GREGORIO svanì presto: subito dopo la pubblicazione dell'*Opus Geometricum*, DESCARTES criticò la soluzione in una lettera indirizzata a padre Marin MERSENNE (1588-1648), il monaco francese che intratteneva corrispondenza con i maggiori filosofi e studiosi dell'epoca riuscendo ad operare come divulgatore delle scoperte in tutta la comunità scientifica. Altri matematici come AUZOUT e ROBERVAL fecero pervenire a MERSENNE le loro critiche e riserve sulla quadratura di GREGORIO. Poco prima di morire, nel 1648 MERSENNE pubblicò un opuscolo dal titolo *Réflexiones Physico-mathématicae* in cui, dichiarando di non riuscire a trovare errori negli argomenti di GREGORIO, proponeva un problema che ai suoi occhi risultava difficile quanto la quadratura del cerchio:

Date tre grandezze qualsiasi, razionali od irrazionali e dati due dei loro logaritmi, trovare il logaritmo della terza grandezza in modo geometrico.[1] (p. 3 di [1])

Ci occuperemo diffusamente tra poco del problema di MERSENNE, non prima di aver descritto il contenuto dell'*Opus Geometricum* e la sua rilevanza per la storia dei logaritmi. Anzitutto, si tratta di un libro mastodontico di circa 1400 pagine *in folio*. L'errore compiuto nella quadratura del cerchio, evidenziato con chiarezza da HUYGENS nel 1651 ha contribuito ad alimentare la cattiva fama del testo che, tra l'altro, non ha avuto altre edizioni dopo quella del 1647. Questo stato di cose sorprende perché fu lo stesso HUYGENS a raccomandare la lettura dell'*Opus Geometricum* al giovane LEIBNIZ in una lettera del 1673, lodando le numerose e brillanti idee presenti nel testo e ponendo i risultati di GREGORIO a livello del metodo per trovare i massimi ed i minimi di FERMAT e della geometria analitica di DESCARTES. In effetti, l'*Opus Geometricum* va ricordato almeno per due risultati importanti. Il secondo dei dieci libri di cui si compone l'opera è interamente dedicato alle progressioni geometriche e la prima parte di questo libro è occupata dalla soluzione del celebre paradosso di ZENONE su Achille e la tartatuga. GREGORIO fu il primo a studiare il paradosso utilizzando una serie geometrica, riuscendo a calcolare la distanza che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga ed il tempo necessario perché ciò accada. Il suo processo di divisione di segmenti *ad infinitum*, si discosta dai procedimenti di ARCHIMEDE e consente di parlare propriamente per la prima volta di una serie geometrica, formata da infiniti termini [2].

Per i nostri scopi è però più interessante il libro VI dell'*Opus Geometricum*, intitolato *De Hyperbola* che contiene la proposizione 109 (Fig. 5.1)

Proposizione CIX *Siano AB ed AC gli asintoti di un'iperbole (equilatera) DEF. Si suddivida AC in modo che AG, AH, AI, AK ed AC formino una progressione geometrica. Si traccino i segmenti DG, EH, LI, MK ed FC paralleli (aequidis-*

[1] Datis tribus quibuscumque magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datisque duarum ex illis Logarithmis, tertiae Logarithmum Geometrice invenire.

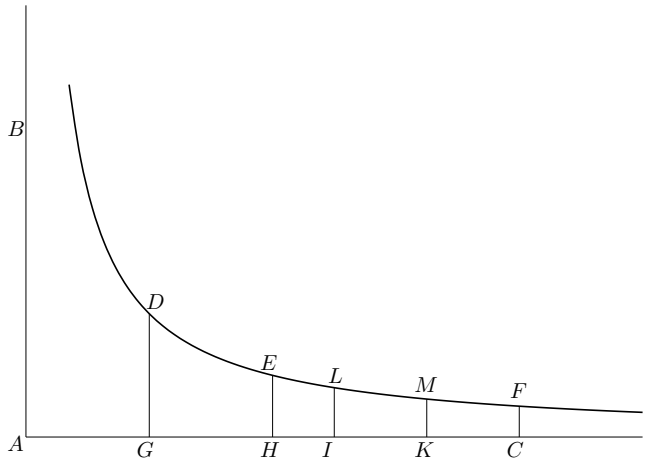

Figura 5.1: Lo schema per la dimostrazione della Prop. CIX dell'*Opus Geometricum* di Gregorio di S. Vincenzo.

tantes) all'asintoto AB. I trapezi curvilinei (segmenta) DH, EI, LK ed MC sono equivalenti.[2] (p.405 di [3])

Si tratta di una proprietà logaritmica in quanto, dal fatto che

$$\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AK} = \frac{AK}{AC} = ...$$

segue che le le aree DGEH, DGIL, DGMK, DGFC,...ecc. formano una progressione aritmetica.

Tra i risultati utilizzati da Gregorio nella dimostrazione richiamiamo l'equivalenza dei rettangoli aventi un vertice nel centro dell'iperbole, quello opposto sull'iperbole e due lati lungo gli asintoti, proprietà già nota ad Apollonio. Più articolato è il teorema che si trova nel Libro II *De Progressionibus*, alla proposizione 116.

Siano date due quantità AB e CD e si divida AB in E e G in modo tale che AE non sia minore della metà di AB ed EG non sia minore della metà di EB; si divida allo stesso modo CD nei punti F ed H e siano AE, EG, CF ed FH proporzionali e ciò sia sempre possibile. Dico che l'intera AB sta all'intera CD come AE sta a CF.[3] (*Opus Geometricum, Liber II, p.119*)[4]

[2]Sint AB, AC asymptoti hyperbolae DEF: divisaque AC, ut AG, AH, AI, AK, AC continue sint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipsi AB aequidistantes. Dico HD, IE, KL, CM segmenta esse aequalia.

[3]Sint duae quantitates AB, CD; sitque AB divisa in E & G, ita ut AE, sit non minor dimidio AB & EG non minor dimidio EB; eodem modo divisa sit CD in F & H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales: & hoc semper fieri possit. Dico totam AB esse ad totam CD, ut est AE ad CF.

[4]La traduzione in inglese del primo libro e di parte del secondo a cura di Ian Bruce è attualmente disponibile in rete all'indirizzo web http://www.17centurymaths.com/contents/gregoriuscontents.html

In termini moderni [3], assegnate due grandezze positive X ed Y, si considerino le successioni decrescenti x_1, x_2,...x_n ed y_1, y_2,...y_n tali che il rapporto $x_n/y_n = \alpha$. Si supponga (*cfr.* pp. 16-17 di [4]) inoltre che

$$R_n := X - (x_1 + x_2 + ...x_n) > x_{n+1} > \frac{1}{2}[X - (x_1 + x_2 + ...x_n)] = \frac{R_n}{2}$$

e che

$$Y - (y_1 + y_2 + ...y_n) > y_{n+1} > \frac{1}{2}[Y - (y_1 + y_2 + ...y_n)] \ :$$

allora $X/Y = \alpha$. Si tratta, in effetti di un passaggio al limite perché possiamo concludere dalla disuguaglianza $R_n > x_{n+1} > R_n/2$ che

$$R_{n+1} = R_n - x_{n+1} < \frac{R_n}{2}$$

cosicché $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ e dunque

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

e, in modo simile,

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

per cui, siccome $y_n = \alpha x_n$ possiamo concludere che $Y = \alpha X$. Questo argomento, usato nel caso $\alpha = 1$ sarà usato ripetutamente nel corso della proposizione 109 e di quelle collegate. Un altro risultato adoperato da Gregorio è la proprietà che, presa la corda DG congiungente due punti di uno stesso ramo di iperbole equilatera e considerato il diametro relativo, cioè la retta passante per il centro dell'iperbole che biseca DG, esso taglia l'iperbole nel punto E le cui coordinate sono medie geometriche di quelle dei punti assegnati D e G.

Esercizio 5.1 *Dimostrare quest'ultima proprietà.*

Avvicinandoci all'obiettivo di mostrare la proposizione 109, incontriamo le proposizioni 106-108 che affermano, nell'ordine (Figg. 5.2-5.3)

Proposizione CVI *Siano AB ed AC gli asintoti di una iperbole (equilatera) DEG. Sia AE il diametro corrispondente alla corda DG (Fig. 5.2). Tracciati DE ed EG, i segmenti convessi DIE e GLE sono equivalenti.*[5]

Proposizione CVII *Sotto le stesse condizioni, siano DB, EF e GH segmenti paralleli ad uno degli asintoti Fig. 5.2). I segmenti concavi BDFE e GHFE sono equivalenti.*[6]

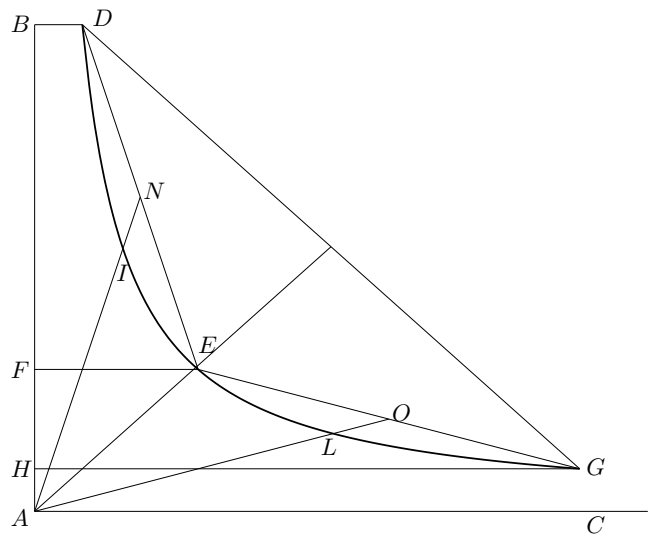

Figura 5.2: Lo schema per la dimostrazione delle Prop. CVI-CVII dell'*Opus Geometricum* di Gregorio di S. Vincenzo.

Proposizione CVIII *Siano AB ed AC gli asintoti di una iperbole equilatera DEF Fig. 5.3). Siano DH, EG, FC segmenti paralleli ad AB ed in progressione geometrica. Allora il segmento DHGE è equivalente al segmento EGCF.*[7]

Le proposizioni 106 e 108 danno in effetti lo stesso risultato che viene riassunto nella proposizione 109. La dimostrazione della proposizione 106 procede per via geometrica. Staccata la corda DG, si considera il diametro ad essa coniugato che interseca l'iperbole in E le cui coordinate, diremmo oggi, sono medie geometriche delle coordinate di D e G. Inoltre, la retta tangente in E all'iperbole è parallela alla corda DG (lo si dimostri per esercizio). Pertanto (Prop. CII), tra tutti i triangoli di base DG e vertice sull'arco di iperbole DG, triangolo DEG ha area massima. Si dividano ora le corde DE ed EG in parti uguali e siano N ed O i rispettivi punti medi. I diametri AN ed AO intersecano l'iperbole in I ed L le cui coordinate sono, rispettivamente, le medie geometriche delle coordinate di D ed E e di E e G. Riprendendo lo stesso argomento di prima, tra tutti i triangoli che hanno base DE (EG) e vertice restante sull'iperbole, il triangolo DIE (ELG) ha area massima. Tali triangoli sono equivalenti (Prop. CIII) e la loro area (Prop. CIV) supera metà di quella del segmento convesso DIE (ELG).[8] A questo punto il procedimento viene ripetuto *ad infinitum* in

[5]Sint AB, AC asymptoti hyperbolae DEG, positaque ad diametrum AE ordinatim DG: ducantur DE, EG. Dico segmenta convexa DIE, GLE aequari.

[6]Iisdem positis: ponantur DB, EF, GH asymptotorum uni aequidistantes: Dico segmenta duo concava $BDFE$, $GHFE$ inter se aequari.

[7]Sint AB, AC asymptoti hyperbolae DEF, & in continua sint analogia DH, EG, FC asymptoto AB aequidistantes. Dico segmentum $DHGE$, aequari segmento $EGCF$.

[8]Per rendersi conto di ciò, si tracci la tangente all'iperbole ad esempio in I, che è parallela a

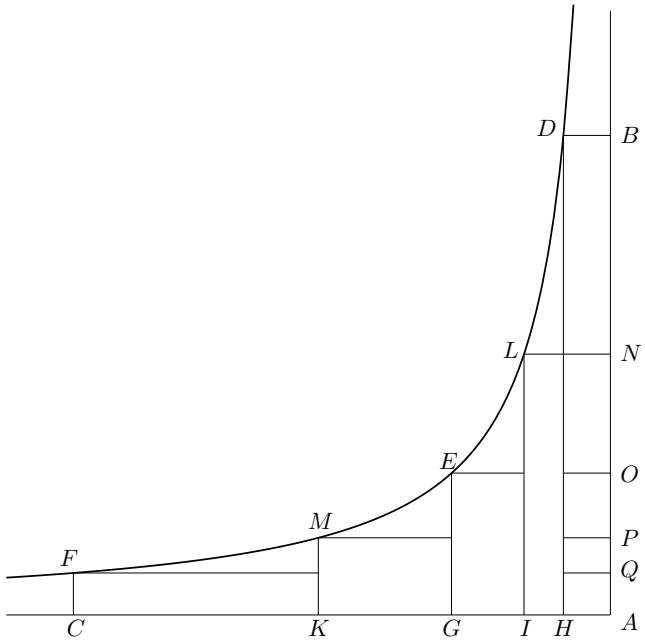

Figura 5.3: Lo schema per la dimostrazione della Prop. CVIII dell'*Opus Geometricum* di Gregorio di S. Vincenzo.

modo che, dalla proposizione 116 del Libro II nel caso $\alpha = 1$ segue l'asserto.

Nella proposizione 108, si costruiscono i segmenti LI ed MK in modo che (Fig. 5.3)

$$\frac{HD}{LI} = \frac{LI}{EG} = \frac{EG}{MK} = \frac{MK}{FC}$$

e dunque, poiché anche le coordinate restanti formeranno una progressione geometrica, per la proprietà fondamentale delle iperboli equilatere, si ha anche

$$\frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AG} = \frac{AG}{AK} = \frac{AK}{AC}. \tag{5.2}$$

Se applichiamo ai primi due termini della proporzione (5.2) la proprietà dello scomporre, concludiamo che

$$\frac{AH}{HI} = \frac{AI}{IG}$$

ma poiché E ed L appartengono all'iperbole equilatera deve essere

$$\frac{AI}{AG} = \frac{EG}{LI}$$

DE e si consideri il rettangolo costruito su ED e limitato da tale tangente che ha area maggiore del segmento convesso DIE e area doppia rispetto al triangolo DIE, da cui segue l'asserto.

e dunque, poiché da (5.2) è anche $\frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AG}$

$$\frac{HI}{IG} = \frac{EG}{LI}$$

che, interpretata nella forma $HI \cdot LI = IG \cdot EG$ dimostra l'equivalenza dei rettangoli di vertici opposti L,H e di quello con vertici opposti E,I. Anche qui il procedimento viene iterato, ottenendo l'equivalenza dei rettangoli FK, MG, EI, LH. Ne segue che i rettangoli sottratti al segmento concavo EGHD sono equivalenti a quelli sottratti al segmento FCGE. Ripetendo il procedimento *ad infinitum* ed applicando ancora la Prop. 116 (Libro II) si ottiene la tesi, *a patto che* le aree dei rettangoli superino la metà dell'area del segmento convesso da cui vengono sottratti. Gregorio non verifica questa proprietà, certo del risultato già mostrato per via geometrica nella Prop. 106. Il fatto è che in questo caso la disuguaglianza non è sempre vera in quanto equivarrebbe a richiedere, per numeri $b > a > 0$

$$\ln \frac{b}{a} < 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

che è vera solamente quando il rapporto b/a non è troppo superiore ad 1. L'argomento di Gregorio è dunque valido solo da un certo punto in poi [3].

Gregorio non nota esplicitamente la proprietà logaritmica dell'iperbole, ma la enuncia in termini di passaggio da progressioni geometriche a progressioni aritmetiche. Questo legame viene invece sfruttato da De Sarasa nella sua risposta a Mersenne che si divide in due parti, la prima dedicata ai logaritmi, la seconda alla difesa del metodo di Gregorio per quadrare il cerchio. Per comprendere la prima parte occorre precisare il senso del quesito di Mersenne riportato sopra, in particolare il significato dei termini *logarithmi* e *geometrice*. Il primo termine va spiegato perché come visto nei capitoli precedenti, all'epoca erano già stati proposti diversi sistemi logaritmici che differivano per la scelta del numero cui attribuire logaritmo nullo. Dalla risposta di De Sarasa, basata sulla trasformazione di progressioni geometriche in aritmetiche, si è portati a concludere che il termine logaritmo vada preso nel senso precisato da Briggs: *I logaritmi sono numeri che, associati a numeri in proporzione, conservano sempre la stessa differenza*. Ora, da una progressione geometrica del tipo Aq^n si associa la progressione aritmetica $a+nd$ per formare un sistema logaritmico che resta completamente individuato quando vengono assegnati i parametri a e d, ovvero i *logaritmi* di A e Aq. Individuato così il sistema logaritmico, occorre trovare il logaritmo del terzo numero e dunque il problema di Mersenne ha senso. Quanto al termine *geometrice*, occorre osservare che De Sarasa lo utilizza nel duplice senso di *costruzioni geometriche* e di *rigore geometrico*, in senso euclideo. Riferito ai logaritmi questo rimanda alle *Chiliades Logaritmorum* di Keplero, costruite con l'intento di legittimare i logaritmi di Nepero inserendoli nei classici schemi euclidei. In effetti, il testo di De Sarasa riecheggia in molti punti il lavoro di Keplero senza peraltro citarlo. Sembra pertanto lecito che questo tipo di *rigore* fosse richiseto da Mersenne nel proporre il suo problema. Il testo di De Sarasa [5] *Solutio problematis a R.P. Marino*

Mersenno minimo propositi del 1649 colleziona una serie di risultati dell'*Opus Geometricum*—Proposizioni 1 e 3—e, dopo uno *scholion* dedicato alla natura dei logaritmi ed al loro rapporto con l'area sottesa dall'iperbole equilatera, passa a risolvere il problema di Mersenne nelle proposizioni 4-10.

Nella Proposizione 1 De Sarasa richiama il fatto che, se le ascisse dei punti su un'iperbole equilatera formano una progressione geometrica, anche le ordinate sono in progressione geometrica di ugual ragione ma, mentre una è crescente, l'altra è decrescente. La Proposizione 2 si rifà alle Proposizioni 125 e 129 del Libro VI di Gregorio. Riferendoci alla Fig. 5.3, egli afferma che

Detti AB ed AC gli asintoti dell'iperbola DLEMF, si considerino i segmenti DH, LI, FC paralleli all'asintoto AB che limitano i segmenti iperbolici DHLI ed LIFC. Il numero di volte in cui il rapporto DH/IL è contenuto nel rapporto IL/FC coincide con il numero di volte in cui l'area del segmento iperbolico DHLI è contenuta nel segmento LIFC.

In termini moderni, sia $x_D = a$, $x_L = ar$ ed $x_F = ar^{n+1}$. Allora da

$$\frac{x_L}{x_D} = r = \frac{DH}{IL} \quad \text{e} \quad \frac{x_F}{x_L} = r^n = \frac{FC}{IL} = \left(\frac{DH}{IL}\right)^n$$

segue che

$$n \cdot \text{area}(DHLI) = \text{area}(LIFC)\,,$$

come si verifica dalla relazione (5.1). In effetti, la dimostrazione si articola in due parti a seconda che le aree siano commensurabili (Prop. 125 dell'*Opus Geometricum*) o incommensurabili (Prop. 129 dell'*Opus Geometricum*). In quest'ultimo caso la dimostrazione seguita dice qualche cosa in più, visto che De Sarasa mostra come n volte l'area del segmento iperbolico delimitato dalle rette $x = a$ ed $x = ar$ sia minore dell'area delimitata tra le rette $x = ar$ ed $x = as$ se e solo se $r^{n+1} < s$.

Infine, nella Proposizione 3 De Sarasa combina le Proposizioni 109 e 130 del Libro VI dell'*Opus Geometricum*, la seconda delle quali è l'inverso della prima. In definitiva, con questa Proposizione De Sarasa dimostra che se le ascisse dei punti di un'iperbole equilatera sono in progressione geometrica, le aree dei corrispondenti segmenti iperbolici formano una progressione aritmetica e viceversa.

A questo punto si innesta uno *scholion* in cui De Sarasa illustra la natura dei logaritmi e la loro relazione con le aree sottese da un ramo di iperbole (Figura 5.3).

Si consideri la successione di grandezze O, P, Q, S, T, in proporzione continua, i cui logaritmi siano i numeri 6, 7, 8, 9, 10, etc. Questi numeri differiscono tra loro per una quantità costante, come richiesto dalla natura dei logaritmi. Si consideri ancora una certa iperbole DEF di asintoti AB ed AC e si costruiscano i segmenti FC, MK, EG, LI, DH, etc. paralleli all'asintoto AB e lunghi rispettivamente quanto O, P, Q, S, T, cosa possibile in virtù del primo corollario in questo libro.

Ora, per la Proposizione 3, tutte le aree MC, EK, LG, DI sono uguali tra loro. Allora, proseguendo nella proporzione continua di rapporto MK/FC così

da risultare proporzionale allo stesso XZ[9] *che, per il primo corollario, appartiene alla medesima iperbole, l'area XH sarà uguale alle aree DI, LG, etc. e pertanto l'area iperbolica XC supererà quella CD di una quantità pari all'eccesso dell'area DC rispetto all'area LC. Ancora, l'area iperbolica LC supera l'area EC dello stesso ammontare, e così via per le altre. Ne consegue che, al posto dei numeri 6,7,8,9,10,11, etc. possiamo adottare le quantità iperboliche XC, DC, LC, EC, MC come logaritmi delle grandezze O, P, Q, R, S, T, o meglio le quantità MC, EC, LC, DC, XC o ancora, se non si vuole fare riferimento all'iperbole, quantità che eccedano le une sulle altre di una stessa quantità come i numeri logaritmici adottati in partenza. Per questo motivo, si vede che la natura dei logaritmi, con la sua continuazione ed eccesso dei termini si adatta perfettamente all'iperbole, così che, al posto dei numeri, si possono prendere parti dell'iperbole od il rapporto assegnato dei segmenti.* (De Sarasa, p. 11 di [1])

Il legame tra logaritmi ed area di segmenti iperbolici opportunamente scelti è dunque reso esplicito. Inoltre, è chiaro a De Sarasa che è possibile assegnare sistemi logaritmici distinti a partire da una medesima iperbole. A questo punto, De Sarasa inizia l'attacco al problema di Mersenne, ispirandosi a risultati presenti nelle *Chiliades Logarithmorum* di Keplero. Nella Proposizione 4 egli mira a stabilire sotto quali condizioni una progressione geometrica che non contiene un certo numero a possa essere infittita in modo che la nuova progressione lo comprenda.

Assegnata una successione di segmenti A, B, C, D, E, etc. in proporzione continua secondo il rapporto A/B. Inoltre, sia dato un segmento F arbitrario. Occorre mostrare se F possa figurare in una progressione con rapporti A:B:C, prolungata da una delle parti secondo il rapporto B:A [se F è] maggiore [di B] o secondo il rapporto B:C [se F è] minore. (De Sarasa, p. 11 di [1])

Di seguito, nella Proposizione 5, De Sarasa sottolinea come una progressione geometrica di primo termine a e ragione r possa essere inclusa in un'infinità di altre progressioni geometriche di ragioni $\sqrt{r}$, $\sqrt[3]{r}$, $\sqrt[5]{r}$, $\sqrt[100]{r}$ e così via (*cfr.* Prop. IX in [6]) Nella Proposizione 6, De Sarasa si basa sulla Proposizione 2 per mostrare che se due aree di segmenti iperbolici adiacenti sono incommensurabili, allora i tre segmenti che li delimitano non appartengono ad una stessa progressione geometrica. Nelle successive Proposizioni 7 ed 8, egli considera il caso opposto in cui i segmenti iperbolici adiacenti sono commensurabili e dunque i tre segmenti che li delimitano appartengono ad una stessa progressione geometrica. A conclusione di queste tre proposizioni, De Sarasa riesce a stabilire sotto quali condizioni tre segmenti assegnati appartengono ad una medesima progressione geometrica: ciò accade se e solo se le aree dei segmenti iperbolici limitati dai segmenti di partenza sono commensurabili, il che fornisce il criterio (Proposizione 9) per rispondere al quesito contenuto nella Proposizione 4. In un nuovo *scholion*, De Sarasa può così affermare quando il problema di Mersenne è ben posto

Da qui risulta ancora più evidente che il problema di trovare, date tre grandezze ed i logaritmi di due di queste, il logaritmo della terza in modo geometrico non

[9] è un altro segmento verticale, posto tra DH e l'asintoto AC.

è stato ben formulato da Mersenne; è una richiesta che chiaramente confligge con la natura dei logaritmi che non può essere sempre essere rispettata senza restrizioni.[10] (De Sarasa, p. 12 di [1])

In questo passaggio si evidenzia la natura *discreta* dei logaritmi intesi da De Sarasa, rispetto al processo continuo di Nepero, in quanto la risposta al quesito di Mersenne viene subordinata alla possibilità di includere o meno tre termini nella medesima progressione geometrica.

Il passo finale, spiegato nella Proposizione 10, consiste nel risolvere il problema di Mersenne, quando ciò è possibile. In termini algebrici, assegnati

$$\log(AR^I) = i = a+Id \qquad \log(AR^J) = j = a+Jd \qquad \text{e } \log(AR^K) = k = a+Kd$$

si tratta di ottenere k in funzione di i, j, I, J, K dalla proporzione

$$\frac{k-j}{j-i} = \frac{K-J}{J-I}\,.$$

Sorge naturalmente una domanda: si può considerare De Sarasa come colui che introdusse i logaritmi naturali? La risposta, seguendo Burn [1] è negativa, perché mancano alcuni requisiti. Ad esempio, occorre impiegare un sistema logaritmico in cui $\log(1) = 0$; inoltre, i logaritmi debbono essere definiti sul continuo e che l'iperbole deve essere del tipo $y = 1/x$, in quanto un'iperbole della forma $y = a/x$ con $a > 0$ ma $a \neq 1$ porta ad introdurre un sistema di logaritmi la cui base è diversa da e.

5.2 Costruzione geometrica dei logaritmi

Se con De Sarasa il legame tra logaritmi ed area sottesa da un arco di iperbole viene reso esplicito, è Christiaan Huygens che riesce a sfruttare la geometria dell'iperbole per *calcolare* i logaritmi briggsiani. Tale *Regula ad inveniendos logarithmos* fu ritrovata nel 1868 da Joseph Bertrand tra i registri dei processi verbali dell'*Académie des Sciences* di Parigi ed era stata comunicata da Huygens all'assemblea nel 1666, senza presentarne il fondamento. Bertrand riteneva difficile che Huygens avesse potuto ottenere tale risultato senza far ricorso allo sviluppo in serie di Mercator, ma ciò appariva problematico in quanto lo sviluppo venne pubblicato solo nel 1668 e fu proprio Huygens a darne notizia all'*Académie*. In realtà, egli aveva scritto il *Fondamentum regulae nostrae ad inveniendos logarithmos* nell'agosto del 1661, come anche si evince da un riferimento fatto in una lettera che Huygens indirizzò a Robert Moret e datata 1 agosto 1661.

Huygens si rivela un attento lettore dell'*Opus Geometricum* di Gregorio di S. Vincenzo di cui cita alcuni teoremi relativi alla quadratura dell'iperbole. Come d'abitudine, riassumiamo i tratti salienti della tecnica di Huygens basandoci sul confronto con il testo originale. Egli prende un'iperbole equilatera di

[10] Atque hinc patet ulterius non recte Problema a Mersenno fuisse propositum, Datis tribus magnitudinibus, datisque duarum Logarithmis, tertiae Logarithmum Geometrice invenire; planeque contra naturam Logarithmorum id peti, quod absolute semper exhiberi non potest.

equazione, diremmo oggi, $xy = q^2$ e considera su di essa i punti A ed E tali che (Figura 5.4) $AB = 10$ ed $ED = 1$ ed il punto F dell'iperbole tale che $FG = 2$ per illustrare il calcolo del logaritmo (briggsiano) di 2.

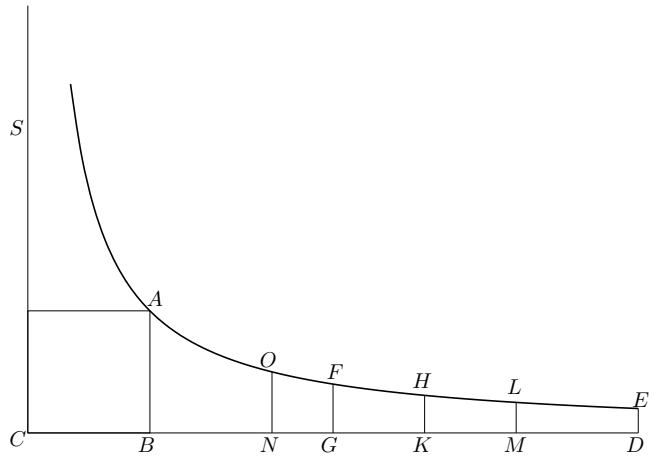

Figura 5.4: Iperbole equilatera per la determinazione geometrica di $\log 2$ proposta da Huygens.

Sia FAE un'iperbole i cui asintoti SC e CD formano un angolo retto e si consideri il segmento AB parallelo ad SC e distante da esso 10 parti delle quali ED è una ed FG due. Pertanto, tante volte lo spazio ABDE contiene lo spazio FGDE, altrettante il rapporto di AB con ED contiene il rapporto tra FG ed ED, secondo quanto trovato da Gregorio di S. Vincenzo. In altre parole la differenza del logaritmo del numero AB e di quello del numero ED contiene tante volte la differenza tra il logaritmo di FG e quello di ED (quante il rapporto di AB con ED contiene il rapporto tra FG ed ED). Tuttavia il logaritmo di AB è noto e posto pari ad 10000000000 ed il logaritmo dell'unità ED è 0. Dunque è nota la differenza del logaritmo di entrambi, cioè 10000... che coincide evidentemente con il logaritmo di AB.

Pertanto, se è noto il rapporto tra lo spazio ABDE e lo spazio FGDE, sarà nota la differenza del logaritmo di FG con quello di ED e pertanto sarà noto il logaritmo di FG.[11] (p. 452 di [7])

[11] Sit FAE hyperbole cujus asymptoti SC, CD rectum angulum comprehendentes, sitque AB aequidistans SC partium 10, qualium ED 1, et FG 2, siquidem volo invenire logarithmum numeri 2. Quoties igitur spatium ABDE continet spatium FGDE, toties ratio AB ad ED continet rationem FG ad ED, per inventa Greg^{ij} a S. Vincentio. Hoc est toties excessus logarithmi numeri AB supra logarithmum numeri ED continet excessum logarithmi numeri FG supra logarithmum numeri ED. Notus autem est logarithmus numeri AB quem ponimus esse 10000000000 et logarithm. numeri ED sive 1, qui est 0. Ergo excessus logarithmi utriusque notus est nempe 10000&c. idem videlicet qui logar. numeri AB.

Si ergo noscatur quam rationem habeat spatium ABDE ad spatium FGDE, notus erit excessus logarithmi numer^{i} FG supra logar. numeri ED, adeoque logarithmus numeri FG.

In termini moderni, dette $A_1 = A(ABDE)$ ed $A_2 = A(FGDE)$ le aree sottese dall'iperbole e limitate dall'asintoto CD e dai segmenti AB, FG ed ED, e posto $\rho = A_1/A_2$ abbiamo

$$\rho = \frac{\log \frac{AB}{ED}}{\log \frac{FG}{ED}} \tag{5.3}$$

cioè a dire

$$\frac{AB}{ED} = \left(\frac{FG}{ED}\right)^{\rho}$$

dove abbiamo usato il simbolo di logaritmo decimale perché, trattandosi di *rapporti* di aree, il particolare sistema logaritmico utilizzato non ha importanza, visto che si può sempre passare da un sistema ad un altro utilizzando la formula del cambiamento di base: il fattore di conversione si semplifica nel rapporto. Huygens sceglie i logaritmi di Briggs a dieci cifre decimali, secondo la versione di Vlacq. La strategia di Huygens è di trovare un rapporto tra aree iperboliche per dedurre il logaritmo richiesto.

Per trovare il rapporto degli spazi menzionati li divido entrambi in due parti uguali determinando dapprima il medio proporzionale tra i segmenti estremi come NO, medio tra AB ed ED, che divide in due parti uguali la regione ABDE. Di nuovo biseco le metà che giacciono verso ED ed ugualmente le metà di queste continuando finché richiesto dalla precisione che si vuole nel logaritmo richiesto. Si consideri ad esempio lo spazio HKDE determinato dopo 5 bisezioni e che dunque è la trentaduesima parte della regione ABDE e, similmente, si consideri la regione LD ottenuta dopo la quinta bisezione della regione FD e pertanto sua trentaduesima parte. Dunuqe, il rapporto tra le regioni HD ed LD, una volta determinato, fornisce il rapporto tra ABDE ed FGDE.[12] (p. 453 di [7])

In questo passaggio Huygens nota il fatto, già discusso nella Sezione 5.1, che il punto di un arco di iperbole le cui coordinate sono medie geometriche delle coordinate di altri due punti sull'iperbole P_1P_2, biseca l'area di un segmento iperbolico P_1P_2. Questa operazione può essere iterata e Huygens considera il settore HD (indicato con le lettere di vertici opposti) ottenuto per cinque bisezioni da ABDE ed il settore LD, ottenuto nello stesso modo da FGDE. È chiaro allora che il rapporto tra le aree di HD ed LD è ancora pari a ρ. Il motivo di questa bisezione ed il suo legame con il grado di precisione richiesto nella determinazione del logaritmo diverranno chiari più avanti. Huygens procede analizzando la geometria dell'arco HE, come riportato in figura.

Le regioni HD ed LD si trovano separatamente in questo modo. Consideriamo la regione HD [Fig. 2]. Si determini PQ, media proporzionale tra HK ed ED e si

[12] Ad inquirendam rationem dictorum spatiorum divido utrumque bifariam primo quod sit inveniendo mediam proportionalem inter lineas extremas, veluti inter AB, ED constituta media NO, ea bifariam dividet spatium ABDE. Rursus medietates quae versus ED eadem ratione biseco, et harum medietates denuo atque id aliquoties continuo, prout accurate logarithmum invenire lubet. Ponatur exempli gratia HKDE spatium per 5^{am} bisectionem inventum esse, ideoque 32^{mam} partem spatij ABDE, ac similiter spatium LD ex 5ta bisectione spatij FD ortum esse, ac proinde 32^{mam} partem dicti spatij FD. Si igitur nota sit ratio spatij HD ad spatium LD, ea erit ipsa ratio spatij ABDE ad FGDE.

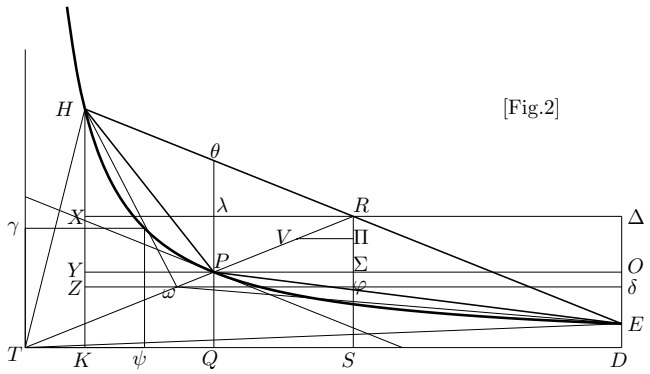

Figura 5.5: La determinazione geometrica di $\log 2$.

conduca dal centro T dell'iperbole una retta TPR che necessariamente taglierà HE in R dividendola in due parti uguali e da R si tracci RS. Parimenti siano $XR\Delta$ ed YPO parallele all'asintoto TD cosicché il rettangolo XD è equivalente al trapezio HKDE e necessariamente il rettangolo XO è equivalente al triangolo HPE. Infatti, poiché $P\theta$ è il doppio di $P\lambda$, il triangolo $PH\theta$ sarà equivalente al rettangolo PX ed il triangolo $PE\theta$ sarà equivalente al rettangolo $P\Delta$. Occorre però sottrarre la porzione iperbolica HPE dal trapezio $HKDE$ ovvero dal rettangolo XD per ottenere la regione $HKDEP$ la cui area si può determinare in modo approssimato grazie ad un nostro teorema sulla quadratura dell'iperbole.[13] (pp. 453-454 di [7])

Riassumiamo le proprietà geometriche qui invocate da Huygens. Anzitutto, vi è il fatto, già discusso in precedenza, che la retta condotta dal vertice dell'iperbole al punto P biseca la corda HE in R. Da ciò segue l'uguaglianza dei triangoli rettangoli HRX ed $R\Delta E$ e dunque l'equivalenza tra il trapezio HKDE ed il rettangolo XKDΔ. La proprietà della retta $XR\Delta$ parallela all'asintoto TD di bisecare l'angolo $\widehat{HRT}$ si verifica facilmente per via analitica ed Huygens ne propone una dimostrazione sintetica in calce al *Fondamentum*. Ora, il triangolo $PH\theta$ ed il rettangolo PX hanno ugual altezza $PY = X\lambda$ e la base $P\theta$ del triangolo è doppia della base $P\lambda$ del rettangolo, da cui si deduce la loro equivalenza e similmente per il triangolo $PE\theta$ ed il rettangolo $P\Delta$. La *portio hyperbolae HPE* è la regione delimitata dalla corda HE e dall'arco iperbolico HPE: sottraendone l'area da quella del trapezio $HKDE$, ovvero del rettangolo XD per quanto appena dimostrato, si ottiene l'area mistilinea riercata $HKDEP$. A questo punto, Huygens si riferisce a risultati di un'opera precedente, *Theoremata de*

[13] Spatia HD et LD separatim inveniuntur hoc modo. Sumamus spatium HD [Fig. 2]. Inter HK, ED media constituatur PQ et a centro hyp. T ducatur recta TPR, quae rectam HE necessario bifariam secabit in R unde ducatur RS. Item $XR\Delta$, YPO parallelae TD asymptoto, sit igitur $\square$ XD æqu. trapetio HKDE, et necessario $\square$ XO $\equiv$ triangulo HPE. Nam quia $P\theta$ dupla $P\lambda$ erit $\Delta^{\mathrm{m}} PH\theta$ æqu. $\square PX$ et $\Delta^{\mathrm{m}} PE\theta$ æqu. $\square P\Delta$. Auferenda autem est portio hyperbolae HPE a trapetio HKDE sive a $\square XD$ ut habeatur spatium $HKDEP$ quae portio per nostra theoremata de quadr. hyperbolae sic proxime invenitur.

quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro [8] in cui egli era riuscito dapprima a dimostrare, sulla scorta di classici risultati di ARCHIMEDE, come il centro di massa di una porzione di una conica, delimitato dalla conica medesima e da una corda, giace sul diametro coniugato alla corda, cioè sulla retta passante per il centro della conica che biseca la corda.[14] In seguito, con il Teorema VI HUYGENS riuscì a mostrare che, detto V il centro di massa di un settore di iperbole, vale la seguente proporzione

$$\frac{\text{area}_h(HPE)}{area_t(HPE)} = \frac{\frac{2}{3}(2TP + PR)}{TV}$$

dove T, R e P hanno lo stesso significato della Figura 5.5, $\text{area}_h(HPE)$ è l'area del segmento iperbolico HPE ed $area_t(HPE)$ è l'area del triangolo HPE inscritto nel settore, con ugual base ed uguale altezza[15]. Questa relazione è esatta, ma in assenza di un teorema che consenta di individuare la distanza del centro di massa di una porzione di iperbole sul diametro, HUYGENS usa il risultato di ARCHIMEDE per i segmenti *parabolici* in virtù del quale il centro di massa di un settore parabolico bisecato dal diametro (l'asse) di una parabola divide l'altezza del segmento in due parti che stanno tra loro nel rapporto 2 a 3. È proprio la sostituzione locale di un arco di iperbole con uno di parabola che rende la formula per i logaritmi approssimata, con un grado di approssimazione tanto migliore quanto maggiore è il numero di bisezioni dello spazio iperbolico $ABDE$. Ecco come procede HUYGENS.

Sia $RV = \frac{2}{5}RP$ così che V sarà vicino al centro di gravità della porzione HPE. Perciò, VT sta ai $\frac{2}{3}$ dell'intero RTP, come il triangolo HPE sta alla porzione HPE, cioè, se VT sta a $\frac{2}{3}RTP$ allora PR sta ad $R\omega$ ed il triangolo ωE è circa equivalente alla porzione HPE o, tracciata $V\Pi$ parallela ad $X\Delta$, ΠS sta ai $\frac{2}{3}RS\Sigma$ come $R\Sigma$ sta ad $R\varphi$ e, tracciando $Z\varphi\delta$, il rettangolo $X\delta$ equivale alla porzione HPE e così il rettangolo ZD è equivalente alla regione cercata HKDE. Dati allora HK, ED e e la loro media PQ, sarà anche assegnato il segmento φS da tracciare in KD per ottenere il rettangolo $\square ZD$. Se ora HK è chiamato a, ED è detto d, PQ è $b = \sqrt{ad}$, $RS = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$, $\Sigma R = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b$ i cui

[14] Precisamente, si tratta del Teorema IV: *Portionis hyperboles, ellipsis & circuli, centrum gravitatis est in portionis diametro* (p. 295 di [8])

[15] Nell'originale, il Teorema VI è formulato in questi termini *Omnis hyperboles portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera duarum, lateris transversi & diametri portionis, ad eam quae ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.* (p.305 di [8]) Ogni porzione iperbolica sta al triangolo in essa inscritto di ugual base ed altezza come i due terzi della somma del lato trasverso e del diametro della porzione stanno alla distanza del centro di gravità della porzione dal centro dell'iperbole

$\frac{3}{5} \equiv \Sigma\Pi = \frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d - \frac{3}{5}b.$[16]

$\Pi S)\left(\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b\right)$ sta ad $\frac{2}{3}RS\Sigma\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}b\right)$

come $R\Sigma\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b\right)$ sta ad $R\varphi\left(\frac{\frac{1}{6}aa - \frac{1}{3}bb + \frac{1}{6}dd}{\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d + \frac{2}{5}b}\right)$ dove ho posto $bb = ad$.

da $RS\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d\ S\varphi \frac{\frac{19}{3}bb - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{6}dd + 2ab + 2db}{3a + 3d + 4b}$ *cioè* $\frac{100ad}{81a + 81d + 108b} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}d = S\varphi$ *da moltiplicare per KD.*

Facciamo ordine in questa parte cruciale del metodo di Huygens. Anzitutto c'è l'uguaglianza $RV = (2/5)RP$ che traduce proprio la sostituzione dell'arco di iperbole con un arco di parabola per il quale il centro di massa V soddisfa la proporzione $RV : PV = 2 : 3$ da cui, per applicazione della regola del comporre, segue $RV : RP = 2 : 5$, come asserito da Huygens. Fatta questa approssimazione, egli applica il Teorema VI di [8]. Notiamo la scrittura $RTP = RT + TP = 2TP + PR$ impiegata in questo contesto. A questo punto, Huygens introduce un punto ω su TR tale che $VT : \frac{2}{3}RTP = PR : R\omega$. Ora, poiché i triangoli HPE ed $H\omega E$ hanno la stessa base, le loro aree stanno nel rapporto delle corrispondenti altezze che, a loro volta, stanno proprio nel rapporto $PR : R\omega$. Pertanto Huygens conclude che, nei limiti dell'approssimazione adottata, l'area del segmento iperbolico coincide con quella del triangolo $H\omega E$. Tracciate le parallele all'asintoto TD passanti per V e per ω, siano Π e φ le rispettive intersezioni con RS. Il teorema di Talete permette di trasformare la proporzione $VT : \frac{2}{3}RTP = PR : R\omega$ in $\Pi S : \frac{2}{3}RS\Sigma = R\Sigma : R\varphi$ Da tutto questo Huygens conclude che il rettangolo $X\delta$ è equivalente alla porzione di iperbole HPE. Infatti[17], sappiamo che $\text{area}_h(HPE) = \text{area}_t(H\omega E)$ che a sua volta coincide con $\frac{\omega R}{TR}\text{area}_t(HTE)$ in quanto i due triangoli hanno la base in comune. Ora, il trapezio $HKDE$, che già sappiamo essere equivalente al rettangolo XD, è anche equivalente al triangolo HTE, dal momento che i triangoli rettangoli HTK ed ETD sono equivalenti perché hanno i vertici H ed E sull'iperbole. Dunque, in definitiva

$$\text{area}_h(HPE) \equiv \frac{\omega R}{TR}\square XD = \square X\delta\,.$$

Pertanto, la porzione di spazio iperbolico HKDE, ottenuta togliendo $\text{area}_h(HPE)$ al trapezio HKED è equivalente, per differenza, al rettangolo ZD. La parte sintetica del procedimento si è conclusa con l'equivalenza (approssimata) $\text{area}_h(HKED) = \text{area}\square ZD$ e nel resto del frammento vi è l'espressione analitica del segmento $S\varphi$

[16] Sit $RV = \frac{2}{5}RP$, jam V erit proxime centr. gr. portionis HPE. Unde sicut VT ad $\frac{2}{3}$ totius RTP ita Δ^{m}HPE ad portionem HPE, hoc est, si ut VT ad $\frac{2}{3}RTP$ ita fiat PR ad $R\omega$ erit $\Delta^{\text{m}}H\omega E$ aequale proxime portioni HPE, vel ducta $V\Pi$ parall. $X\Delta$, si ut ΠS ad $\frac{2}{3}RS\Sigma$ ita fiat $R\Sigma$ ad $R\varphi$ ducaturque $Z\varphi\delta$, erit $\square X\delta \equiv$ portioni HPE, ideoque $\square ZD \equiv$ spatio HKDE quaesito. Datis autem HK, ED et inter ipsas media PQ, data erit φS ducenda in KD ut habeatur $\square ZD$. Veluti si HK vocetur a, ED voc. d, PQ voc. $b = \sqrt{ad}$, sit $RS = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$, $\Sigma R = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - b$ cuius $\frac{3}{5} \equiv \Sigma\Pi = \frac{3}{10}a + \frac{3}{10}d - \frac{3}{5}b$.

[17] Con il pedice $_h$ indico aree di segmenti iperbolici, con $_r$ e $_t$ aree di rettangoli e triangoli, rispettivamente.

da moltiplicare per KD, al fine di ricavare l'area del rettangolo ZD. Osserviamo a margine la notazione aa per indicare a^2, e così via per le altre quantità.

A questo punto, si applica lo stesso algoritmo di bisezione all'area iperbolica LD che richiede solo alcune sostituzioni formali. Si trova l'altezza n che, moltiplicata per MD fornisce l'area del rettangolo equivalente all'area iperbolica LD.

Similmente, date $LM = f$ [Fig. 1], $ED = d$ ed il loro medio proporzionale $g = \sqrt{fd}$ si determina l'altezza da condurre in MD destinata a produrre un rettangolo circa equivalente alla regione LD; dico che questa altezza è pari a $\frac{100fd}{81f+81d+108g} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d$, sostituite soltanto a con f e b con g nei termini determinati per la quantità $S\varphi$ [Fig.2].

Si chiami p l'altezza $S\varphi$ ed n l'altra altezza da tracciare in MD [Fig. 1]. Sia poi qq il quadrato dell'iperbole $\gamma\psi$ [Fig. 2]. Sia pertanto $KD = \frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$. e [Fig.1] $MD = \frac{qq}{f} - \frac{qq}{d}$. Dunque il rapporto tra la regione HD e la regione LD sarà lo stesso del prodotto di p con $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ con il prodotto di n con $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$. Ma il rapporto tra $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ e $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$ coincide con quello tra $\frac{a-d}{a}$ ed $\frac{f-d}{f}$ o di $a - d$ ad $a - \frac{ad}{f}$. Pertanto il rapporto della regione HD con la regione LD coinciderà con quello tra il prodotto di p ed $a - d$ ed i prodotto di n ed $a - \frac{ad}{f}$.

Per trovare i logaritmi dei numeri primi dall'uno al cento, si indichi con d l'unità e sia $AB = 10$. Dunque occorre determinare una sola volta il prodotto tra p ed $a - d$, cioè il numero che esprime la regione HD (porzione nota dello spazio ABDE) per trovare i logaritmi di tutti i numeri primi inferiori a cento; Il prodotto di p ed $a - d$ sta a quello tra n ed $a - \frac{ad}{f}$ così il logaritmo di dieci (che coincide con la differenza tra il logaritmo di dieci e quello dell'unità) sta al logaritmo del numero proposto in quanto anche qui esso coincide con la sua differenza con il logaritmo dell'unità che vale 0.

Dopo cinque estrazioni di radice da 10 si trova 10746078283213, cioè a. La sesta radice ottenuta da 10 è 10366329284377, che coincide con b. L'unità 10000000000000 è d. Si trova così $S\varphi$ o p, per $a - d = 77324248946607$ che è il numero da trovare una sola volta, come abbiamo detto.[18] (pp. 455-456 di [7])

[18]Similiter data $LM = f$ [Fig.1] et $ED = d$, interque ipsas media pror.^{i} $= g = \sqrt{fd}$, invenietur altitudo ducenda in MD, daturaque sic rectangulum aequale proxime spatio LD; ea inquam altitudo invenietur $\frac{100fd}{81f+81d+108g} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d$ mutatis nempe tantum a in f et b in g, in terminis qui inventi sunt pro quantitate $S\varphi$ [Fig.2].

Vocetur altitudo $S\varphi$, p. Et altera quam dixi ducendam in MD [Fig.1] vocetur n. Quadratum vero hyperbolae $\gamma\psi$ [Fig. 2] sit qq. Sit igitur $KD = \frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$. Et [Fig.1] $MD = \frac{qq}{f} - \frac{qq}{d}$. Itaque ratio spatij HD ad spatium LD erit ea quae p in $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ ad n in $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$. Sed ratio $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{a}$ ad $\frac{qq}{d} - \frac{qq}{f}$ est eadem quae $\frac{a-d}{a}$ ad $\frac{f-d}{f}$ sive $a - d$ ad $a - \frac{ad}{f}$. Ergo ratio spatij HD ad spatium LD erit ea quae p in $a - d$ ad n in $a - \frac{ad}{f}$.

Ad inveniendos logarithmos numerorum primorum ab unitate ad centenarium, d sit unitas, $AB = 10$. Itaque p in $a - d$, hoc est, numerus exprimens spatium HD (quod pars nota est spatij ABDE) semel tantum inveniendus est ad logarithmos omnium mumerorum primorum infra centenarium reperiendos; imo ad omnes omnino. Sicut p in $a - d$ ad n in $a - \frac{ad}{f}$ ita erit logarithmus denarij (quia idem quoque est excessus logarithmi denarij supra logar.^{m} unitatis) ad logar.^{m} numeri propositi quia hic quoque excessus est logarithmi numeri propositi supra logarithmum unitatis qui est 0.

Determinata per analogia la quantità $n = \frac{100fd}{81f+81d+108g} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d$, occorre trovare le basi KD ed MD dei rettangoli equivalenti ai segmenti di iperbole interessati. Per far questo, HUYGENS si serve dell'equazione dell'iperbole $xy = q^2 = qq$, (q^2 è detto *quadratum hyperbolae*). Visto che le ordinate di K, M e D sono pari rispettivamente ad a, f e d, le espressioni per KD ed MD seguono subito e dunque si ha il rapporto

$$\frac{\text{area}(LD)}{\text{area}(MD)} = \frac{p(a-d)}{n(a-\frac{ad}{f})} = \rho\,,$$

dove ρ è stato introdotto nell'equazione (5.3) e si può esprimere in termini logaritmici come

$$\frac{p(a-d)}{n(a-\frac{ad}{f})} = \frac{\log(AB) - \log(ED)}{\log(FG) - \log(ED)}\,.$$

Se ora, seguendo HUYGENS, poniamo $ED = 1$, $AB = 10$ ed $FG = \beta$ ricaviamo

$$\log(\beta) = \frac{n(a-\frac{ad}{f})}{p(a-d)} = \frac{\frac{100fd}{81f+81d+108g} + \frac{20}{27}g - \frac{1}{18}f - \frac{1}{18}d}{\frac{100ad}{81a+81d+108b} + \frac{20}{27}b - \frac{1}{18}a - \frac{1}{18}d} \times \frac{a-\frac{ad}{f}}{a-d}$$

che fornisce la regola cercata. Nel resto del testo, HUYGENS trova i valori di a e b servendosi di estrazioni successive di radici quadrate di 10. Il metodo, applicato alla ricerca di $\log 2$ fornisce un risultato corretto fino alla decima cifra decimale come annuncerà all'*Académie* nel 1668 [9], senza però spiegare i dettagli del metodo. Con il lavoro di HUYGENS, l'analogia tra aree iperboliche e logaritmi acquista una importante valenza applicativa, in quanto fornisce la base di un metodo accurato per trovare i logaritmi.

5.3 TORRICELLI e la curva logaritmica

I primi a trattare la curva logaritmica furono Evangelista TORRICELLI (1608-1647) ed ancora Christiaan HUYGENS. Cronologicamente l'onore di avere studiato per primo la curva logaritmica, determinandone le principali proprietà, spetta a TORRICELLI nella *De hemihyperbole Logarithmica* la cui stesura in forma manoscritta va fatta risalire al 1644, anno in cui in una lettera inviata a Michelangelo RICCI e datata 24 agosto, TORRICELLI si esprime in questi termini

Quella linea che io chiamavo mezza iperbola non è affatto nuova invenzione, come credo che ella avrà conosciuto subito, ma viene autorizzata dal nome di un grand'autore e da una invenzione grandissima nelle matematiche. Parlo di NEPERO *e de' logaritmi dell'una e dell'altra specie, la nascita de' quali con le lor proprietà e dimostrazioni si scorgono manifestamente in quella linea. In somma quei due moti, uno aritmetico e l'altro geometrico che da* NEPERO *non furon considerati se non separatamente l'uno dall'altro, da me sono stati contemplati*

Radix quae quinto extrabitur ex 10 est 10746078283213, haec est a. Radix quae sexto extrahitur ex 10 est 10366329284377, haec est b. unitas 10000000000000, est d. Hinc invenitur $S\varphi$ sive p, in $a - d = 77324248946607$ qui est numerus, semel tantum inveniendus ut diximus.

unitamente, e ne ho cavato una speculazione di geometria, dove che egli non andava rintracciando altro che una pratica aritmetica. (pp.78-79 di [10])

La memoria di TORRICELLI, insieme ad altre, non venne divulgata che due secoli e mezzo dopo da Gino LORIA [10] e venne inclusa nella successiva raccolta di opere complete [11]. Ciò si spiega con la prematura morte di TORRICELLI il quale, sentendo venir meno le forze, aveva affidato la pubblicazione delle opere matematiche inedite a Bonaventura CAVALIERI e a Michelangelo RICCI (1619-1682) i quali però non riuscirono a mantenere l'impegno: il primo per la morte sopraggiunta sempre nel 1647, il secondo perché assorbito dagli impegni ecclesiastici: diverrà cardinale nel 1681. HUYGENS presentò le proprietà salienti della curva logaritmica nella chiusa del *Discours de la cause de la pésanteur* del 1690, pubblicato in appendice al *Traité de la Lumiere*, in cui egli avverte peraltro che l'invenzione della curva va fatta risalire ad altri: *La si può chiamare curva logaritmica o logistica dal momento che non ha ancora un nome, benché più persone debbano averla considerata.*[19]. Non è chiaro se HUYGENS si riferisse a TORRICELLI o a James GREGORY che aveva pubblicato nel 1667 a Padova la *Geometriae pars universalis* in cui parla della curva logaritmica. È possibile che sia HUYGENS che GREGORY fossero a conoscenza di una qualche forma dei risultati di TORRICELLI, soprattuto GREGORY che soggiornò in Italia.

La memoria di TORRICELLI che riproduciamo in originale, è notevole perché determina le proprietà della sottotangente[20] alla curva logaritmica, nonché la quadratura della porzione di piano delimitata dalla curva stessa, da due rette parallele all'asse delle ordinate e dall'asse delle ascisse e, infine, l'espressione del volume del solido ottenuto per rotazione completa della curva attorno al proprio unico asintoto. TORRICELLI inizia enunciando le proprietà qualitative della curva ed i teoremi principali da lui mostrati per poi costruire la curva per punti.

È una certa linea ABC che per la sua definizione possiede un grande e molto diffuso interesse in geometria, una curva che non ha termine da entrambe le parti e possiede un solo asintoto HD (da ciò le abbiamo assegnato il nome di semiperbole) verso il quale sempre tende senza mai raggiungerlo; essa ha la parte convessa rivolta sempre dalla stessa parte, cioè rivolta all'asintoto. Daremo poi questa definizione, se i Teoremi saranno graditi.

Teor. I. Se si considera su questa linea un punto arbitrario A, da cui si traccia la tangente AE, mentre AH è perpendicolare all'asintoto: ne risulterà una figura piana ABFH, compresa tra la curva, il suo asintoto e la retta AH, è equivalente al doppio del triangolo AEH. Se poi si considera un altro punto arbitrario C da cui si traccia CD perpendicolare all'asintoto e CI parallela ad esso, il quadrilatero misto ACDH sarà equivalente al doppio del triangolo AIH.

Teor. II. Se poi l'intera figura viene fatta ruotare attorno all'asintoto HD, il solido acuto di lunghezza infinita, ottenuto per rotazione della semiperbole, che

[19] Nuncupari potest Logarithmica aut Logistica, nondum enim quantum nomen, licet eam cum plures observaverint

[20] Dato un arco di curva, si tracci la tangente al grafico di questa in un suo punto P. Sull'asse delle ascisse si considerino il punto A avente la stessa ascissa di P e l'intersezione Q della tangente alla curva in P. Il segmento AQ è la sottotangente alla curva in P.

è equivalente a 3/2 *del cono ottenuto per rotazione del triangolo AEH attorno all'asse HE.*[21](TORRICELLI, *De Hemihyperbolae logarithmica*, p. 80 di [10], pp. 337-338 di [11])

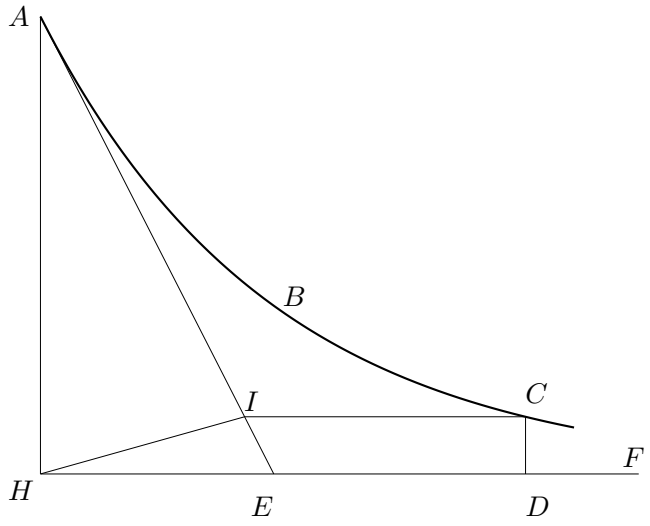

Figura 5.6: La semiperbole di TORRICELLI.

La definizione della curva logaritmica è data nei termini seguenti:

Se c'è una linea ABC che tagli tutte le rette perpendicolari a DE ed equidistanti tra loro in segmenti che formano una progressione geometrica, chiamo quella linea ABC semiperbole, visto che ha una sola retta per asintoto.[22] (pp. 80-81 di [10], p. 338 di [11])

Dunque la curva di TORRICELLI realizza la corrispondenza tra progressioni aritmetiche e geometriche che è alla base della definizione neperiana di logaritmo. In termini moderni, TORRICELLI ha definito la curva $x = \log_a y$, ovvero $y = a^x$. La costruzione della curva per punti segue la definizione appena data.

[21]Est quaedam Linea ABC, celeberrimam habens, et in Geometria frequentissimam passionem pro definitione, quae quidem curva ex utraque parte caret fine, unicamque habet asymptoton HD (hinc est quod eam Hemhiperbolam nominavimus) ad quam semper accedit et numquam cum ea convenit; habetque convexum universum ad easdem semper partes, nempe versus asymptoton. Dabimus aliquando ipsam definitionem, si Theoremata placuerint.

Theor.^{a} p.^{us}. Si huiusmodi lineae sumatur punctum quodlibet A, ex equo AE sit tangens, AH vero ad asymptoton perpendicularis: erit universa figura plana ABFH, quae sub linea curva, eiusque asymptoto et recta AH comprehenditur, dupla trianguli AEH. Si vero sumatur quodlibet punctum aliud C, ex quo CD ad asymptoton sit erecta, CI vero parallela, erit quadrilineum mixtum ACDH duplum trianguli AIH.

Theor.^{a} 2^m. At si universa figura convertatur circa asymptoton HD erit solidum acutum sine fine longum, factum ex revolutione semhyperbolae sesquialterum coni qui a triangulo AEH describitur circa axem HE.

[22]Si fuerit quaedam linea ABC quae omnes rectas perpendiculares ad lineam DE equalibus intervallis inter se distantes secet in continua proportione Geometrica, lineam illam ABC Hemihyperbolam voco, rectam vero de eius asymptoton quae quidem unica erit.

La spiegazione della figura sarà semplice: si consideri una retta DE illimitata da ambo le parti su cui ci prendono due punti D ed E arbitrari. Si traccino due segmenti perpendicolari DA ed EC. Diviso in due parti uguali il segmento DE in F, si tracci la perpendicolare FB media (geometrica) tra DA ed EC e bisecate ancora le parti ottenute in G ed M, si traccino GH ed MN entrambi medi proporzionali tra i segmenti adiacenti. E si proceda in questa suddivisione tante volte quanto si vuole; in seguito si tracci per i punti estremi trovati ALHBNC una curva che chiamiamo semiperbole per la somiglianza e perché ha un solo asintoto.[23] (pp. 81 di [10], p. 338 di [11])

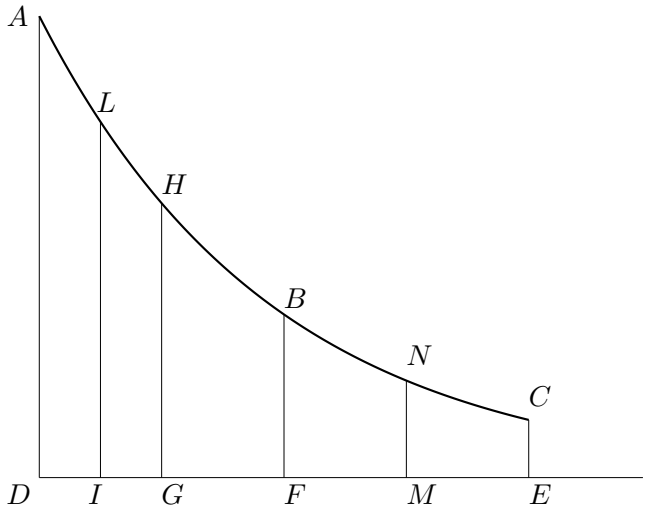

Figura 5.7: La costruzione per punti della semiperbole.

Si tratta di un processo di bisezione del segmento arbitrario DE in cui ad ogni punto della suddivisione corrisponde un'ordinata che è la media geometrica delle ordinate dei punti adiacenti nella successione. La discussione procede illustrando come sia possibile descrivere le due specie di logaritmi (*utraque species*), quelli crescenti e quelli decrescenti, attraverso questa curva.

Si sarebbe potuto chiamare la semiperbole anche curva logaritmica o neperiana. Infatti per suo mezzo si possono vedere entrambi i tipi di logaritmi e le loro proprietà.

Si consideri infatti la semiperbole ABCDEFGH di asintoto IL. Certamente non è possibile assegnare né un'ordinata minima né un'ordinata massima per cui

[23] Descriptio figurae facilis erit: ponatur recta linea DE sine fine longa ex utraque parte. In ea sumantur duo puncti quolibet D, E. Erigantur duae perpendiculares inaequales DA et EC. Cum recta DE bifariam in F erigatur perpendicularis FB media inter DA, EC sectisque iterum partibus bifariam in G et M erigatur GH, MN utraque media inter proximas. Atque haec divisio fiat quotiescumque libuerit; denique per extrema puncta reperta ALHBNC ducatur linea quam hemihyperbolam appellamus, ob similitudinem unicamque quam tantum habet asymptoton.

un valore immenso od esiguo assegnato alla lunghezza di un segmento coinciderà con una delle ordinate della curva.

Si scelga dunque un'ordinata LH come unità e si consideri un suo multiplo qualsiasi LM come valore massimo della tavola e, completato il rettangolo ILMA, dai singoli punti HNOP ecc. si traccino delle rette parallele all'asintoto. Fatto questo sia pari a zero il logaritmo dell'unità LH. Il logaritmo di LN, cioè del numero due, sarà NG, del tre LO sarà OF, del quattro sarà PE e così via fino la numero più grande della tabella LM il cui logaritmo è MA. L'altro tipo di logaritmi è formato dai complementi di questi appena spiegati.

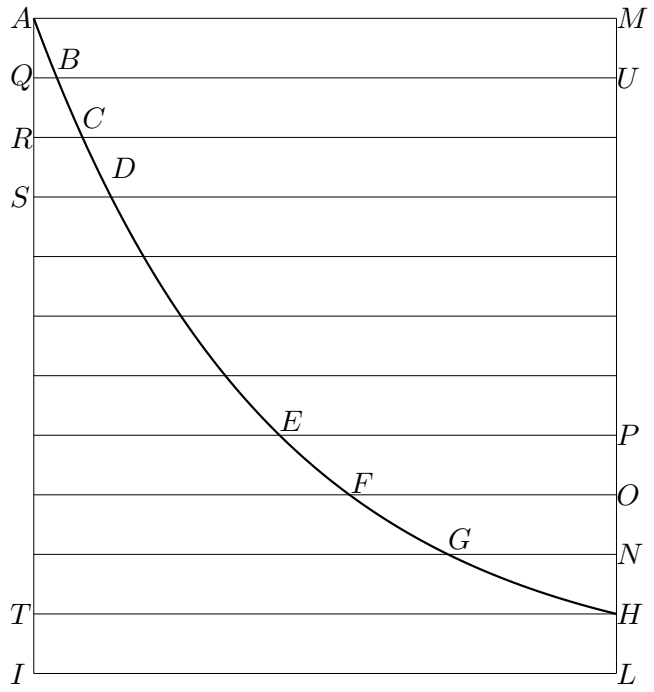

Figura 5.8: Diversi sistemi logaritmici descritti dalla stessa semiperbole.

Così il logaritmo del numero assoluto IA sarà zero, quello del numero IQ sarà QB e quello di IR sarà RC, quello di IS sarà SD, ecc. In questo modo l'unità IT avrà il logaritmo più grande TH. Da ciò è evidente che se è dato un solo tipo di logaritmo, non importa quale, per tutti i numeri, l'altro tipo si costruisce grazie soltanto a sottrazione, sottraendo evidentemente i singoli logaritmi. Né è importante da quale numero viene effettuata la divisione: la si può eseguire a partire dal numero che è uguale al più grande dei logaritmi dati come a partire da un numero a piacere minore del più grande. Infatti il valore e l'efficacia dei logaritmi risiede unicamente nelle loro differenze.[24](Torricelli,

[24]Poterat appellari etiam linea logarithmica sive Neperiana. Utramque enim speciem logarithmorum eorumque affectiones statim videndas offert.

De Hemyperbole logarithmica, pp. 81-82 di [10], pp. 338-339 di [11])

Qui TORRICELLI costruisce due sistemi logaritmici, usando la stessa curva. Il primo è *alla* BRIGGS in quanto, fissata l'unità HL, il corrispondente logaritmo è nullo. Chiamiamo $\log^{(1)}$ questo sistema logaritmico e sia $ML = n \times HL$. Per questo sistema vale la regola di trasformazione di prodotti in somma. Il secondo sistema, che denotiamo con $\log^{(2)}$, è neperiano con *sinus totus* pari ad AI. Il legame tra i due sistemi logaritmici segue dalle prescrizioni di TORRICELLI che pone

$$\log^{(2)}(IQ) = QB = IL - BU = \log^{(1)}(ML) - \log^{(1)}(UL) = \log^{(1)}(\frac{n}{n-1})$$

ed, in generale

$$\log^{(2)}(n-k) = \log^{(1)}(\frac{n}{n-k})\,.$$

Dopo aver illustrato queste proprietà generali, TORRICELLI dimostra un risultato sui plurirettangoli circoscritti ad un arco di semiperbole, aventi basi coincidenti ed altezza in progressione geometrica (*continuata proportione*) che forma il perno delle dimostrazioni dei teoremi annunciati all'inizio della memoria.

Si costruiscano un certo numero di rettangoli AB, CD, ecc, l'ultimo dei quali sia EF, tutti con basi uguali le prime delle quali siano GB e BD. Supponiamo poi che questi rettangoli formino tra loro una progressione geometrica. Da ogni rettangolo si tolga sempre quello successivo fino ad EF da cui si toglie un rettangolo IF uguale a quello che seguirebbe nella progressione dei rettangoli AB, CD se la si continuasse. Fatto questo, si prolunghi MI in O e si prolunghi il segmento AC fino al punto P di intersezione con MO e, tracciata la perpendicolare PQR passante per P, si completi il rettangolo AGQR. Dico che il rettangolo AGQR è equivalente all'unione di tutti i rettangoli AB, CD, VS, TY, EF. Infatti, l'unione di tutte le differenze AC, CV, VT, TE, EM è equivalente al rettangolo AK come di dimostra, in un modo consueto tra i matematici. Il rettangolo ME è uguale ad EZ, e, aggiunto il rettangolo in comune ET, ME ed ET insieme

Posita enim hemihyperbola ABCDEFGH cuius asymptotos IL. Certum est neque minimam, neque maximam applicatarum dari posse, ergo proposita quacumque sive exigua sive immensa linea recta erit quaedam ex applicatis propositae lineae aequalis.

Ponatur ergo quaedam applicata LH pro unitate, et LM ipsius multiplex quantumcumque libuerit pro maximo absoluto Tabulae, completoque rectangolo ILMA, ducantur ex singulis punctis HNOP etc. rectae ad asymptoton parallelae. His peractis erit unitatis LH logarithmus nullus. Binarij vero LN logarithmus erit NG, ternarij autem LO erit logarithmus OF, quaternarij erit PE et sic semper usque ad maximum tabulae numerum LM cuius logarithmus est MA. Altera vero species logarithmorum erunt complementa illorum qui iam explicati sunt. Nempe maximi numeri absoluti IA erit logarithmus nullus, numeri vero IQ logarithmus erit QB, et numeri IR logarithmus erit RC, et numeri IS erit logarithmus SD, etc. Unitas tandem IT logarithmum habebit omnium maximum TH. Hinc manifestum est data una tantum ex eodem semper numero specie logarithmorum quaecumque sit alium construi posse per solam subtractionem subtrahendo scilicet singulos logarithmos. Neque quicquam refert ex quonam numero subtractionem instituas. Potest et subductio fieri sive ex numero qui aequalis sit maximo datorum logarithmorum; sive ex maiori quantum libuerit. Virtus enim et efficacia logarithmorum in solis eorum differentiis constitit.

sono equivalenti allo stesso IT o allo stesso TX, e se si aggiunge il rettangolo in comune TV, allora ME, ET, TV saranno uguali a VZ o ancora a VK ed aggiunto il rettangolo in comune VC, i rettangoli ME, ET, TV, VC insieme sono uguali allo stesso CX ovvero a CO ed aggiunto il rettangolo in comune CA, tutti i rettangoli ME, ET, TV, VC, CA insieme saranno uguali allo stesso AK.

Ora, i rettangoli AB, CD, VS ecc. formano una proporzione continua per cui AB sta a BH come CD sta ad DL e, invertendo il rapporto, BA sta ad AC come DC sta a CV. E ciò è vero sempre, fino all'ultimo rapporto. Dunque per il n. 12 del quinto libro di EUCLIDE *tutti i rettangoli AB, CD, VS, TY, EF, stanno a tutte le differenze AC, CV, VT, TE, EM, ovvero all'unico rettangolo AK, come ognuno dei primi sta ad ognuno dei secondi, cioè come BA sta ad AC e, permutando i termini, tutti i predetti rettangoli stanno a BA come AK sta ad AC, ovvero come OA sta ad AH, cioè come PO sta a CH o, ancora, come il rettangolo AGQR sta al rettangolo BA. Dunque il rettangolo AGQR è equivalente a tutti i predetti rettangoli, come si doveva dimostrare.*[25](TORRICELLI *De Hemhyperbole logarithmica*, pp. 82-83 di [10], pp. 339-340 di [11])

Servendoci della figura, ricostruiamo gli argomenti di TORRICELLI. Egli anzitutto considera una successione di rettangoli AB, CD, VS, TY, EF, etc. aventi tutti ugual base ed altezze in progressione geometrica, cosicché i vertici A,C,V,T,E,M stanno su un arco di semiperbole. Ad ogni rettangolo (alla sua area, meglio) viene sottratto il successivo: così togliendo CD da AB si resta con il rettangolo AC e, di seguito, con i rettangoli CV, VT, TE, EM, quest'ultimo ottenuto sottraendo dal rettangolo EF quello che occuperebbe il posto successivo nella progressione, se questa venisse prolungata. Condotta la parallela MO all'asintoto GF che interseca in K il segmento BC ed in P la retta passante per A e C, TORRICELLI mostra che l'area del rettangolo AGQR è uguale alla somma delle aree dei rettangoli AB, CD,...,EF. Dapprima egli osserva che la somma delle aree di EM, TE, VT, CV ed AC, è uguale a quella del rettangolo

[25]Ponantur quotcumque rectangula AB, CD, etc. quorum ultimum sit EF, super basibus deinceps aequalibus constituta quorum primae sint GB, BD. Sint praedicta rectangula in Geometrica continuata proportione inter se. Auferanturque semper sequens a praecedenti, nempe ad ultimum EF, ex quo auferatur IF aequale ei quod sequeretur in progressione rectangulorum AB, CD, si continuaretur ulterius. His peractis producatur MI in O iunctaque AC et producta, conveniat cum MO in P et ducta per P perpendiculari QPR compleatur rectangulum AGQR. Dico rectangulum AGQR omnibus positis rectangulis AB, CD, VS, TY, EF aequale esse. Omnes enim differentiae AC, CV, VT, TE, EM simul sumptae aequales sunt rectangulo AK, quod quidem ostenditur more solito apud Geometras usitato hoc modo. Rectangulum ME aequale est ipsi EZ, sumptoque communi ET erunt ME, ET aequalia ipsi IT, sive ipsi VK sumptoque communi TV, erunt ME, ET, TV aequalia ipsi VZ, sive ipsi VK sumptoque communi VC, erunt ME, ET, TV, VC aequalia ipsi CX sive ipsi CO, et sumpto tandem communi CA erunt omnia ME, ET, TV, VC, CA aequalia ipsi AK.

Iam rectangula AB, CD, VS etc. sunt in continua proportione, ergo AB ad BH est ut CD ad DL, et per conversionem rationis BA ad AC erit ut DC ad CV. Et hoc verum erit semper usque ad ultimum. Ergo per 12 quinti EUCLIDIS omnia rectangula AB, CD, VS, TY, EF, ad omnes differentias AC, CV, VT, TE, EM, sive ad unicum rectangulum AK, erunt ut unum ad unum, hoc est ut BA ad AC et permutando omnia praedicta rectangula ad BA erunt ut AK ad AC, sive ut recta OA ad AH, nempe ut PO ad CH sive ut rectangulum AGQR ad rectangulum BA. Propterea aequale est rectangulum AGQR omnibus praedictis rectangulis. Quod erat demostrandum.

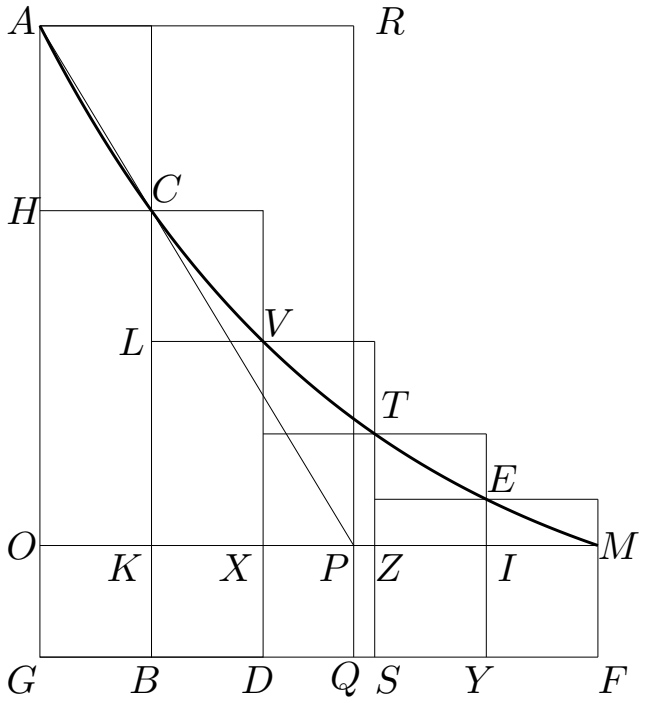

Figura 5.9: La costruzione geometrica usata per dimostrare il primo teorema sulla semiperbole.

AK. Sfruttando il fatto che tutti i rettangoli della successione AB, CD,...EF hanno ugual base ed altezze in progressione geometrica, dall'uguaglianza di BC e GH, VD ed LB, ecc. segue che

$$\frac{A(AB)}{A(CD)} = \frac{A(CD)}{A(VS)} = ... \quad \text{ossia} \quad \frac{A(AB)}{A(BH)} = \frac{A(CD)}{A(DL)} = ...$$

e, dalla proprietà dello scomporre (*conversio rationis*), segue ancora

$$\frac{A(AB)}{A(AC)} = \frac{A(CD)}{A(CV)} = ... = k$$

per tutti i rettangoli e dunque

$$k = \frac{A(AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF)}{A(AC \cup CV \cup VT \cup TE \cup EM)} = \frac{A(AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF)}{A(AK)},$$

vista l'equivalenza di AK con $AC \cup CV \cup VT \cup TE \cup EM$. Pertanto, permutando i medi nella proporzione

$$\frac{A(AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF)}{A(AK)} = \frac{A(AB)}{A(AC)}$$

si ottiene

$$\frac{A(AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF)}{A(AB)} = \frac{A(AK)}{A(AC)} = \frac{AO}{AH},$$

stante l'uguaglianza delle basi AK ed HC. Per similitudine dei triangoli AOP ed ACH si prosegue con $\frac{AO}{AH} = \frac{OP}{HC} = \frac{A(AQ)}{A(AB)}$ da cui segue

$$A(AQ) = A(AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF).$$

Se all'area del plurirettangolo circoscritto $AB \cup CD \cup VS \cup TY \cup EF$ e del rettangolo $AGQR$ si sottrae quella del rettangolo AK si ottiene l'equivalenza tra l'area del plurirettangolo inscritto $CG \cup VB \cup TD \cup ES \cup MY$ e quella dello gnomone OBR, formato dai rettangoli KR ed OQ. Questa equivalenza è oggetto di un corollario, che sarà utilizzato in seguito.

Abbiamo già dimostrato che il rettangolo AGQR è equivalente a tutti i rettangoli AB, CD, VS, TY, EF. Se allora si sottraggono le quantità equivalenti, da una parte il rettangolo AK, dall'altra tutte le differenze ACVTEM, si ottiene che lo gnomone residuo OBR sarà uguale a tutti i rettangoli CG, VB, TD, ES, MY.[26] (p. 83 di [10], p. 340 di [11])

Torricelli ora dimostra come, tracciata una tangente alla curva logaritmica, sia in realtà possibile tracciare tutte le tangenti alla curva stessa. Questo risultato, che egli chiama *Propagatio tangentium in hemihyperbola*, è ottenuto dimostrando, per assurdo, che la sottotangente alla semiperbole è costante.

Data una sola tangente, si conoscono tutte le altre. Infatti sia AD la sola tangente nota alla semiperbole e si consideri l'ordinata AB e l'asintoto BC. Preso un punto arbitrario E e condotta l'ordinata EF si consideri il segmento CF uguale a BD. Dico che EC è tangente [alla semiperbole]. Se infatti non lo fosse ci sarebbe un'altra linea EI tangente. Si tracci per E la retta EO parallela all'asintoto e si congiunga L con B.

Ora l'intera figura piana AVB è equivalente al doppio del triangolo ADB. Tolto il quadrilatero mistilineo AEFB che, per la dimostrazione già scritta, è doppio del triangolo ALB, la figura restante illimitata EVF sarà doppia del triangolo residuo BLD ovvero del triangolo FEC che ha la stessa base ed è compreso tra le stesse parallele. Ma se si assume EI tangente [alla semiperbole] ed EF è l'ordinata di E, da quanto dimostrato l'intera figura piana EVF sarà doppia del triangolo FEI e dunque i triangoli FEC e FEI saranno uguali, ciò che è assurdo. Dunque proprio EC è tangente. Come dovevasi, ecc...Da ciò si può arguire a quale solido sia equivalente il tronco di solido acuto.[27] (pp. 83-84 di [10], pp. 340-341 di [11])

[26] Ostendimus iam rectangulum AGQR aequale esse omnibus rectangulis AB, CD, VS, TY, EF. Si ergo aequalia demantur nempe rectangulum AK, omnesque differentiae ACVTEM, reliquus gnomon OBR aequalis erit omnibus rectangulis CG, VB, TD, ES, MY.

[27] Data unica Tangente dantur omnes. Esto Hemihyperbola cuius data sit Tangens unica AD et per A sit applicata AB, asymptotos vero BC. Sumpto deinde quolibet puncto E applicetur EF, et ipsi BD ponatur aequalis FC. Dico EC tangens esse. Nam nisi sit tangens, erit tangens aliqua alia linea, puto EI. Ducatur ex E recta EO parallela asymptoto, et iungatur LB.

Iam tota universa figura plana AVB dupla est totius trianguli ADB. Ablatum etiam quadri-

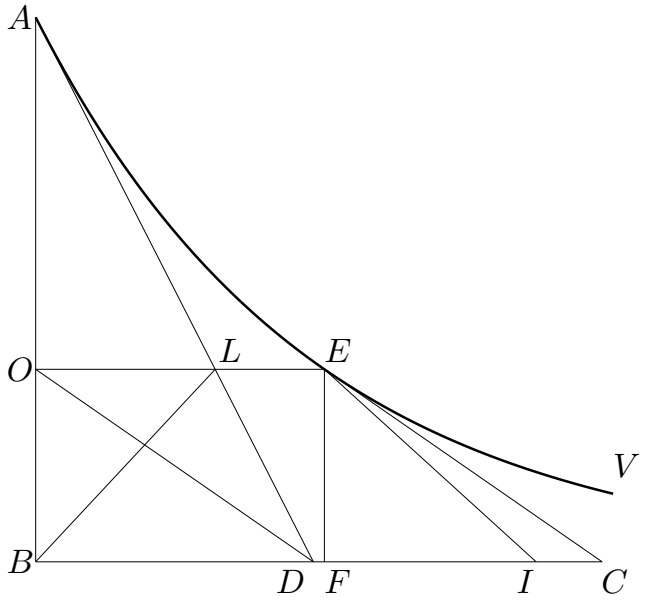

Figura 5.10: La costruzione geometrica usata per dimostrare la costanza della sottotangente della semiperbole.

L'argomento di Torricelli è dunque il seguente. Tracciata la tangente AD in A alla semiperbole e preso su quest'ultima un punto arbitrario E, si stacchi il segmento EF ortogonale all'asintoto BC e si riporti su quest'ultimo il segmento FC congruente a BD. Il teorema è dimostrato se si fa vedere che EC è tangente alla semiperbole. Per assurdo, Torricelli suppone che sia EI la tangente in E e traccia la parallela EO all'asintoto BC che interseca la tangente AD in A nel punto L. A questo punto, Torricelli asserisce che l'area della figura piana delimitata dall'arco infinito AV di semiperbole, da AB e dall'asintoto, è il doppio di quella del triangolo ADB. In effetti, Torricelli non ha mostrato sinora questo risultato che si può ottenere prendendo, nella dimostrazione precedente (Figura 5.9), segmenti GB, BD, DS, etc. sempre più piccoli: al limite, quando la loro ampiezza tende a zero ed F tende all'infinito, OM si confonde con l'asintoto GF, la secante AC con la tangente in A alla semiperbole, il punto P con il punto Q ed il plurirettangolo circoscritto con l'area compresa tra l'arco illimitato AF, AG e l'asintoto. Similmente, il rettangolo AGQR è equivalente al doppio del triangolo AGD, da cui segue l'asserto di Torricelli. Questo teorema sarà ripreso e dimostrato in seguito. Un simile richiamo vale anche per l'equivalenza asserita

lineum AEFB duplum est (ex demonstratione iam scripta) trianguli ALB, ergo reliqua figura sine fine longa EVF dupla erit reliqui trianguli BLD, sive trianguli FEC, sunt enim in basibus aequalibus et inter easdem parallelas. Sed cum EI ponatur tangens, et EF applicata erit eadem universa figura plana EVF ex demonstratis dupla trianguli FEI, propterea triangula FEC, FEI aequalia erunt. Quod est absurdum. Erit ergo ipsa EC tangens. Quod erat etc... Ex hoc elici potest cuinam aequale sit frustum solidi acuti.

tra il quadrilatero mistilineo ABFE ed il doppio del triangolo ALB. Accettati questi risultati, per differenza si ha che l'area della porzione illimitata EVF è doppia del triangolo BLD, ovvero di EFC, ad esso equivalente. D'altra parte, se si suppone EI tangente alla semiperbole, lo stesso argomento ora utilizzato permette di concludere che AVF ha area doppia del triangolo FEI che dunque risulterebbe equivalente al triangolo FEC, il che è assurdo.

Servendosi del teorema 2 enunciato all'inizio della memoria, TORRICELLI enuncia una proposizione sul volume del solido generato per rotazione dell'arco ABFE di semiperbole attorno al suo asintoto che è i 3/2 della differenza tra i volumi dei coni ABD ed OBD. Inoltre, egli mostra come dedurre rapporti di volumi da rapporti di segmenti che appartengono alla semiperbole.

Si ruoti la figura precedente (Fig. 5.10) attorno all'asintoto. L'intero solido ottenuto dalla figura AVB sarà equivalente a tre mezzi del cono ADB; infatti, il solido sottratto ottenuto da EVF è equivalente a tre mezzi del cono ottenuto da ECF poiché EC è tangente ovvero a tre mezzi del cono ottenuto da OBD che equivale al precedente; pertanto il tronco residuo ottenuto da ABFE sarà equivalente ai tre mezzi di ciò che resta del cono ottenuto da ABD, una volta che sia stato eliminato il cono ODB.

Per misurare il solido attorno all'asintoto in un altro modo. Siano eguali intervalli ABCDE ecc. e siano 3 segmenti FD, GD, ID, in proporzione continua come pure i segmenti HE, LE, ME, ecc. Dico che OIM è una linea logaritmica ovvero una semiperbole.

Poiché il segmento di retta ID sta ad ME come il rettangolo FDI sta ad HEM e come, poiché l'altezza è la stessa, il quadrato di GD sta a quello di LE. E ciò accade sempre. Pertanto le rette ID ed ME stanno tra loro come i quadrati di GD ed LE e dunque sono in proporzione continua; e la linea sarà logaritmica. E i cerchi stanno alle linee come il solido al piano.[28] (p. 84 di [10], pp. 341-342 di [11])

Nella seconda parte del frammento riportato, TORRICELLI costruisce, su segmenti di ugual lunghezza come FD ed HE, una progressione geometrica per cui

$$\frac{FD}{GD} = \frac{GD}{ID} \quad \text{e} \quad \frac{HE}{LE} = \frac{LE}{ME}$$

da cui segue l'equivalenza del rettangolo FDI di lati FD e DI con il quadrato di lato GD e del rettangolo HEM di lati HE ed ME con il quadrato di lato LE.

[28] Convertatur retroscripta figura circa asymptoton. Et erit solidum universum factum a figura AVB sesquialterum coni ADB; ablatum vero solidum ex EVF sesquialterum est coni ex ECF ob tangentem EC, sive coni ex ODB qui idem est; ergo reliquum frustum quod fit ex ABFE aequale erit [sesquialtero] reliquo coni ADB dempto cono ODB.

Per misurare il solido circa asymptoton alio modo. Siano eguali intervalli ABCDE etc. et siano 3 continue FD, GD, ID, item HE, LE, ME, etc. dico che OIM è una linea logaritmica overo semiperbole.

Poichè recta ID ad ME est ut $\square FDI$ ad HEM ob aequalem altitudinem nempe est quadratum GD ad LE. Et hoc semper. Ergo rectae ID, ME sunt ut quadratum GD, LE. Ergo erunt continuae; et linea erit logarithmica. Eruntque circuli ut linee, nemper solidum ut planum.

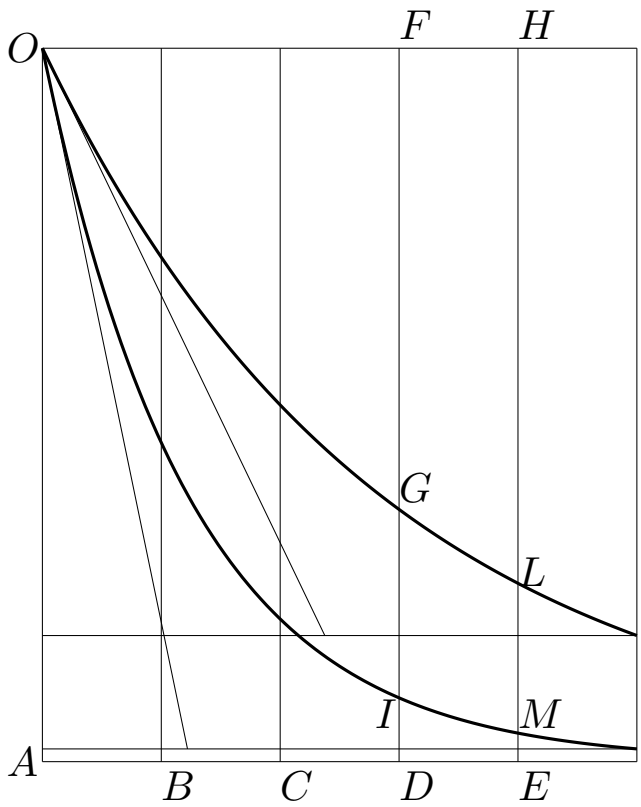

Figura 5.11: Generazione di una curva logaritmica a partire da un'altra curva logaritmica.

Poiché i predetti rettangoli hanno uguali altezze HE=FD

$$\frac{ID}{ME} = \left(\frac{GD}{LE}\right)^2$$

e se la curva OGL è logaritmica, anche OIM lo sarà. Inoltre, il rapporto tra le aree dei cerchi generati da GD ed LE è pari al rapporto lineare ID/ME, mentre i volumi dei cilindri generati per rotazione dei rettangoli GC ed LD attorno ad AE stanno nel rapporto delle aree dei rettangoli IC ed MD.

Torricelli determina ora con il metodo di esaustione che l'area del quadrilatero misto CADE (Fig. 5.12) è equivalente a quella del rettangolo CAHM, il cui lato MH giace sulla parallela a CA passante per l'intersezione L tra il segmento EF, parallelo all'asintoto AD e la tangente alla semiperbole in C. La dimostrazione si articola in due parti: nella prima si suppone che CAHM abbia area minore del quadrilatero misto CADE, nella seconda si suppone sia maggiore, ricadendo in un assurdo in entrambi i casi e dunque dimostran-

do l'equivalenza. Esaminiamo il testo corrispondente al primo argomento di TORRICELLI.

Sia data una semiperbole il cui solo asintoto (Fig. 5.12) sia AD, l'ordinata più grande AC e CL sia tangente e si consideri una ordinata ulteriore qualsiasi, come DE, e si tracci la parallela EF all'asintoto che interseca la tangente in L. Dopo di che si tracci la retta verticale HLM passante per L. Dico che il quadrilatero misto CADE compreso tra l'iperbole, l'asintoto e le due rette verticali è equivalente al rettangolo CAHM. Se infatti così non fosse, il rettangolo CAHM avrebbe area o minore o maggiore del quadrilatero misto summenzionato. Iniziamo a supporre, se possibile, che sia minore e si consideri il rettangolo MHPN minore della differenza tra il rettangolo ed il quadrilatero misto, così che l'intero rettangolo CAPN sarà minore del quadrilatero misto CADE. Si consideri la congiungente CO, che intersecherà la semiperbole dal momento che CL è l'ultima delle rette tracciate da C che non intersecano (la semiperbole) e sia Z il punto di intersezione da cui si tracci ZY parallela all'asintoto; Si bisechi allora AD e si proceda con bisezioni successive fino a che non determiniamo una sezione AQ che sia minore di ZY; fatto questo, si divida l'intero AD in parti uguali allo stesso AQ e si assumano queste singole parti come lati di altrettanti rettangoli circoscritti al quadrilatero misto CADE; sia CAQB il primo di questi rettangoli il cui lato QB tagli l'iperbole in I. Si tracci CI che certamente giace tra i segmenti di retta CL e CZ e che interseca LO nel punto V da cui si traccia la retta verticale RVT. Ora, la figura rettilinea circoscritta al quadrilatero misto CADE, che è formata da rettangoli di uguale altezza il primo dei quali è CAQB, è equivalente al rettangolo CART; pertanto è minore del rettangolo CAPN che a sua volte era minore del quadrilatero misto CADE, da cui segue che la figura circoscritta deve essere a maggior ragione più piccola del suo quadrilatero misto a cui è circostritta; dunque l'intero è minore di una sua parte, che è assurdo.[29](TORRICELLI, *De hemihyperbole logarithmica*, pp. 84-85 di [10], pp. 342-343 di [11].)

[29]Esto hyperbola monoasymptota (Fig. 5.12) cuius asymptotos AD, maxima applicata AC, tangens vero CL, et sumatur quaelibet alia applicata, puta DE, ducaturque EF parallela asymptoto, et occurrent tangenti in L. His peractis applicatur per L recta HLM. Dico quadrilineum mixtum CADE contentum sub hyperbola, asymptoto, duabus applicatis, aequale esse rectangulo CAHM. Nisi enim ita sit erit rectangulum CAHM vel minus vel majus praedicto quadrilineo mixto. Sit primum, si possibile est, minus, et ponatur rectangulum MHPN minus defectu quo rectangulum deficit a quadrilineo mixto, et erit totum rectangulum CAPN adhuc minus praedicto quadrilineo mixto CADE. Jungatur recta CO, quae omnino secans erit, cum CL sit ultima inclinatarum ex puncto C, et non secantium secet ergo in Z, et agatur ZY parallela asymptoto; tum secetur AD bifariam, eiusque partes iterum bifariam, atque hoc fiat semper donec veniamus ad aliquam sectionem puta AQ minorem quam sit ZY; quo facto secetur tota AD in partes aequales ipsi AQ, statuanturque singulae partes pro lateribus totidem rectangulorum circa quadrilaterum mixtum CADE descriptorum; et sit ex huiusmodi rectangulis primum CAQB cuius latus QB secet hyperbolam in I. Ducatur CI quae omnino cadet intra rectas CL, CZ, occurratque ipsi LO in puncto V et applicetur RVT. Iam figura rectilinea circumscripta circa quadrilaterum mixtum CADE, quae constat ex rectangulis aeque altis quorum primum est CAGB (Si legga CAQB), aequalis est rectangulo CART; ergo minor est rectangulo CAPN rectangulorum vero CAPN minus erat quadrilineo mixto CADE, ergo multo magis figura circumscripta minor erit suo quadrilineo cui circumscribitur; nempe totum sua parte minus erit. Quod est absurdum.

Dunque Torricelli suppone $A(CAHM) < A(CADE)$ e giustappone a CAHM un rettangolo MHPN di area tale che CAPN sia ancora di area più piccola rispetto al quadrilatero misto CADE. Detta O l'intersezione di NP con

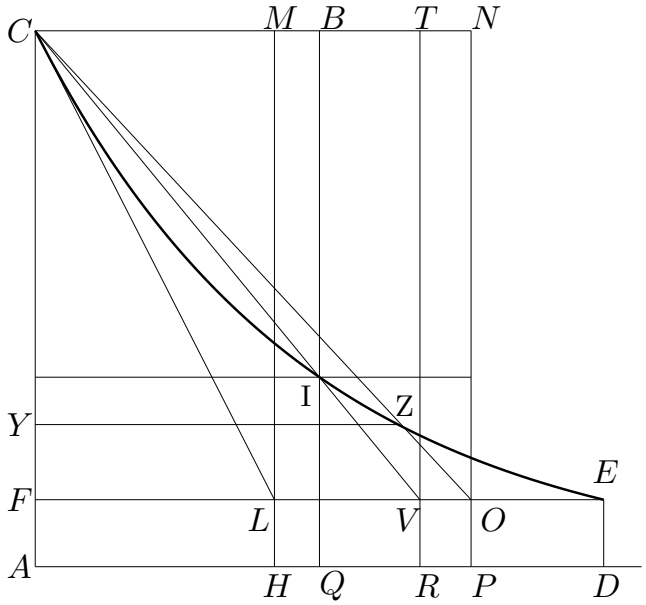

Figura 5.12: Metodo di esaustione. Impossibilità che il rettangolo $CAHM$ abbia area minore del segmento di semiperbole $CADE$.

EF, CO deve tagliare la semiperbole in Z. Si bisechi più volte AD fino a determinare un punto Q tale che $AQ < YZ$, dove YZ è parallela all'asintoto. Senza menzionarlo, Torricelli ha anche bisogno di supporre $AQ > AH$ affinché la secante CI tagli EF in un punto interno al LO. Dai punti equidistanti di suddivisione di AD ottenuti a partire da Q, si traccino rettangoli circoscritti a CADE, il primo dei quali è CAQB, il cui lato QB taglia la semiperbole in I. La retta CI interseca EF in V da cui si traccia la parallela RT a CA. Per quanto prima dimostrato, il rettangolo CART è equivalente alla somma delle aree dei rettangoli circoscritti appena determinati. Poiché $FV < FO$, il rettangolo CART ha area inferiore al rettangolo CAPN che, a sua volta, è stato preso di area inferiore al quadrilatero misto CADE. Di qui l'assurdo che una figura circoscritta a CADE ha area più piccola di CADE.

Vediamo ora come Torricelli escluda il caso (Fig. 5.13) $A(CAHM) > A(CADE)$.

Si consideri lo stesso quadrilatero misto CADE, CL il segmento di tangente e la retta verticale HM passante per L tale da formare il rettangolo CAHM. Abbiamo appena mostrato nella prima parte che il rettangolo CAHM non è inferiore al quadrilatero CADE. Supponiamo possibile che il rettangolo CAHM sia maggiore del quadrilatero misto CADE e si tolga dall'intero rettangolo CAHM un

certo rettangolo CAPN minore della differenza di cui l'intero rettangolo supera il quadrilatero misto; ed il rettangolo restante NPHM sarà ancora maggiore del quadrilatero misto CADE. Si bisechi AD più volte procedendo finché si ottenga un certo segmento AQ minore di AP. Infatti, si comprende allora che l'intero AD è stato suddiviso in parti uguali allo stesso AQ ciascuna delle quali viene presa come lato di altrettanti rettangoli inscritti nel quadrilatero misto e dotati della stessa altezza e dal primo di essi, YAQI, si tracci CI prolungato fino a V da cui si traccia il segmento verticale RVT. Il rettangolo NPHM è già per costruzione maggiore del quadrilatero misto CADE per cui lo stesso rettangolo NPHM sarà molto maggiore della figura inscritta nel quadrilatero misto formata da rettangoli con la medesima altezza, il primo dei quali è YAQI. Ma questa figura inscritta è equivalente allo gnomone FRB; pertanto il rettangolo NPHM risulterebbe maggiore dello gromone FRB, ovvero una parte sarebbe maggiore del suo intero. Ciò che è assurdo.[30](TORRICELLI, *De Hemhyperbole logarithmica*, pp. 85-86 di [10], pp. 343-344 di [11]).

La dimostrazione è ancora condotta per assurdo, mostrando una contraddizione se si suppone che $A(CAHM) > A(CADE)$. Se così fosse, sarebbe possibile togliere da CAHM un rettangolo CAPN in modo che il rettangolo residuo NPHM sia ancora di area superiore al quadrilatero misto CADE. Si bisechi allora AD tante volte quanto necessario perché il primo segmento della partizione sia $AQ < AP$ e si costruiscano sui segmenti della partizione i rettangoli inscritti a CADE. Il lato IQ del primo rettangolo inscritto interseca la semiperbole in I e sia V l'intersezione della retta CI con il segmento EF, parallelo all'asintoto. Condotta la retta RT passante per V, ortogonale ad AD, lo gnomone FRB formato dai rettangoli FR e BV è, per quanto già dimostrato, equivalente all'unione dei rettangoli inscritti, il primo dei quali è YAQI. Dunque abbiamo

$$A(FRB) = A(\text{rettangoli inscritti}) < A(CADE) < A(NPHM)$$

che è assurdo, in quanto il rettangolo NPHM è sottoinsieme dello gnomone FRB.

Dopo la dimostrazione di un breve lemma sulle parabole che però non rientra negli argomenti successivi e che dunque omettiamo, TORRICELLI affronta la dimostrazione del secondo teorema enunciato in apertura, sull'equivalenza tra

[30]Sit idem quadrilaterum mixtum CADE tangens CL, et per punctum L applicata HM quae faciat rectangulum CAHM. Ostendimus iam in prima parte rectangulum CAHM non esse minus quadrilineo mixto CADE. Sit ergo, si possibile est, rectangulum CAHM maius quadrilineo mixto CADE, auferatur a toto rectangulo CAHM rectangulum aliquod CAPN minus excessu quo totum rectangulum superat quadrilineum mixtum; et erit reliquum rectangulum NPHM adhuc maius quadrilineo mixto CADE. Secetur recta AD bifariam, atque iterum bifariam, et hoc fiat semper, donec veniamus ad segmentum aliquod AQ minus quam sit AP. Tunc enim intelligatur tota recta AD secta in partes aequales ipsi AQ, quae singulae statuantur latera totidem rectangulorum intra quadrilineum mixtum inscriptorum, et aequales altitudines habentium, et sit ex huiusmodi rectangulis primum YAQI ducaturque CI et producatur usque in V, et per V applicetur RVT. Iam rectangulum NPHM maius est per constructionem quadrilineo mixto CADE, ergo idem rectangulum NPHM multo maius erit quam figura intra quadrilineum inscripta ex rectangulis aeque altis constans, quorum primum est YAQI. Sed huiusmodi figura inscripta aequalis est gnomoni FRB; propterea rectangulum NPHM maius erit gnomone FRB, nempe pars maior erit suo toto. Quod est absurdum.

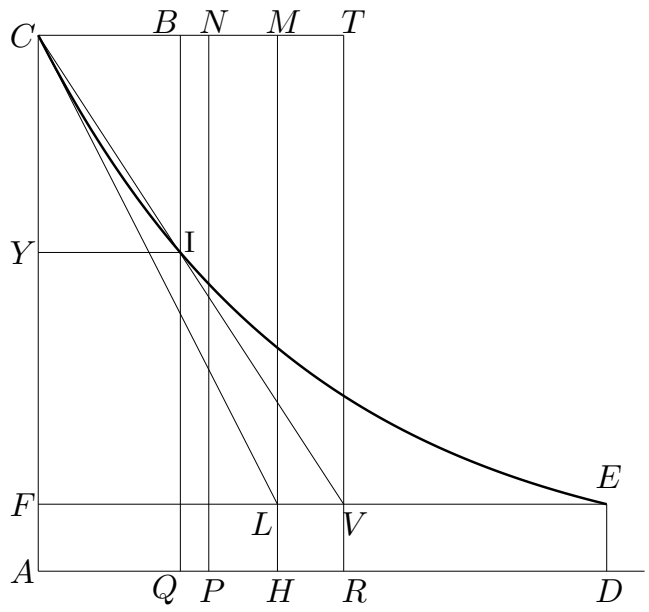

Figura 5.13: Metodo di esaustione. Impossibilità che il rettangolo $CAHM$ abbia area maggiore del segmento di semiperbole $CADE$.

il solido ottenuto per rotazione della semiperbole attorno al proprio asintoto ed 3/2 del cono generato per rotazione del triangolo CAD (Figura 5.14) attorno all'asintoto, CD essendo la tangente alla semiperbole in C. Ora, in realtà Torricelli dimostra l'equivalenza tra il solido illimitato ed il cilindro di base AC ed altezza $AE = AD/2$, il che è la stessa cosa. Anche qui la dimostrazione è spezzata in due parti e segue un andamento analogo a quella riportata sopra.

Testo 5.1 (Torricelli, *De Hemhyperbole logarithmica*) (pp. 87-88 di [10], pp. 344-346 di [11]). Originale 5.3.

Sia data un'iperbole ad un solo asintoto (Fig. 5.14), di asintoto AB, massima ordinata AC, tangente CD e si bisechi AD nel punto E e venga completato il rettangolo CAE. Dico che il solido iperbolico che si estende all'infinito ottenuto per rotazione attorno all'asse AB è equivalente al cilindro ottenuto per rotazione del rettangolo ACFE attorno allo stesso asse. Se così non fosse infatti, il solido iperbolico avrebbe volume maggiore o minore di quello del cilindro ottenuto da AF.

Iniziamo col supporre che il solido iperbolico abbia, se possibile, volume maggiore del cilindro generato da AF. Pertanto il cilindro ottenuto da AF sarà minore del solido suddetto: se si considera il cilindro ottenuto da EH che sia minore della differenza tra i volumi, il cilindro ottenuto dall'intero AH sarà ancora di volume inferiore rispetto al solido iperbolico. Si tracci attorno al diametro AF una parabola passante per il punto C. È evidente che questa parabola e l'iperbole debbono intersecarsi in un altro punto oltre allo stesso C. Se dunque

GB è un qualsiasi segmento minore di GA ed uniamo B con C, certamente una qualche parte della parabola cadrà oltre la retta CB verso il punto N in quanto GB è minore di GA e dunque CB è una secante. Dal momento però che CD è tangente all'iperbole, cioè è l'ultima delle secanti, la retta CB intersecherà certamente la stessa iperbole ed una parte del segmento della stessa cadrà dalla parte di A. È allora certo che la parabola e l'iperbole non debbono intersecarsi soltanto in C, ma anche in un altro punto che chiamiamo I. Si traccino allora per I la retta verticale LIN, la secante CIB e la parallela IM all'asintoto AB. Si immagini allora una figura circoscritta all'intera semiperbole e formata da parallelogrammi di uguale altezza, il primo dei quali sia CALN mentre il secondo sarà uguale allo stesso MALI; si consideri allora il solido ottenuto per rotazione dell'intera figura attorno all'asse AB così che dai rettangoli si ottengono cilindri di uguale altezza e circoscritti al nostro solido iperbolico, il primo del quali è il cilindro ottenuto da CALN mentre il secondo è il cilindro ottenuto da MALI. E tutti questi infiniti cilindri formeranno una proporzione continua; e la prima differenza sarà il solido a forma di bracciale ottenuto per rotazione attorno ad AB del rettangolo CMIN. Ora il cilindro ottenuto da CAGH sta al cilindro ottenuto da NLGH—che ha la stessa base—come l'altezza AG sta all'altezza GL. Ovvero come il quadrato di CA sta al quadrato di IL, a causa della parabola, e ancora come il cerchio di raggio CA sta a quello di raggio IL, ovvero come il cilindro ottenuto da CALN sta a quello ottenuto da MALI. Pertanto, permutando i termini della proporzione, il cilindro ottenuto da CAGH sta a quello ottenuto da CALN, che è il primo termine della progressione geometrica, come il cilindro ottenuto da CALN, primo termine, sta alla differenza tra i cilindri formati da CALN e da MALI, che è la prima differenza della progressione. Pertanto il cilindro ottenuto da CAGH è equivalente all'unione di tutti i termini, cioè all'intera figura formata da cilindri di eguale altezza e circoscritta al solido. Ma lo stesso cilindro ottenuto da AH era minore del solido iperbolico per cui occorre che il solido iperbolico abbia volume maggiore di una figura che è ad esso circoscritta, cioè una parte deve superare l'intero corrispondente. Cosa assurda.

La dimostrazione procede al modo consueto, supponendo che il solido generato dalla rotazione della semiperbole attorno ad AB abbia volume maggiore del cilindro generato per rotazione del rettangolo AF attorno ad AB. Si aggiunge ad AF un ulteriore rettangolo EH in modo che il cilindro generato per rotazione di AH abbia ancora volume inferiore al solido iperbolico. A queso punto Torricelli traccia una parabola passsante per C e G ed avente vertice in G così che AG ne è un diametro (in realtà l'asse) e determina sull'asintoto un punto B tale che $GA > GB$. Senza ricorrere a rappresentazione cartesiana della parabola, Torricelli mostra che la semiperbole e la parabola ora tracciata debbono intersecarsi in un punto I distinto da C. Infatti, la retta CB non può essere tangente alla parabola in quanto $GA > GB$, per costruzione[31]. Ne consegue che

[31] Per convincersi di ciò prendiamo la parabola $y = x^2$ e consideriamo la retta tangente nel suo punto $P_0 \equiv (x_0, x_0^2)$ di equazione $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$ che interseca l'asse della parabola nel punto $Q \equiv (0, -x_0^2)$. Pertanto il vertice $(0, 0)$ è il punto medio del segmento PQ, dove P è la proiezione di P_0 sull'asse della parabola: tradotto nel linguaggio di Torricelli, se CB

parte della parabola si trova nel semipiano delimitato da CB, contenente il punto N. D'altra parte, poiché CD è tangente alla semiperbole in C, CB la taglia in qualche altro punto e dunque vi saranno punti della semiperbole che giacciono nel semipiano generato da CB, contenente A. Per continuità si conclude che la parabola e la semiperbole si intersecano in un punto I diverso da C. Condotta la parallela LN ad AC passante per I e la parallela IM all'asintoto, si considera l'unione di tutti i rettangoli di base uguale ad AL circoscritti alla semiperbole ed i cui primi elementi sono CALN ed un cilindro equivalente a MALI. I cilindri generati dai rettangoli circoscritti per rotazione attorno ad AB hanno uguali altezze e basi in progressione geometrica, per la proprietà della semiperbole; dunque anche i volumi dei cilindri circoscritti al solido iperbolico sono in progressione geometrica ed i primi termini sono V(CALN) e V(MALI). Ora, poiché i rettangoli CAGH e NLGH hanno ugual altezza, i solidi ottenuti dalla loro rotazione attorno ad AB stanno in un rapporto pari ad $AG/GL = (AC/IL)^2$, visto che C ed I stanno sulla stessa parabola di vertice G. Ma $(AC/IL)^2$ è anche il rapporto tra le aree dei cerchi di raggio AC ed IL così come tra i volumi dei cilindri CALN ed MALI. Si conclude pertanto che

$$\frac{V(CAGH)}{V(NLGH)} = \frac{V(CALN)}{V(MALI)}$$

e dunque, per proprietà dello scomporre,

$$\frac{V(CAGH)}{V(CALN)} = \frac{V(CALN)}{V(CMIN)}$$

dove l'ultimo termine è il volume della corona cilindrica ottenuta per rotazione del rettangolo CMIN attorno ad AB. Ora, poiché $V(CALN) = V_0$ e $V(MALI) = kV_0$ sono i primi termini di una progressione geometrica, si è dimostrato, in formule, che

$$V(CAGH) = \frac{V(CALN)^2}{V(CMIN)} = V_0 \frac{1}{1-k} = V_0 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^n \right) ,$$

cioè che il cilindro $CAGH$ è equivalente al multicilindro circoscritto al solido iperbolico e dunque ha volume maggiore del solido iperbolico stesso, il che contrasta con l'ipotesi iniziale. Resta da invalidare l'ipotesi opposta, $V(hyp.) < V(CAEF)$. Torricelli ripete lo schema appena visto.

Si ammetta poi come possibile che il solido iperbolico abbia volume minore del cilindro generato da CAEF (Fig. 5.14). Si tagli un qualsiasi cilindretto, ad esempio quello generato da CALN, che abbia volume minore della differenza tra il cilindro generato da CAEF ed il solido iperbolico. Immaginiamo poi due figure composte da un numero infinito di cilindri di uguale altezza, la prima circoscritta al solido iperbolico ed avente come primo cilindro quello generato

fosse tangente alla parabola, si avrebbe $GA = GB$. È chiaro che per una retta secante si ha $GA > GB$.

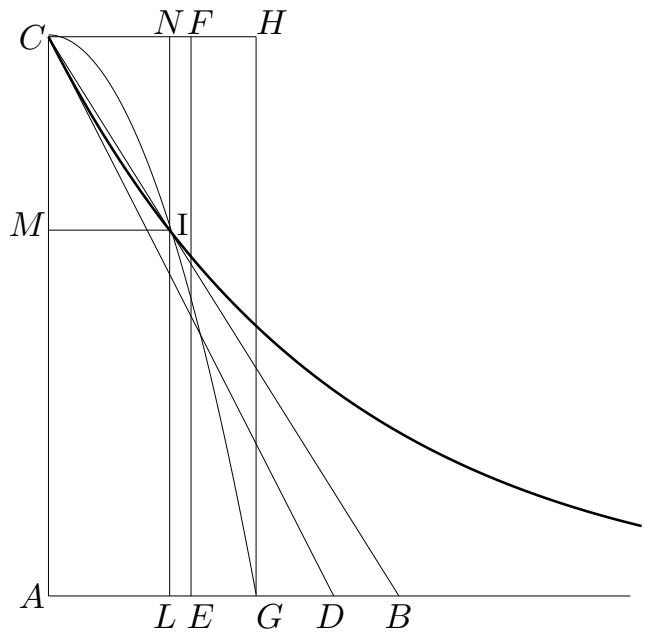

Figura 5.14: Volume del solido di rotazione generato da una curva logaritmica con la costruzione della parabola ausiliaria.

da CALN; l'altra inscritta nel medesimo solido ed avente come primo cilindro quello ottenuto da MALI. È evidente che la differenza tra queste due figure è equivalente al cilindro generato da CALN e dunque inferiore alla differenza tra i volumi del solido iperbolico ed il cilindro generato da CAEF. Dunque la differenza tra la figura circoscritta e lo stesso solido iperbolico sarà molto minore della differenza tra questo stesso solido ed il cilindro generato da CAEF: perciò se la aggiungiamo allo stesso solido iperbolico otterremo che la stessa figura circoscritta è ancora minore del cilindro generato da CAEF. Immaginiamo ora di tracciare una parabola passante per i punti C ed I di ordinate XA ed IL e con vertice in G. Dalla precedente dimostrazione segue che il cilindro generato da CAGH è equivalente all'intera figura circoscritta e dunque che il cilindro generato da CAGH è minore del cilindro generato da CAEF, cioè che l'intero è contenuto in una sua parte. Ciò che è assurdo.

Resta da mostrare che il diametro della parabola, cioè la retta AG è certamente maggiore di AE cosicché il cilindro generato da CAGH sia sempre come un certo intero ed il cilindro generato da CAEF come una parte. La retta CIB intersechi la parabola, per cui AG è maggiore di GB. Dunque AG è maggiore della metà di AB e a maggior ragione è più della metà di AD, cioè maggiore di AE. Come volevasi ecc.[32] (pp. 88-89 di [10], pp. 346-347 di [11])

[32]Ponatur deinde solidum hyperbolicum minus cylindro ex CAEF facto si possibile est. Secetur cylindrulus aliquis, puta ex CALN minor defectu quo solidum hyperbolicum deficit a

Si parte dall'ipotesi che sia $V(hyp.) < V(CAEF)$ e si considera un cilindro CALN tale che

$$V(CALN) < V(CAEF) - V(hyp.)$$

e si costruisce la famiglia di pluricilindri circoscritti, di uguale altezza, il cui primo termine è il cilindro generato dal rettangolo CALN, così come la famiglia di cilindri inscritti, sempre con la stessa altezza, il cui primo termine è il cilindro generato da MALI. Se $\overline{V}$ ed $\underline{V}$ sono i volumi dei solidi circoscritto ed inscritto, rispettivamente, abbiamo

$$\overline{V} - \underline{V} = V(CALN) < V(CAEF) - V(hyp.)$$

e dunque

$$\overline{V} < \overline{V} + V(hyp.) - \underline{V} < V(CAEF)\,.$$

Tracciata la parabola con vertice in un punto G dell'asintoto della semiperbole e detta I la sua intersezione con la semiperbole medesima, per quanto visto in precedenza il cilindro generato da CAGH è equivalente al plurirettangolo circoscritto alla semiperbole e costruito come nella parte diretta della dimostrazione. Si perviene così all'assurdo che

$$V(CAGH) = \overline{V} < V(CAEF)$$

mentre CAGH contiene CAEF. Resta da convincersi che in effetti $AG > AE$, in modo che sia garantito il fatto che $V(CAGH) > V(CAEF)$; ciò segue osservando che la retta CIB interseca la parabola e dunque, come osservato nella nota 15, $AG > AB/2 > AD/2 = AE$.

5.4 Huygens e la curva logaritmica

Poiché le ricerche di Torricelli sulla curva logaritmica rimasero inedite fino al 1900, parve che Huygens fosse stato il primo ad aver concepito l'idea di tale

cylindro ex CAEF. Deinde concipiamus duas figuras ex infinitis numero cylindris aequealtis compositas, altera nempe circumscriptam solido hyperbolico, et primus ipsius cylindrus sit qui ex CALN: altera vero inscriptam intra idem solidum, et sit primus ipsius cylindrus qui ex MALI. Manifestum est universam differentiam quae est inter predictas duas figuras aequalem esse cylindro ex CALN facto, hoc est minorem esse defectu quo solidum hyperbolicum deficit a cylindro ex CAEF facto. Ergo differentia quae est inter circumscriptam figuram et solidum ipsum hyperbolicum multo minor erit defectu ipsius solidi a cylindro ex CAEF facto: quamobrem si addamus eam ipsi solido hyperbolico, conflabimus ipsam figuram circumscriptam adhuc minorem cylindro ex CAEF facto. Concipiamus iam per puncta C et I transire parabolam cuius ordinatim applicatae datae sunt CA, IL et ipsa sibi verticem faciat in G. Certum est ex praecedente demonstratione cylindrum ex CAGH aequalem esse universae figurae circumscriptae ergo et cylindrus ex CAGH minor erit cylindro ex CAEF, nempe totum minus erit sua parte. Quod est absurdum. —Equalitas ergo patet.

Remanet ostendendum quod diameter parabolae, nempe recta AG omnino maior esse debeat quam AE ut cylindrus ex CAGH semper sit veluti quoddam totum, et cylindrus ex CAEF veluti pars. —Recta CIB ferat parabolam, ergo AG maior est etiam quam GB. Ergo AG plus est quam dimidium rectae AB, et multo magis plus quam dimidium rectae AD, nempe maior quam AE. Quod erat etc.

curva. Ora, come già detto, HUYGENS espose la teoria della curva logaritmica con le sue proprietà salienti nel *Discours sur la Cause de la Pesanteur* del 1690 ma le dimostrazioni furono ritrovate in un manoscritto [7]—pubblicato per la prima volta da UYLENBROEK nell'opera *Christiani Hugenii Allorumque Saeculi XVII Virorum Celebrium Exercitationes Mathematicae et Philosophicae*, datato 10 settembre 1661 e dunque contemporaneo alle ricerche sui logaritmi attraverso lo studio dell'iperbole equilatera cui abbiamo dedicato la Sezione 5.2. Molte sono le somiglianze con l'inedito torricelliano da noi esaminato sopra, a cominciare dalla costruzione per punti. In effetti, egli si serve di una progressione geometrica di ragione 2 e dunque traccia il profilo di $y = k2^x$. Molto simili, quando non coincidenti, sono i risultati sulla costanza della sottotangente alla curva logaritmica ed i teoremi sulle aree delimitate da porzioni di curva logaritmica, finite od infinite. Limitiamoci a segnalare le novità principali dell'approccio di HUYGENS. La prima è l'impiego della curva logaritmica per inserire in modo geometrico un numero arbitrario di medi proporzionali tra due numeri assegnati. Riferendosi alla Figura 5.15 HUYGENS si esprime dicendo che

Possiede poi delle proprietà notevoli. In primo luogo per trovare un numero arbitrario di medi proporzionali tra due termini assegnati. Siano dati, ad esempio, PR e QR. Si determinino dei segmenti verticali ST e VX uguali ai precedenti e che terminano sulla curva e si divida l'intervallo TX di cui essi distano in un numero di parti uguali pari a quello dei medi cercati aumentato di uno. Se così cerchiamo due medi, occorrerà dividere in tre parti e dai punti Δ *e Z della suddivisione si traccino segmenti verticali* $\Delta\Gamma$*, ZY che saranno i due medi cercati tra ST e VX, cioè QR. Ciò si dimostra facilmente in quanto, per le proprietà della curva tra XV e TS cade una serie infinita di medi proporzionali ed il loro numero tra XV e ZY è lo stesso che tra ZY e* $\Delta\Gamma$ *e tra* $\Delta\Gamma$ *e TS; dico questo perché XZ,* $Z\Delta$ *e* ΔT *sono uguali e quegli innumerevoli medi proporzionali distano tra di loro sempre dello stesso intervallo.*[33] (p.461 di [12])

Riportati i segmenti PR e QR pari alle grandezze entro cui inserire gli n medi proporzionali sull'asse LR (nell'esempio $n = 2$), si trovano i punti S e V della curva logaritmica le cui ordinate ST e VX sono uguali a PR e QR. Occorre a questo punto dividere il segmento TX in $n + 1$ parti uguali: tre in questo caso. Dai punti Δ e Z della suddivisione si innalzano le perpendicolari alla curva logaritmica e, per la definizione di quest'ultima, i segmenti $\Delta\Gamma$ e ZY sono i medi proporzionali richiesti.

Vediamo ora alcuni teoremi di HUYGENS sul rapporto tra aree di segmenti iperbolici

[33]Habet autem proprietates insignes. Primo ad inveniendas quotcunque medias proportionales inter duas datas. Sint ex. gr. PR, QR. Statuantur ad curvam perpendiculares ijs aequales ST, VX, et intervallum TX quo inter se distant dividatur in partes aequales una plures quam quot medias quaerimus. Veluti si duas, oportet dividi in tres partes, ut hinc punctis ΔZ, e quibus eductae ad lineam perpendiculares $\Delta\Gamma$, ZY erunt mediae duae quaesitae inter ST, VX sive PR, QR. Quod facile demonstratur quia inter XV, TS cadit series infinita proportionalium ex natura lineae, earumque totidem inter XV, ZY quot inter ZY, $\Delta\Gamma$, ac inter $\Delta\Gamma$, TS; totidem inquam, quia partes XZ, $Z\Delta$, ΔT sunt aequales, innumeraeque illae proportionales aequalibus intervallis a se mutuo distant.

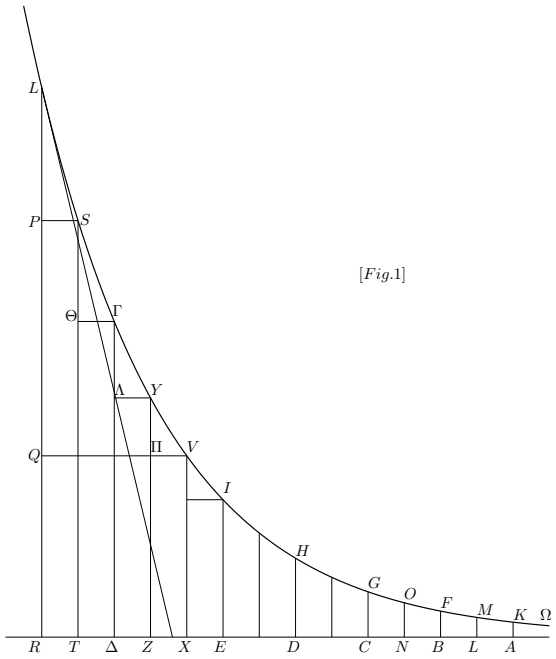

Figura 5.15: Teoremi di Huygens sulla curva logaritmica.

Due regioni di spazio qualunque delimitate da coppie di rette perpendicolari tracciate alla stessa distanza come sono le regioni $TS\Gamma\Delta$, $YZXV$ stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra la perpendicolare maggiore di una di esse e la perpendicolare maggiore dell'altra o nel rapporto tra le perpendicolari minori, come si dimostra molto facilmente.[34] (p.462 di [12])

Questo teorema, non dimostrato, afferma (Fig. 5.15)

$$\frac{A(TS\Gamma\Delta)}{A(YZXV)} = \frac{TS}{YZ} = \frac{\Gamma\Delta}{XV}:$$

la seconda uguaglianza è una conseguenza dell'uguaglianza tra $T\Delta = \log(ST) - \log(\Gamma\Delta)$ e $ZX = \log(YZ) - \log(VX)$. La prima uguaglianza si ottiene suddividendo i segmenti $T\Delta$ e ZX in tante parti uguali cosicché, per la prima parte del teorema, tutti i rettangoli circoscritti alla curva logaritmica di ugual base lungo i segmenti $T\Delta$ e ZX hanno aree che stanno tra loro nel rapporto $\frac{TS}{YZ} = \frac{\Gamma\Delta}{XV}$. Confondendo le porzioni sottese dalla curva logaritmica con questi plurirettangoli, si ottiene il risultato. Da ciò Huygens deduce il seguente teorema, applicazione di proprietà elementari delle proporzioni:

La regione di spazio delimitata da due perpendicolari qualsiasi sta alla regione adiacente che si estende all'infinito come la differenza tra le perpendicolari

[34] Spatia duo quaevis a binis perpendicularibus intercepta quae aequalibus intervallis distant ut sunt spatia $TS\Gamma\Delta$, $YZXV$, eam inter se rationem habent quam major unius perpend.^{is} ad maiorem perpend^{em} alterius vel quam minor ad minorem facillime demonstratur.

sta alla perpendicolare minore. Così lo spazio $ST\Delta\Gamma$ *sta allo spazio infinito* $\Gamma HK\Omega\Delta$ *come* $S\Theta$ *sta a* $\Gamma\Delta$. *Se infatti a partire da segmenti di lunghezza uguale allo stesso* $T\Delta$ *si tracciano delle perpendicolari* YZ, VX, IE, *ecc. all'infinito, per quanto visto prima la regione* $ST\Delta\Gamma$ *sta alla regione* ΓZ *come* ST *sta a* $\Gamma\Lambda$, *cioè come* $S\Theta$ *sta a* $\Gamma\Lambda$, *poiché* $S\Gamma$, $\Gamma\Delta$, YZ *sono proporzionali; di nuovo,* ΓZ *ad* YX *come* $\Gamma\Lambda$ *sta ad* $Y\Pi$. *Pertanto la regione* $S\Delta$ *sta ad* YX *come* $S\Theta$ *sta ad* $Y\Pi$; *e procedendo si avrà che la regione* $S\Delta$ *sta a tutte le regioni* ΓZ, YX, *ecc. all'infinito come* $S\Theta$ *sta a tutti* $\Gamma\Lambda$, $Y\Pi$ *ecc. che, messi insieme dànno proprio* $\Gamma\Delta$. *Dunque, ecc.*[35] (p.462 di [12])

La logica della dimostrazione è la seguente. Dal teorema precedente

$$\frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(\Gamma\Delta YZ)} = \frac{ST}{\Gamma\Delta}$$

e, siccome i segmenti $T\Delta$, ΔZ, ZX, ecc. sono uguali, per la definizione di curva logaritmica si ha anche

$$\frac{ST}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{YZ}$$

e dunque, per proprietà dello scomporre,

$$\frac{ST}{S\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda\Gamma} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{ST}{\Gamma\Delta} = \frac{S\Theta}{\Lambda\Gamma}$$

da cui segue

$$\frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(\Gamma\Delta YZ)} = \frac{S\Theta}{\Gamma\Lambda}$$

e via discorrendo per tutte le coppie di intervalli costruiti. Con questo risultato, si ha che

$$\frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(\Gamma\Delta YZ)} = \frac{S\Theta}{\Gamma\Lambda}, \qquad \frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(YZXV)} = \frac{S\Theta}{Y\Pi}....$$

per cui, invertendo tutte le proporzioni e sommando si ha

$$\frac{A(ST\Delta\Gamma)}{A(\Gamma HK\Omega\Delta)} = \frac{S\Theta}{\Gamma\Delta}$$

che prova il teorema.

Una diretta applicazione dei risultati ottenuti permette di dimostrare il teorema seguente

Le regioni delimitate da due segmenti di perpendicolare come CE [Fig. 2] e GN stanno tra loro nello stesso rapporto tra le differenze delle perpendicolari, cioè

[35] Spatium quodvis a binis perp.^{bus} interceptum est ad spatium deinceps decrescens in infinitum ut differentia perpendicularium ad perpend^{em} minorem. Sic spatium ST$\Delta\Gamma$ est ad spatium infinitum $\Gamma HK\Omega\Delta$ ut $S\Theta$ ad $\Gamma\Delta$. Si enim aequalibus intervallis ipsi $T\Delta$ constituantur perpendiculares YZ, VX, IE, &c. in infinitum. Quia spatium $ST\Delta\Gamma$ ad spatium ΓZ ut ST ad $\Gamma\Lambda$ per praeced.^{m} hoc est ut $S\Theta$ ad $\Gamma\Lambda$ quia tres $S\Gamma$, $\Gamma\Delta$, YZ sunt prop.^{es}; Et rursus spatium ΓZ ad YX sicut $\Gamma\Lambda$ ad $Y\Pi$. Ideoque spatium $S\Delta$ ad YX sicut $S\Theta$ ad $Y\Pi$; atque ita porro, Erit proinde spatium $S\Delta$ ad omnia spatia ΓZ, YX, &c. in infinitum ut $S\Theta$ ad omnes $\Gamma\Lambda$, $Y\Pi$ &c. quae simul efficiunt ipsam $\Gamma\Delta$. Ergo &c.

come CH sta a GL. Condotta infatti GK parallela ad AB, poiché per quanto appena visto la regione CE sta alla regione infinita DEA come CH sta ad HB e similmente la regione DF sta alla regione infinita GFA come DK sta a KE, invertendo e componendo, la regione infinita GFA unita alla regione DF, cioè la regione infinita DEA, sta alla regione DF come DE, ovvero HB, sta a DK, da cui si deduce che la regione CE sta alla regione DF come CH sta a GL, come si doveva dimostrare.[36] (pp.462-463 di [12])

Anche qui si tratta di applicare proprietà delle proporzioni. Per quanto

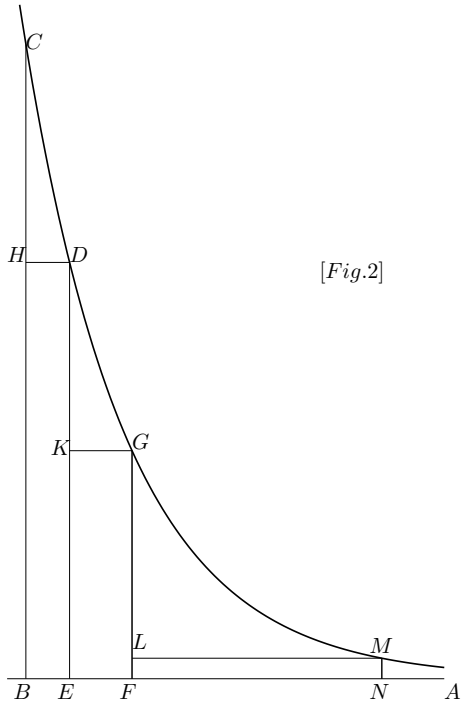

Figura 5.16: Teoremi di Huygens sulla curva logaritmica.

dimostrato appena prima

$$\frac{A(CBED)}{A(DEA)} = \frac{CH}{HB} = \frac{CH}{DE} \qquad \text{e} \qquad \frac{A(DEFG)}{A(GFA)} = \frac{DK}{KE}$$

[36]Spatia quaevis duo a duabus perpend.^{bus} intercepta ut CE [Fig.2], GN sunt inter se sicut perpendicularium differentiae, hoc est hic ut CH ad GL, ducatur enim et GK parall. AB.

Quia ergo per praeced. spatium CE est ad spatium infinitum DEA ut CH ad HB. Spatiumque similiter DF ad spatium infinitum GFA ut DK ad KE, Et invertendo et componendo spatium infinitum GFA una cum spatio DF, hoc est spatium infinitum DEA ad spatium DF ut DE sive HB ad DK, Erit ex aequo spatium CE ad spatium DF ut CH ad GL. quod erat ost.

ed ancora, per la proprietà del comporre,

$$\frac{A(DEA)}{A(DEFG)} = \frac{HB}{DK} \qquad \text{da cui} \quad \frac{A(CBED)}{A(DEFG)} = \frac{CH}{DK}\,.$$

Con argomento simile si mostra che

$$\frac{A(DEFG)}{A(GFNM)} = \frac{DK}{GL}$$

e dunque si giunge al risultato cercato

$$\frac{A(CBED)}{A(GFMN)} = \frac{CH}{GL}.$$

A questo punto Huygens passa a mostrare la costanza della sottotangente con un procedimento un po' diverso rispetto a quello adoperato da Torricelli e che poggia sulla convessità della curva logaritmica.

Se la curva logaritmica è tangente ad una retta e a partire dal punto di tangenza si traccia la perpendicolare all'asintoto, la lunghezza del segmento sull'asintoto delimitato dalla perpendicolare tracciata e dall'intercetta sulla tangente è sempre la stessa.

Siano [Fig. 3] AE e BF tangenti ed AC e BD le perpendicolari all'asintoto a partire dai punti A e B: dico che i segmenti CE e DF sono uguali. O ancor meglio; sia AE tangente e si prenda DF uguale allo stesso CE; dico che anche FB è tangente in B.

Infatti, si consideri su BF un punto O distinto da B, da cui si conduca la perpendicolare POQ e, preso un segmento CS uguale a DQ e dalla stessa parte, si tracci la perpendicolare SHG che taglia in H la tangente AE e la curva in G. Dunque GS sarà maggiore di HS. Tuttavia AC sta ad HS, cioè CE sta ad SE o ancora DF sta a QF come BD sta ad OQ. Invertendo la proporzione, HS sta ad AC come OQ sta a BD. Tuttavia AC sta a GS come BD sta a PQ, visto che CS e DQ sono uguali. Pertanto si conclude che HS sta a GS come OQ sta a PQ. Ora, GS era maggiore di HS per cui anche PQ sarà maggiore di OQ. Segue da ciò che il punto O si trova dalla parte convessa della curva AB. Al medesimo modo si dimostra che un punto N, preso dall'altra parte rispetto a B, cade nella parte convessa della curva AB. Dunque la retta NBOF la tocca in B, come si doveva dimostrare.[37] (p.463 di [12])

[37] Si curvam linea recta contigat et a puncto contactus in asymptoton perpendicularis ducatur; erit pars asymptoti inter perpendicularem et tangentem intercepta, eidem semper lineae rectae aequalis.

Sint hic [Fig. 3] tangentes AE, BF, et a punctis A, B, perpendiculares in asymptoton, AC, BD, dico partes CE, DF esse aequales. Vel potius sic; sit AE tangens, sitque ipsi CE aequalis DF; dico et FB tangentem esse in B.

Sumatur enim in recta BF quodlibet punctum praeter B, ut O, per quod ducatur perpendicularis POQ, et, sumta ipsi DQ aequali CS in eandem partem, erigatur perpendicularis SHG, secans tangentem AE in H, curvam vero in G. Erit itaque GS major quam HS. Est autem ut AC ad HS hoc est ut CE ad SE, sive ut DF ad QF, ita BD ad OQ. Et invertendo est HS

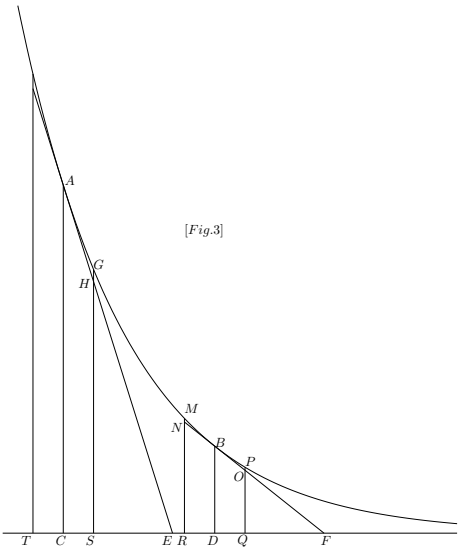

Figura 5.17: L'invarianza della sottotangente mostrata da Huygens.

Lo spunto di partenza è ancora quello di Torricelli: si mostra che se DF=CE e se la retta AE è tangente alla curva logaritmica in A, allora BD è tangente in B. Per raggiungere lo scopo, si prende un punto O su BF, distinto dagli estremi, si traccia il segmento PQ passante per O, ortogonale all'asintoto e si riporta CS=DQ. Il segmento SHG, parallelo a PQ, taglia la curva in G, la tangente AE in H e, vista la convessità della curva, deve essere $GS > HS$. D'altra parte, per similitudine dei triangoli ACE ed HSE, si ha $AC : HS = CE : SE = DF : QF$, per costruzione. Ancora, per similitudine tra BDF e OQF, $DF : QF = BD : OQ$ e dunque, in definitiva, $HS : AC = OQ : BD$. Poiché i segmenti CS e DQ sono uguali, per le proprietà della curva logaritmica segue $AC : GS = BD : PQ$ che, combinata con la proporzione precedente, consente di concludere che $HS : GS = OQ : PQ$. Ora, visto che $GS > HS$, deve essere anche $PQ > OQ$ da cui segue, data l'arbitrarietà di O, che tutto il segmento BF sta dalla parte convessa della curva AB. Similmente si può concludere per i punti N posti a sinistra di B ed ottenere che la retta BF ha solo il punto B in comune con la curva logaritmica e dunque è tangente in B.

Torricelli aveva dimostrato come costruire tutte le tangenti *nota* una tangente alla semiperbole ma non aveva dato indicazioni su come tracciare la tangente di riferimento. Questo problema viene risolto da Huygens in questi termini (Fig. 5.18).

---

ad AC ita OQ ad BD. Set ut AC ad GS ita est BD ad PQ, propter intervalla aequalia CS, DQ. Ergo ex aequo erit ut HS ad GS ita OQ ad PQ. Erat autem GS major quam HS, ergo et PQ major quam OQ. Unde apparet punctum O esse a parte convexa curvae AB. Eodem modo autem et punctum N sumtum ab altera parte puncti B ostendetur cadere ad partem convexam curvae AB. Ergo tangit eam recta NBOF in puncto B. quod erat dem.

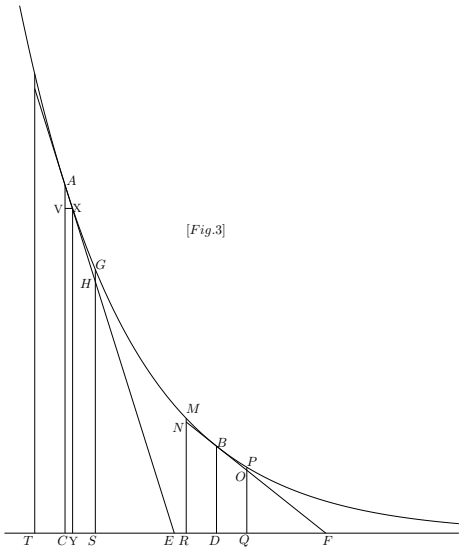

Figura 5.18: Determinazione geometrica di $\log_{10} e$.

Ritengo che non sia possibile trovare con un procedimento geometrico la lunghezza del segmento CE ovvero di DF grazie al quale sarebbe possibile tracciare la tangente in un punto qualsiasi, ma che sia possibile approssimarla bene quanto si vuole grazie ai logaritmi. Se infatti consideriamo un triangolo minimo AVX, il cui lato AX possa ritenersi parte sia della curva AB che della tangente AE ed assumiamo che i segmenti di perpendicolare AC ed XY siano due numeri con una differenza minima, come 100000 e 99999, allora VX o CY, sarà pari alla differenza dei logaritmi di questi numeri che in questo caso è 43430, come si ottiene dalle tavole. Se allora AV che è 1 sta a VX 43430 allora AC 100000 sta a CE, 4343000000, dal momento che la differenza tra i logaritmi dei numeri 100000 e 99999 è 43430, mentre il logaritmo di due è 3010299957. Il segmento che corrisponde al logaritmo di due si ottiene facilmente considerando due segmenti verticali compresi tra la curva e l'asintoto uno dei quali è doppio dell'altro, come GS ed MR: allora il segmento SR corrisponde al logaritmo di due. Pertanto come 30102 sta a 43430 cioè circa 3 sta a $4\frac{1}{3}$ *così SR sta all'altro segmento CE oppure DF che abbiamo chiamato latus rectum della curva. Questo poi si può determinare con maggior accuratezza se, invece di considerare i numeri 100000 et 99999, lo si ricerca con i numeri 1 ed* $1\frac{1}{100000000000000000}$*, trovando CE 43429448190325180 4 mentre il logaritmo di due è 301029995663981195. L'uso di questo latus rectum sarà chiaro in seguito.*[38](Huygens, pp.463-464 di [7])

[38]Longitudo lineae CE vel DF cujus ope tangens in quovis puncto duci posset, non potest ratione ulla geometrica, ut puto, inveniri sed ex logarithmis quamlibet proxime. Nam si consideremus triangulum minimum AVX, cujus latus AX tam curvae AB quam tangentis AE portio censendum est, et perpendiculares AC, XY duos numeros esse putemus minimo quodam excessu inter sese superantes, ut 100000 et 99999. Erit VX vel CY, logarithmorum

La costruzione di Huygens si traduce formalmente come segue. Si considerino due punti A ed X sulla curva logaritmica tali che le loro ordinate AC ed XY siano in un rapporto prossimo ad 1: nell'esempio numerico, come 100000 : 99999, ma in generale sono due numeri del tipo b e $b(1-\varepsilon)$ con $\varepsilon \ll 1$. Pertanto

$$VX = CY = \log(AC) - \log(XY) = \log \frac{1}{(1-\varepsilon)}$$

che vale $43430(4342923104 \cdot 10^{-6})$ nell'esempio considerato. Per similitudine dei triangoli AVX ed ACE si ottiene

$$CE = VX \frac{AC}{AV} = 4343000000(0.4342923104)\,.$$

D'altra parte è semplice trovare due punti S ed R sull'asintoto della curva tali che SR sia il $\log 2$: è sufficiente determinare due punti G ed M sulla curva logaritmica di ordinate $GS = 2MR$. Poiché $\log 2 \simeq 30102(0.3010299957)$ si può dire che $SR : CE = 3 : 4\frac{1}{3}$ che permette di risalire al valore di CE, noto SR. Il valore numerico di CE è tanto più preciso quanto più vicino ad 1 è il rapporto in cui stanno AC ed XY.

Qual è il significato del numero trovato da Huygens? Prendiamo la curva $y = a^x$ e determiniamo l'equazione della sua tangente tracciata da $A \equiv (x_0, a^{x_0})$. Osservato che $a^x = e^{x \ln a}$ e posto $M := \ln a$ abbiamo $y'(x) = Ma^x$ e dunque l'equazione della tangente in A è

$$y - a^{x_0} = Ma^{x_0}(x - x_0)\,.$$

Posto $y = 0$, l'ascissa x_E di E soddisfa

$$x_E - x_0 = -\frac{1}{M}$$

che mostra analiticamente la costanza della sottotangente. D'altra parte, usando le formule per il cambiamento di base nei logaritmi, si conclude che

$$-\frac{1}{M} = -\frac{\log \mathrm{e}}{\log a}\ :$$

preso $a = 1/10$, la costruzione della sottotangente consente di determinare $\log \mathrm{e} = 0.4342944818$. Huygens ha dunque determinato geometricamente il logaritmo decimale della base dei logaritmi *naturali*.

---

ipsorum differentia quae inter istos est 43430, ut patet ex tabulis. Jam si igitur fiat ut AV quae est 1 ad VX 43430 ita AC 100000 ad CE, 4343000000, qualium nempe differentia inter logarithmos numerorum 100000 et 99999 est 43430, qualiumque logarithmus binarij est 3010299957. linea autem quae referat logarithmum binarij facile invenitur, applicando tantum duas perpendiculares inter curvam et asymptoton quarum altera sit alterius dupla velut GS, MR, nam SR intervallum referet logarithmum binarij. Ergo si fiat ut 30102 ad 43430 hoc est proxime ut 3 ad $4\frac{1}{3}$ ita SR ad aliam ea erit linea CE vel DF, quam latus rectum curvae huius appellabimus. Invenitur autem adhuc accuratius si loco numerorum 100000 et 99999, quaeritur per numeros 1 et $1\frac{1}{100000000000000000}$, sit enim CE 434294481903251804 qualium logarithmus binarij est 301029995663981195. Patebit autem usus hujus lateris recti in sequentibus.

Huygens si occupa ora della quadratura di settori limitati dalla curva logaritmica, dal suo asintoto e da una coppia di rette perpendicolari ad esso. Anche qui, le sue dimostrazioni sono varianti di quelle di Torricelli ed evitano la riduzione all'assurdo.

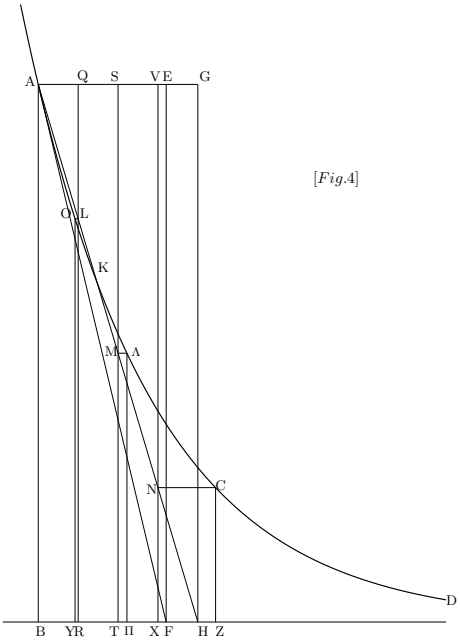

Figura 5.19: La quadratura di un settore delimitato dalla curva logaritmica.

Se da un punto A qualsiasi della curva [Fig. 4] si traccia la perpendicolare AB all'asintoto, dico che il rettangolo ABFE determinato da AB e dal latus rectum BF è equivalente alla regione infinita compresa tra la curva, la perpendicolare AB e l'asintoto BZ.

Si consideri anzitutto un rettangolo AH avente AB per lato ed area maggiore di AF. Dico che questo rettangolo è anche maggiore della regione infinita summenzionata. Tracciate infattti le diagonali AF ed AH in entrambi i rettangoli, AF deve essere tangente alla curva in A, dal momento che BF è uguale al latus rectum. Dunque una certa parte AK del segmento AH cade dentro la parte concava della curva. Si divida AH in un certo numero di parti uguali nei punti L, M, N, in modo che una qualsiasi di queste parti sia minore di AK. I segmenti tracciati per i punti della suddivisione parallelamente ad AB dividono il rettangolo AH in rettangoli uguali come AR, QT ecc. Dagli stessi punti si traccino segmenti paralleli all'asintoto come LO, MΛ, NC, e dai punti dove essi incontrano la curva AC, si traccino delle perpendicolari all'asintoto come OY, ΛΠ e CZ cosicché le regioni comprese tra due qualsiasi di esse, come AOYB, OΛΠY, ΛCZΠ siano uguali tra loro ed anche all'ultima regione illimitata CZD, come mostrato in precedenza in quanto le differenze tra le due perpendicolari che

delimitano gli spazi predetti sono uguali per costruzione. Ora in verità è lecito supporre il rettangolo AR maggiore della regione AOYB, che ne è una parte, dal momento che necessariamente OY giace tra AB ed LR. Dunque anche il rettangolo SR sarà maggiore della regione $OY\Pi\Lambda$ *che è a sua volta equivalente ad* $AOYB$*. Il rettangolo VT sarà poi maggiore della regione* $\Lambda\Pi ZC$ *e così via tutti i singoli rettangoli, se ce ne sono di più, sono maggiori degli spazi seguenti fino al rettangolo VH che è maggiore dell'ultima regione infinita CZD. Pertanto tutti i rettangoli insieme superano tutte le altre regioni; cioè, il rettangolo* $ABHG$ *sarà maggiore della regione* $ABDC$.[39] (Huygens, pp.464-465 di [12]).

Segnaliamo le varianti rispetto alle argomentazioni di Torricelli. Anzitutto, Huygens formalmente non ricorre all'ipotesi per assurdo in quanto dapprima mostra che ogni rettangolo che contiene quello ABFE avente per lati l'ordinata iniziale ed il *latus rectum* ha area maggiore del segmento illimitato ABD. In seguito, mostrerà che rettangoli contenuti in ABFE hanno area minore del segmento ABD. Il primo passo consiste nel prendere un rettangolo $ABHG \supseteq ABFE$ e tracciare le diagonali AF ed AH, delle quali la prima è tangente alla curva logaritmica in A, la seconda è secante in un punto K. Su AH si determinano tre punti L, M, N tali che $AL = LM = MN < AK$ e si conducono a partire da essi le parallele all'asintoto BZ che tagliano la curva rispettivamente in O, Λ e C. Poiché per costruzione le differenze tra le perpendicolari che delimitano gli spazi mistilinei AOYB, $O\Lambda\Pi Y$ e $ACZ\Pi$ sono uguali, gli spazi predetti sono equivalenti tra loro ed allo spazio infinito CZD (cfr. p. 182). Inoltre, sempre per costruzione, O giace alla sinistra di QR per cui il rettangolo AR ha area maggiore dello spazio mistilineo AOYB. Il rettangolo SR, equivalente al rettangolo AR, ha a sua volta area superiore rispetto allo spazio mistilineo $O\Lambda\Pi Y$ che è equivalente ad AOYB. Similmente, il rettangolo VT supera lo spazio mistilineo $\Lambda CZ\Pi$ ed, infine, VH ha area superiore allo spazio illimitato CZD, da cui segue la tesi. Per completare la dimostrazione, Huygens

[39] Si a puncto quolibet in curva sumpto ut A [Fig. 4] demittatur in asymptoton perpendicularis, AB, dico rectangulum quoddam ab AB et latere recto BF comprehensum nempe ABFE aequari spatio infinito inter curvam, perpendicularem AB et asymptoto BZ interjecto.

Fiat enim primo in eodem latere AB, rectangulum quoddam AH quod majus sit rectangulo AF. dico illud majus quoque esse dicto spatio infinito. Ductis enim diagonijs AF, AH rectangulorum utrorumque, constat quidem AF tangere curvam in A, quia BF ponitur esse latus rectum. Unde pars quaedam lineae AH cadet intra curvae cavam partem, puta AK. dividatur AH in partes tot aequales punctis L,M, N, ut earum quaelibet sit minor quam AK. Et ductis per ea puncta rectis parallelis AB, divident eae rectang.^{m} AH in rectangula aequalia ut sunt AR, QT &c. ab ijsdem vero punctis si ducantur parallelae asymptoti lineae LO, MΛ, NC, et a punctis ubi hae concurrunt curvae AC, demittantur perpendiculares in asymptoton velut OY, $\Lambda\Pi$, CZ, sient etiam spatia inter binas quasque earum interjecta inter se aequalia ut sunt $AOYB$, $O\Lambda\Pi Y$, $\Lambda CZ\Pi$ ac denique etiam infimum spatium infinitum CZD, ut constat ex praecedentibus, quia nempe differentiae duarum perpendicularium dicta spatia comprehendentium sunt ex constr.^{e} aequales. Jam vero rectang.^{um} AR majus esse liquet spatio AOYB, cum hoc illius pars sit, nam OY necessario cadet inter AB et LR. Ergo et $\square SR$ majus erit spatio $OY\Pi\Lambda$, quippe quod aequale est spatio $AOYB$. Item $\square VT$ majus erit spatio $\Lambda\Pi ZC$ atque ita singula rectangula si plura forent, singulis sequentibus spatijs quum per utrorumque fit numerus, ac denique ultimum $\square VH$ majus quoque spatio infimo ac infinito CZD. Itaque omnia rectangula omnibus simul spatijs; hoc est rectangulum ABHG spatio infinito $ABDC$ majus erit.

ripete argomenti simili a partire da un rettangolo ABHG di area minore rispetto ad ABFE.

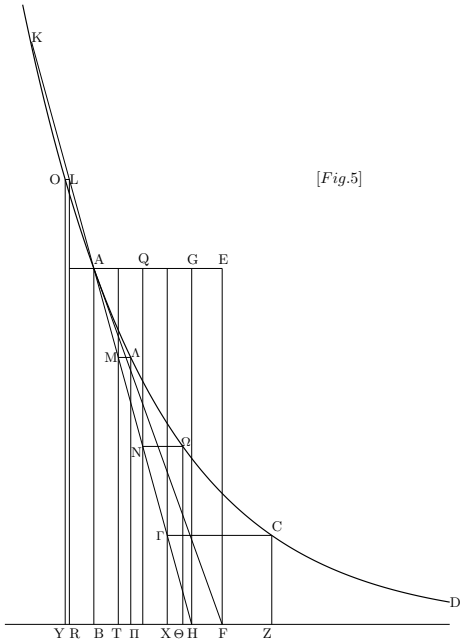

Figura 5.20: La quadratura di un settore delimitato dalla curva logaritmica.

Si consideri un nuovo rettangolo ABHG [Fig. 5] di area minore del rettangolo ABFE; dico che un tale rettangolo avrà anche area minore della regione infinita ADB. Tracciate come prima le diagonali AF ed AH, poiché AF è tangente in A alla curva, AH la taglierà in un punto sul suo prolungamento dalla parte di A ed il prolungamento AK si trova nella parte concava della curva. Si divida AH in tante parti uguali affinché una parte come AL tracciata sul prolungamento di AH non raggiunga K. Ripetendo la costruzione precedente, è evidente che il rettangolo AR è più piccolo della regione AOYB, essendone una parte, dal momento che è evidente che ora LR cade tra OY ed AB. Da ciò segue anche che il rettangolo AT è minore della regione $A\Lambda\Pi B$ e ogni rettangolo è equivalente al precedente così come ogni spazio equivale al precedente; per il medesimo motivo il rettangolo QT sarà minore della regione $\Lambda\Omega\Theta\Pi$ ed il rettangolo QX della regione $\Omega CZ\Theta$, ed il rettangolo GX della regione illimitata CDZ, che pure è equivalente alle regioni precedenti. Dunque è evidente che l'intero rettangolo ABHG ha area minore della stessa regione infinita $A\Omega CDBA$. Poiché allora è stato mostrato che ogni rettangolo di area maggiore del rettangolo ABFE ha anche area maggiore della regione infinita ACDB e che ogni rettangolo di area minore del rettangolo ABFE è pure minore dello spazio predetto; è necessario che il rettangolo ABFE sia equivalente alla medesima regione illimitata, come si doveva dimostrare.

Osserva che questa tecnica di dimostrazione evita la riduzione all'assurdo cosa che altrove abbiamo visto essere possibile a certe condizioni.[40] (pp.465-466 di [12])

Non ripetiamo l'analisi del testo ma segnaliamo solo che ora la retta AH viene prolungata oltre ad A fino a raggiungere l'intersezione K con la curva logaritmica. Da questo momento la dimostrazione segue un percorso sovrapponibile alla precedente. Huygens ha segnalato esplicitamente di aver evitato il ricorso alla dimostrazione per assurdo: il metodo è del tutto equivalente, ma la via diretta di Huygens è un po' più leggera rispetto a quella seguita da Torricelli.

La parte dedicata alla quadratura dei settori delimitati da una curva logaritmica si chiude con una serie di corollari, il primo dei quali afferma semplicemente che, per misurare il segmento illimitato ABD sotteso (Fig. 5.21) dalla curva logaritmica, è sufficiente raddoppiare l'area del triangolo rettangolo ABF che ha l'ipotenusa AF lungo la tangente alla curva in A.

Se pertanto da un medesimo punto della curva si tracciano la perpendicolare all'asintoto e la tangente alla curva come qui [Fig. 6] sono AB ed AF, il triangolo ABF avrà sempre area pari alla metà della regione illimitata ABD.[41] (p.466 di [12])

Il corollario successivo (Fig. 5.22) serve ad esprimere l'area delimitata dall'arco AH di curva logaritmica, dall'asintoto e dai segmenti verticali AB, HL che uniscono l'arco all'asintoto.

Una qualsiasi regione limitata da due segmenti ortogonali all'asintoto come la regione ABHL [Fig. 7], sarà equivalente al rettangolo avente per lati il latus rectum e la differenza dei due segmenti come, in questo caso, il rettangolo AK. Infatti, poiché la regione illimitata HLD è equivalente al rettangolo AF e la regione illimitata HLD è equivalente al rettangolo CF, la regione residua ABLH sarà equivalente al rettangolo residuo AK.[42] (p.466 di [12])

---

[40] Esto rursus □ quoddam ABHG [Fig. 5] quod sit minus rectangulo ABFE; dico illud minus quoque esse spatio infinito ADB. Ductis enim ut ante diagonijs AF, AH, cum AF tangat curvam in A, secabit eam recta HA versus A producta; productaque pars cadet intra cavitatem curvae ut AK. Dividatur AH in tot partes aequales ut earum una apposita in producta HA, velut AL, non pertingat ad K. Constructis porro reliquis ut prius. patet rectangulum AR minus esse spatio AOYB eius nempe pars est, nam LR manifesto nunc cadit inter OY et AB. Hinc ergo et rectang. AT minus erit spatio $A\Lambda\Pi B$, cum et rectangulum rectangulo et spatium spatio priori fit aequale, eadem ratione rectang.^{m} QT minus erit spatio $\Lambda\Omega\Theta\Pi$, et $\square^{\text{m}}$ QX spatio $\Omega CZ\Theta$, et $\square GX$ spatio CDZ infinito, quod nempe et ipsum reliquis spatijs aequale est. Itaque totum rectang.^{m} ABHG minus esse patet ipso omni $A\Omega CDBA$ infinito. Cum igitur ostensum sit rectangulum quodlibet quod majus est rectangulo ABFE, majus quoque esse spatio ACDB infinito; item rectangulum quodvis quod minus est rectangulo ABFE minus quoque esse praedicto spatio; necesse est rectangulum ipsum ABFE eidem spatio infinito aequale esse, quod erat dem.

Nota vero hunc modum demonstrandi sine deductione ad absurdum, quae videtur hoc pacto alibi quoque devitari posse.

[41] Si ergo ab eodem puncto curvae perpendicularis in asymptoton, et tangens ducatur ut sunt hic [Fig. 6] AB, AF, erit semper triangulum ABF dimidium spatij totius infiniti ABD.

[42] Spatium quodvis inter duas perpendiculares interceptum ut ABLH [Fig. 7], aequale erit rectangulo sub latere recto et differentia dictarum perpendicularium, ut hic rectangulum AK. Nam cum spatium infin. ABD sit aequale $\square^{\text{lo}}$ AF; spatium vero infin. HLD aequale $\square^{\text{lo}}$ CF;

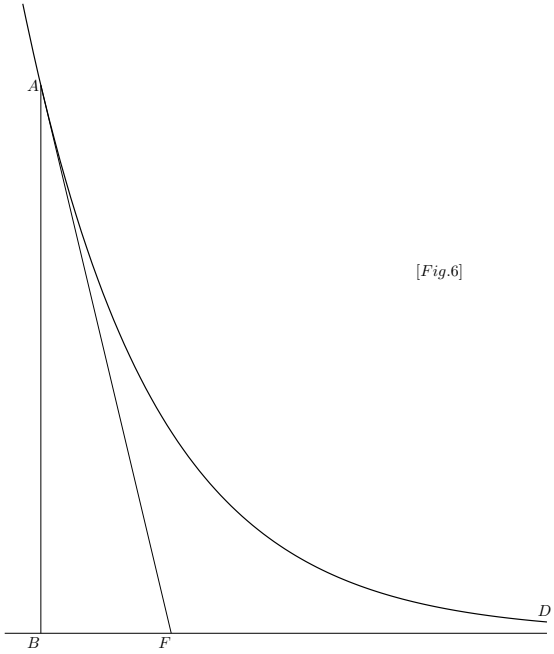

Figura 5.21: Il triangolo ABF è equivalente a metà dell'area sottesa dalla curva logaritmica, limitata a sinistra da AB.

Questo risultato viene dimostrato in un secondo modo che fa ricorso ad un passaggio al limite. Con riferimento alla Figura 5.23, HUYGENS dimostra che il quadrilatero misto ABDC è equivalente al doppio della porzione delimitata dall'arco AC, dall'asintoto e dalle tangenti AF e CE.

Si può dare un'altra dimostrazione del risultato precedente se si dimostra che la regione ABDC [Fig. 8] delimitata dai segmenti AB e CD ortogonali all'asintoto è sempre equivalente al doppio della regione compresa tra le due tangenti AF e CE alla curva condotte dai medesimi punti.

Divisa la base BD in parti uguali BH, HN ecc. si traccino i segmenti perpendicolari HK, NP e dai punti A, K, P della curva si traccino le tangenti AF, KM ecc. e si complétino i rettangoli BG, BK, KN, PH ecc. e si chiamino L, Q, ecc. i punti di intersezione tra due tangenti consecutive. Dall'uguaglianza tra BF, HM, NR ecc. anche FM, MR, ecc. saranno uguali tra loro e ai singoli segmenti BH, HN, NO ecc. Così il triangolo FLM sarà minore di $\frac{1}{2}$ del rettangolo AH ma maggiore di $\frac{1}{2}$ del rettangolo KB. Similmente il triangolo MQR sarà minore di $\frac{1}{2}$ del rettangolo KN ma maggiore di $\frac{1}{2}$ del rettangolo PH. E dunque l'intera figura composta da tutti i triangoli sarà minore di $\frac{1}{2}$ della figura formata dai rettangoli circoscritti ma maggiore della metà di quella formata dai rettangoli inscritti. Da ciò segue facilmente che la regione ACEF è equivalente alla metà della regione

erit reliquum spatium ABLH aequale $\square^{\text{lo}}$ reliquo AK.

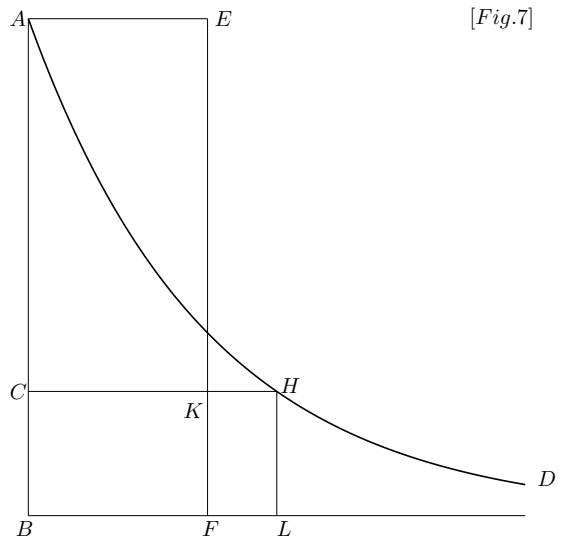

Figura 5.22: Equivalenza tra il settore sotteso da AB ed HL ed il rettangolo CL.

ACDB. Dal momento che questa proprietà vale comunque si scelga il segmento perpendicolare CD è evidente che, quando CD è infinitamente piccola, la regione ACEF sarà quella illimitata che giace tra la curva e l'asintoto e delimitata dal segmento AF. Pertanto la precedente regione infinita sarà equivalente a metà di quest'ultima e perciò anche il rettangolo restante AFB risulterà equivalente a metà della regione infinita ACXEB.[43] (pp. 466-467 di [12])

Huygens suddivide BD in un certo numero di parti uguali BH, HN e determina i rettangoli circoscritti AH, KN, PO,... e quelli inscritti BK, HP,... Da ciascuno dei punti K, P, C sulla curva logaritmica vengono tracciate le tangenti AF, KM,... e si considerano i punti L, Q,... di intersezione tra due tangenti consecutive, Poiché il *latus rectum* è costante ed il segmento BD è stato suddiviso in parti uguali, le basi dei triangoli FLM, MQR sono uguali tra di loro ed

[43] Alia praecedentis demonstratio datur, ostendendo ABDC [Fig. 8] terminatum duabus perpendicularibus AB, CD, duplum semper esse spatij inter duas tangentes AF, CE, ab ijsdem punctis eductas, intercepti.

Basis BD in partes aequales dividatur BH, HN &c. unde perpend.^{es} ad curvam erigantur HK, NP, &c. Et a punctis A, K, P &c. tangentes ducantur AF, KM &c. et compleantur rectangula BG, BK, KN, PH &c. et tangentes binae quaeque proxime sibi occurrant in punctis L, Q, &c. Jam quia BF, HM, NR &c sunt aequales fient et FM, MR, &c. aequales et singulae singulis BH, HN, NO &c. Itaque triang. FLM minus erit $\frac{1}{2}$ rectang.^{o} AH, majus vero $\frac{1}{2}$ $\square$ ^{lo} KB. Itidem triang.^{m} MQR, minus erit $\frac{1}{2}$ $\square$ KN, majus vero $\frac{1}{2}$ $\square$ PH. Atque ita composita figura es omnibus triang. minor erit $\frac{1}{2}$ figura ex circumscriptis rectang.^{lis} major vero dimidia figura ex rectangulis inscriptis. Unde facile ostendetur spatium ACEF dimidium esse spatij ACDB. Quod cum ubique contingat, ubicunque perpend.^{is} CD statuatur patet cum CD infinite parva erit, spatium ACEF, fore infinitum inter curvam et asymptoton iterjacens rectaque AF terminatum. Itaque illud spatium infinitum hujus infiniti spatij dimidium erit, ac proinde et rectangulum reliquum AFB ejusdem spatij infiniti ACXEB dimidium esse constabit.

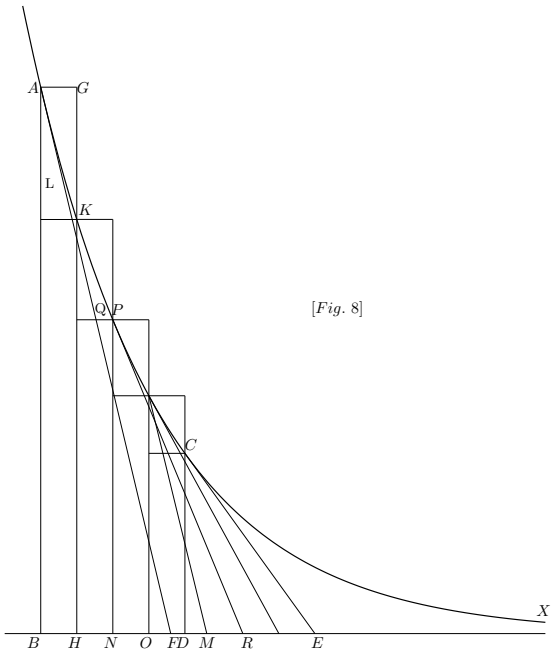

Figura 5.23: Equivalenza tra la porzione di curva logaritmica delimitata da AB e CD e la regione delimitata dall'asse delle ascisse e dalle tangenti AF e CE.

ai segmenti della suddivisione di BD. Ne consegue che

$$\frac{1}{2}A(KB) < A(FLM) < \frac{1}{2}A(AH) \qquad \frac{1}{2}A(PH) < A(MQR) < \frac{1}{2}A(KN) \quad ....$$

dove L, Q, ecc. sono i punti di intersezione tra due tangenti successive alla curva logaritmica. Dunque l'unione di tutti i triangoli costruiti ha area maggiore di metà del plurirettangolo inscritto nell'arco AC e minore del plurirettangolo circoscritto al medesimo arco. Idealmente, facendo tendere a zero l'ampiezza della suddivisione di BD si dimostra che il quadrilatero misto ACEF ha area metà del quadrilatero misto ACDB. Se ora C viene spostato lungo la curva all'infinito, ACEF diventa la porzione infinita compresa tra la curva logaritmica, AF e dall'asse delle ascisse, mentre ACDB diventa la porzione infinita delimitata a sinistra da AB che è l'unione della porzione ACEF precedente e del triangolo AFB. Dunque quest'ultimo equivale a metà della porzione ACXEB. La medesima tecnica serve ad Huygens per mostrare che il volume del cono generato dalla rotazione di ABF attorno a BE è i 2/3 di quello generato dalla rotazione della curva logaritmica AX attorno allo stesso asse. Infatti, il solido generato da FLM, differenza dei coni ottenuti per rotazione di LM ed LF attorno a BE deve avere volume più piccolo di 1/3 del volume del cilindro generato per rotazione attorno a BE dal rettangolo BH che ha altezza uguale ad FM, ma base più lunga. Similmente, il solido generato da FLM ha volume maggiore di 1/3

di quello del cilindro KB. Iterando la procedura, si conclude che il volume del solido infinito ottenuto per rotazione di ACXEFA attorno a BE è un terzo quello ottenuto per rotazione attorno allo stesso asse dalla regione ACEXBA e dunque il cono residuo generato da AFB ha volume pari ai 2/3 di quello generato da ACEXBA.

Si mostrerà qui che il solido illimitato attorno all'asse BE è equivalente ai 3/2 *del cono ottenuto per rotazione del triangolo AFB attorno a BF.*

Infatti, dal momento che il solido generato dal triangolo FLM è minore di $\frac{1}{3}$ *del cilindro generato dal rettangolo AH ma maggiore di* $\frac{1}{3}$ *del cilindro generato da KB, e via di seguito, si mostra facilmente che il solido generato da ACEF è equivalente ad* $\frac{1}{3}$ *del solido ottenuto dalla regione ACDB, qualunque sia la scelta dell'estremo CD. Pertanto il solido generato dalla regione infinita ACXEFA sarà equivalente ad* $\frac{1}{3}$ *del solido generato dalla regione infinita ACXEBA e dunque il cono generato dal triangolo AFB restante sarà equivalente a* $\frac{2}{3}$ *del solido generato dalla stessa regione ACXEBA.*[44] (p. 467 di [12])

Entriamo ora nell'ultima parte della memoria di Huygens che tratta della localizzazione del centro di massa di una lamina piana omogenea limitata da un arco, eventualmente illimitato, di curva logaritmica, dal suo asintoto e da due rette ortogonali a quest'ultimo. Per comprendere le dimostrazioni, è utile ricordare il teorema di Pappo-Guldino che afferma come, data una lamina piana omogenea $\mathcal{L}$ ed una retta r del piano che non la tagli in più parti, la distanza d del centro di massa di $\mathcal{L}$ da r sia legata all'area $A(\mathcal{L})$ della lamina ed al volume $V(\mathcal{B})$ del solido ottenuto per rotazione completa di $\mathcal{L}$ attorno ad r dalla formula

$$2\pi\, dA(\mathcal{L}) = V(\mathcal{B})\,.$$

Da questo risultato si evince che due lamine equivalenti che generano solidi di rotazione attorno ad r di ugual volume hanno centri di massa posti alla stessa distanza da r. Grazie a questa osservazione, Huygens trova facilmente (Fig. 5.24) la distanza del centro di massa della regione infinita ABEXA che, per quanto mostrato prima, è equivalente al rettangolo di area $BO \cdot BD$ avente base BO=AB/2 ed altezza BD doppia del *latus rectum* e che per rotazione attorno a BE genera un cilindro di volume $\pi BO^2 \cdot BD$ pari a quello del solido generato da ABEXA. Applicando il teorema di Pappo-Guldino si ricava che $d = BO/2 = AB/4$.

Si mostra qui che la distanza del centro di gravità della regione illimitata ABEXA è pari ad un quarto del segmento AB.

Presi infatti [Fig. 9] BD = 2BF e BO = $\frac{1}{2}AB$*, il rettangolo BOCD è equivalente al doppio del triangolo ABF e per questo equivalente alla regione*

[44] Hinc de solido spatij infiniti circa axem BE demonstrabitur, esse sesquialterum coni ex conversione trianguli AFB circa BF.

Nempe cum solidum a triang.o FLM sit minus quam $\frac{1}{3}$ cylindri a $\square^{\text{lo}}$ AH, majus vero quam $\frac{1}{3}$ cylindri a $\square^{\text{lo}}$ KB, atque ita de ceteris; facile ostendetur solidum a spatio ACEF, esse $\frac{1}{3}$ solidi a spatio ACDB idque ubicunque terminus CD statuatur. Unde solidum ab infinito spatio ACXEFA erit $\frac{1}{3}$ solidi ab infinito spatio ACXEBA, ac proinde conus a reliquo triangulo AFB aequabitur $\frac{2}{3}$ solidi ab eodem spatio ACXEBA.

illimitata ABEXA. Ora, il cilindro generato dal rettangolo BOCD per rotazione attorno a BD è equivalente al solido ottenuto per rotazione attorno a BE della predetta regione illimitata. Risulta allora che il cilindro ottenuto dalla rotazione di BOCD attorno a BD è equivalente a sei volte il cono ottenuto per rotazione di OFB attorno a BF e dunque equivalente a $3/2$ *del cono ottenuto per rotazione di AFB attorno allo stesso BF che abbiamo mostrato essere a sua volta equivalente al solido generato dalla regione illimitata ABEX. Pertanto occorre che i centri di gravità della regione infinita e del rettangolo BOCD siano equidistanti dal segmento BE; questa distanza è dunque la metà di BO, cioè un quarto di AB, q.e.d.*[45] (pp. 467-468 di [12])

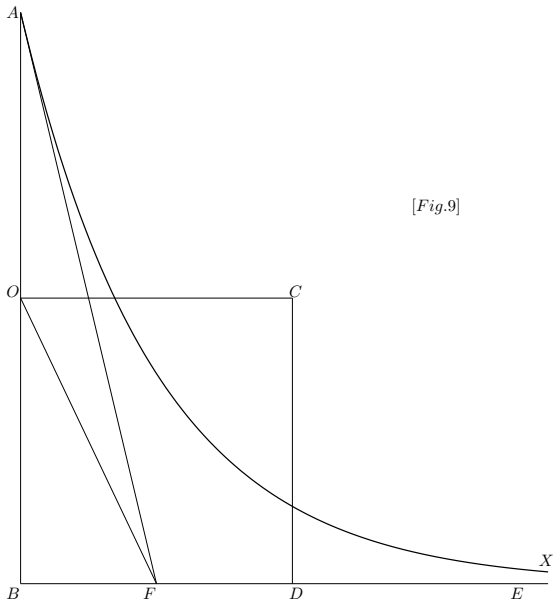

Figura 5.24: La distanza del centro di gravità della regione infinita $ABEXA$ è pari a $AB/4$.

Anche in questo caso Huygens offre una seconda dimostrazione che poggia su altri risultati ottenuti in precedenza. Precisamente, egli aveva mostrato (Fig. 5.16) che due segmenti di curva logaritmica come $CDEB$ e $GMNF$ hanno aree che stanno in un rapporto uguale a CH/GL. Quindi, per ottenere segmenti

[45] Hinc porro et distantia centri grav.^{is} spatij infiniti ABEXA, ab asymptoto BE ostenditur esse quarta pars perpendicularis AB.

Sumta enim BD [Fig. 9] = duplae BF et $BO = \frac{1}{2}AB$, et completo $\square^{\text{lo}}$ BOCD, erit hoc duplum trianguli ABF ac proinde aequale spatio infinito ABEXA. Sed et cylindrus a $\square BOCD$ circa BD aequabitur solido ex conversione spatij dicti infiniti circa BE. Est enim cylindrus e conversione $\square BOCD$ sexcuplus coni a conversione triang.^{i} OFB circa BF, ideoque sesquialter coni a triang.^{o} AFB circa eandem BF, cujus coni et solidum a spatio infinito ABEX sesquialterum ostendimus. Itaque centra gr. solidi infiniti et $\square^{\text{i}}$ BOCD aequaliter distare necesse est linea BE; utraque igitur distat dimidia BO, hoc est quarta parte AB q.e.d.

logaritmici adiacenti equivalenti è sufficiente mantenere costante la differenza h tra i segmenti di retta che li limitano. Se la suddivisione è abbastanza fitta (Fig. 5.25), non si commette un grosso errore asserendo che il centro di massa del segmento logaritmico di altezza maggiore—pari ad AB— dista $BT = AB/2$ da BE. Similmente, gli altri rettangoli avranno centri di massa che si avvicinano a BE ogni passo di un segmento pari ad $h/2$. Poiché per costruzione i segmenti logaritmici sono equivalenti, le quote dei loro centri di massa dividono in parti uguali il segmento BT cosicché il centro di massa di ABEX cadrà a metà del segmento BT.

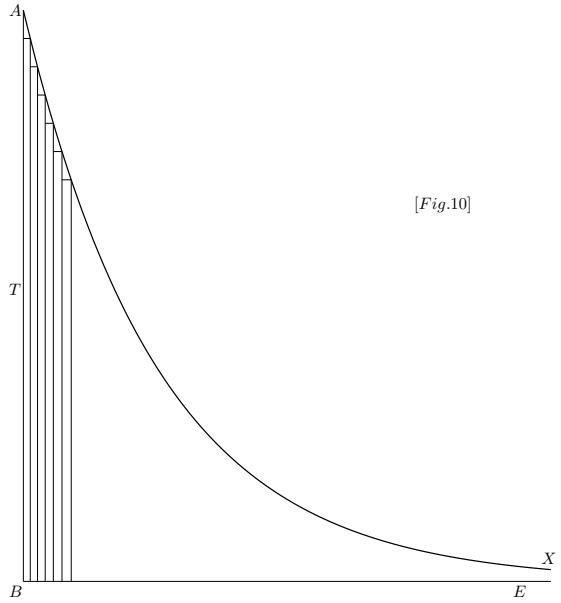

Figura 5.25: Dimostrazione alternativa del risultato mostrato in Figura 5.24.

Questà proprietà del centro di gravità si può dimostrare in un altro modo descrivendo dei rettangoli di uguale altezza inscritti nella regione illimitata ABEX [Fig. 10] ciascuno dei quali supera di poco il successivo. Se immaginiamo che tutte queste differenze coincidano tra loro, il centro di gravità del rettangolo più alto disterà dall'asintoto BE quanto la metà di AB e così i centri di gravità dei rettangoli successivi saranno sempre più vicini a BE di una quantità pari, evidentemente, a metà della differenza delle altezze di due rettangoli successivi. Poiché dunque i centri di gravità di grandezze uguali divideranno BT, metà di AB, in segmenti uguali: il centro di gravità complessivo cadrà nel punto medio di BT, cioè disterà dall'asintoto BE quanto $\frac{1}{4}$ *AB.*[46] (p. 468 di [12])

[46]Potest idem hoc de centro gr.^{is} aliter quoque ostendi descriptis intra spatium infinitum ABEX [Fig. 10] rectangulis quorum unumquodque aequali altitudinis excessu sibi proximum superet. Haec enim si multitudine infinita imaginemus poterunt haberi pro aequalibus inter se, altissimi autem centrum gr. distabit ab asymptoto BE per dimidiam AB, et sequentium

Huygens mostra poi che la distanza da AB del centro di massa di una regione illimitata come ABEX in Fig. 5.25 è pari al *latus rectum*. La dimostrazione è condotta in due parti, nella prima delle quali egli dimostra che tale distanza non può eccedere il *latus rectum*.

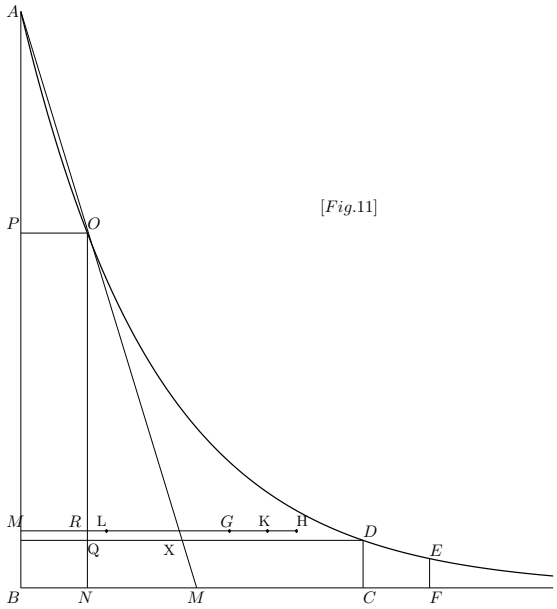

Figura 5.26: La distanza del centro di gravità G della porzione $ABCD$ ha distanza GM da AB inferiore al *latus rectum* ℓ.

Testo 5.2 (Huygens) (pp. 468-469 di [12]). Originale 5.4
Sia data una regione come ABCD [Fig. 11]; dico che il suo centro di gravità non può distare da AB più della lunghezza del latus rectum. Sia infatti possibile che il suo centro di gravità cada in un punto G tale che GM sia maggiore del latus rectum. Posso allora togliere da GM una particola come MR in modo che il segmento rimanente RG sia ancora maggiore del latus rectum. Si tracci il segmento NRO parallelo a BA e nel suo punto di intersezione O con la curva si tracci la retta AOM. È necessario che NM sia minore del latus rectum, dal momento che OM non è tangente ma secante alla curva in O. Sia OP parallela a BC e si consideri un segmento CF uguale allo stesso OP ovvero a BN, dalla parte acuta della regione illimitata e si tracci FE parallela a BA. Allora, poiché la base FN della porzione OEFN è uguale alla base CB della porzione ADCB si avrà anche che ON sta ad EF come AB sta a DC per cui, siccome entrambe le

deinceps centra gr. aequalibus semper intervallis propriora fient ipsi BE, quae scilicet, intervalla erunt dimidia excessus altitudinum proximorum rectangulorum. Cum igitur aequalium magnitudinum centra gravitatis in aequalia intervalla dividant lineam BT, dimidiam ipsius AB: erit commune omnium gravitatum centrum in medio ipsius BT, hoc est, distabit per $\frac{1}{4}$ AB ab asymptoto BE.

porzioni si possono pensare come composte da un numero altissimo di rettangoli aventi basi uguali e che decrescono nella medesima proporzione, è evidente (ma lo si può anche dimostrare accuratamente) che i centri di gravità di entrambe dividono in modo simile la distanza delle perpendicolari estreme di entrambe; poiché però la distanza da entrambe è uguale, i centri di gravità di entrambe le porzioni avranno la stessa distanza dalle loro perpendicolari maggiori AB, ON. Se si pone in G il centro di gravità della regione ADCB, preso RH=MG, il punto H sarà il centro di gravità della regione ONFE; se da quest'ultima regione si toglie DEFC, il cui centro di gravità cade all'interno della regione stessa, segue che il centro di gravità della regione restante ODCN cade tra i punti H e G, diciamo in K. Ora, poiché per quanto visto in precedenza, la regione AONB sta alla regione ODCN come AP ad OQ, cioè come OP sta ad XQ; se si prende un punto L in modo che OP sta ad XQ come KG sta a GL, L sarà centro di gravità della regione AONB, visto che G è veramente centro di gravità della regione ABCD e K è centro di gravità della regione ONCD. Tuttavia GL sarà minore di XQ, dato che anche KG è minore di OP; infatti l'intero HG era uguale allo stesso OP mentre XQ è minore di MN, minore a sua volta del latus rectum, come detto sopra. Dunque GL sarà certamente minore del latus rectum. Ma GR era maggiore dello stesso e dunque GL è minore di GR. Dunque il centro di gravità L della regione AONB cadrebbe all'esterno della regione stessa dimodoché, tracciata per L una retta, tutta la regione cadrebbe da una sola parte, che non è possibile.

Da questo risulta evidente che comunque si prenda CD, anche a distanza infinita da AB, il centro di gravità della regione delimitata da entrambe le rette non sarà più distante della lunghezza del latus rectum da AB e dunque giustamente si conclude che il centro di gravità di una regione illimitata non può distare da AB più della lunghezza del latus rectum.

Qui Huygens procede per assurdo, supponendo che la distanza GM del centro di massa del settore ABCD superi il *latus rectum* $BM = \ell$ (si noti l'uso della lettera M per indicare due punti diversi). È allora possibile togliere un segmento MR a GM in modo che il segmento restante RG sia ancora maggiore di ℓ. Se O è l'intersezione della curva logaritmica con la retta verticale NRO, la retta AO secante alla curva logaritmica taglia l'asintoto in un punto M tale che $MN < \ell$. Se OP è la parallela per O all'asintoto, si prolunga il settore a destra di CD a distanza $CF = OP$. Le basi dei settori OEFN ed ABCD sono uguali e dunque, per quanto mostrato prima, $ON : EF = AB : CD$. Se si immagina di scomporre i settori OEFN ed ABCD in infiniti rettangoli di ugual base, i centri di gravità di ciascun settore ne divideranno l'ampiezza nello stesso rapporto. Siccome i settori hanno ugual base, detto H il centro di gravità di OEFN e G quello di ABCD si avrà HR=GM. Infine, il centro di gravità del settore ONCD cadrà in un punto K, intermedio tra H e G. Va osservato che i punti H, G, K sono tracciati da Huygens ad una stessa quota, ma in realtà non lo sono. Tacitamente, egli confonde i centri di massa con le loro proiezioni sulla retta MG. Da risultati precedenti si ha che $A(AONB) : A(ODCN) = AP : OQ = OP : QX$, dove l'ultimo passaggio segue per la similitudine dei triangoli

AOP e QOX. Poiché ancora i centri di massa delle porzioni AONB ed ODCN distano dagli estremi sinistri di quantità proporzionali alla lunghezza delle basi dei settori, un punto L sul segmento MH tale che $KG : GL = OP : QX$ è la proiezione su HM del centro di massa di AONB. Essendo $OP = HG$ deve essere $KG < OP$ e dunque $GL < QX < MN < \ell < GR$ il che è assurdo perché L cadrebbe fuori della regione AONB di cui è centro di massa. In definitiva si è mostrato che $GM \leq \ell$, quale che sia la posizione di C.

In chiusura del passo appena riportato, Huygens ha richiamato l'attenzione sul fatto che la stima $GM < \ell$ vale anche per la regione infinita $ABCE$. Per questa regione vale anche la disuguaglianza opposta per gui G dista dalla retta AB quanto la lunghezza del *latus rectum*.

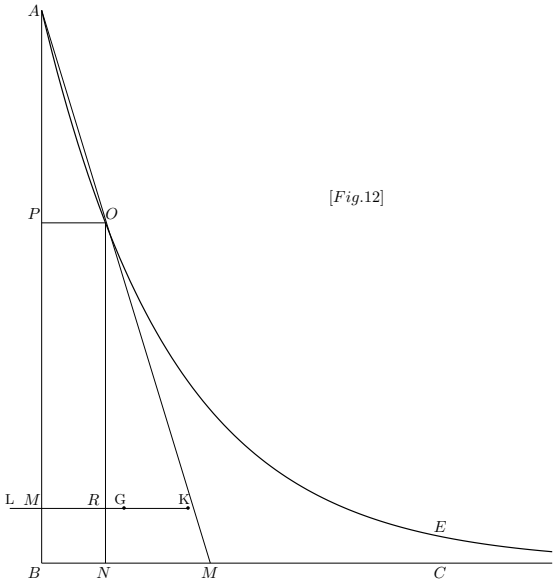

Figura 5.27: Per la regione illimitata $ABCE$, la distanza GM del centro di gravità G da AB coincide con il *latus rectum* ℓ.

Mostrerò inoltre che [tale centro di massa] non può distare da AB meno del latus rectum per cui deve proprio avere tale distanza.

Sia infatti G il centro di gravità della regione infinita AECB [Fig. 12] e si supponga possibile che GM sia minore del latus rectum. Potrò allora sottrarne una parte MR cosicché GM unito ad MR sia ancora minore del latus rectum; è chiaro che sarebbe possibile, condotta NRO come prima ed anche le rette AOM, ed OP e preso RK uguale ad MG, che GK risulti uguale ad MR.

Poiché i centri di gravità di due porzioni qualsiasi aventi basi uguali le dividono in modo tale da avere ugual distanza dalla perpendicolare maggiore, come dimostrato per le porzioni ABCD ed ONFE [Fig. 11], ne segue che la stessa proprietà deve valere per le infinite porzioni quali sono qui ABCE, ONCE per cui, se G è il centro di gravità della regione infinita ABCE ed MG è uguale

ad RK, allora K sarà centro di gravità della regione infinita $ONCE$. Pertanto se la porzione $AONB$ sta alla regione infinita $ONCE$ come AP sta ad ON, cioè come PO ovvero BN sta ad NM, come KG sta a GL, L sarà il centro di gravità della porzione $AONB$: GL sarà uguale ad NM in quanto KG è uguale a BN. Tuttavia BM supera il latus rectum (sarebbe uguale ad esso se AM fosse tangente alla curva in A, mentre la parte AO ora sottende un arco della curva per cui l'angolo PAO è maggiore di quanto sarebbe se AO fosse tangente in A). Tuttavia GM unito ad MR è minore per costruzione del latus rectum. Pertanto, asportati da ambo le parti segmenti uguali ad MR o a BN resterebbe NM maggiore di GM. Ma si è mostrato che MN è uguale a GL. Dunque anche GL sarebbe maggiore di GM. Dunque il punto L, centro di gravità della porzione $ABNO$ cadrebbe all'esterno della medesima porzione, cosicché sarebbe possibile tracciare una retta che passi per L e rispetto alla quale la porzione verrebbe a trovarsi tutta dalla stessa parte, che è assurdo. Dunque il centro di gravità di una regione infinita come $ABCE$ non potendo avere distanza maggiore o minore del latus rectum da AB deve distare da essa proprio quanto la lunghezza del latus rectum, q.e.d.[47] (pp. 469-470 di [12])

L'argomento è ancora per assurdo ed Huygens suppone che la distanza GM del centro di gravità della regione illimitata $ABCE$ (Fig. 5.27) sia minore della lunghezza ℓ del *latus rectum*. Preso un punto R su GM tale $GM + MR < \ell$ e preso un punto K a destra di G tale che $GK = MR$, si traccino come prima il segmento ORN passante per R che interseca la curva logaritmica in O ed il segmento OP parallelo all'asintoto BC. Per quanto visto in precedenza, se due porzioni logaritmiche come $ABCE$ ed $ONCE$ hanno ugual base, i rispettivi centri di massa sono equidistanti dalle rette che delimitano a sinistra i settori e K è (proiezione del) centro di massa di $ONCE$. Ancora, si è dimostrato che $A(AONB) : A(ONCE) = AP : ON = OP : NM$ e se si prende un punto

[47] Ostendam autem neque minus distare ab AB, dicta longitudine lateris recti, ac proinde ipsa hoc longitudine inde abesse.

Sit enim spatij infiniti $AECB$ [Fig. 12] centr. gr. G, sitque si potest GM minor adhuc latere recto. Abscindam igitur ab ea partem MR, ita ut GM una cum MR minor adhuc sit latere recto; constat enim fieri posset, ducatur NRO ut supra, itemque recta AOM, et OP: et sumatur RK aequalis MG unde et GK aequalis fiet MR.

Cum igitur duas portiones quaslibet quarum bases aequales, centra gravitatis suae ita dividunt, ut aequaliter distent a perpendiculari majori, sicut modo de portionibus $ABCD$; $ONFE$ [Fig. 11] ostendimus, sequitur et de infinitis portionibus quales sunt hic $ABCE$, $ONCE$ idem verum esse, cum ergo G ponatur centr. gr. spatij infin. $ABCE$, sitque MG aequalis RK erit K centr. gr. spatij infiniti $ONCE$. Si jam ergo fiat, sicut portio $AONB$ ad dictum spatium infin. $ONCE$, hoc est, ut AP ad ON, hoc est ut PO sive BN ad NM, ita KG ad GL, erit in L centr. gr. portionis $AONB$: eritque GL aequalis NM quum KG sit aequalis BN. Est autem BM major latere recto, (aequalis enim huic esset si AM tangeret curvam in A, cujus pars AO nunc arcum curvae subtendit, ideoque angulus PAO sit major quam si AO in A tangens esset). Sed GM una cum MR minor estr latere recto ex constructione. Ergo ablatis utrimque aequalibus hinc MR, inde BN reliquetur NM major quam GM. Sed ipsi MN aequalis ostensa est GL. Ergo et GL major quam GM. Itaque L, centr. gr. portionis $ABNO$ cadit extra portionem ipsam, ita ut recta per illud duci possit cui tota portio jaceat ad partem eandem, quod est absurdum. Itaque in spatio infinito $ABCE$ centr. gr. nec magis, nec etiam minus distat ab AB quam longitudinem lateris recti, ergo hac ipsa longitudine ab ea remotum est. qu. erat dem.

L sul prolungamento di MK tale che $OP : NM = KG : GL$, L deve essere (proiezione del) centro di gravità di $AONB$ sul prolungamento di MG. Da questa proporzione, poiché $OP = BN = KG$ segue anche $GL = NM$. D'altra parte $BM > \ell$, visto che AOM non è tangente alla curva logaritmica in A e, per costruzione, $BM > GM + MR$ e dunque $GL = NM > GM$ da cui segue che L deve essere esterno alla regione di cui è centro di gravità, il che è assurdo perché sarebbe possibile tracciare una retta passante per L che individuerebbe un semipiano contenente l'intera regione AONB.

Con questi risultati e grazie al teorema di Pappo-Guldino, Huygens esamina le proprietà del centro di massa dei solidi generati per rotazione della curva logaritmica attorno al proprio asintoto o ad una retta ad esso ortogonale

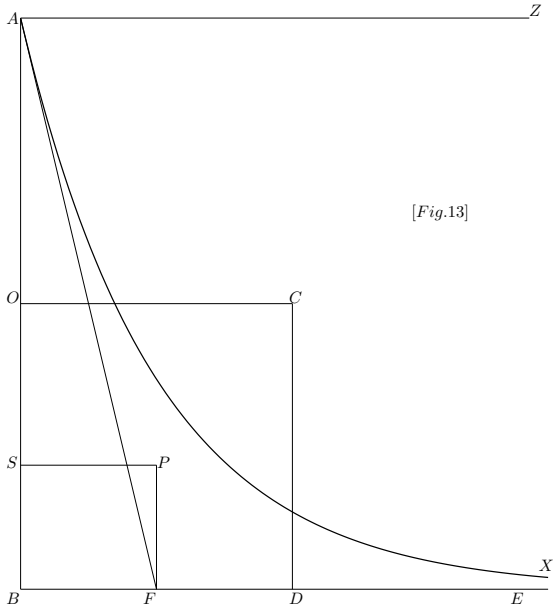

Figura 5.28: Ultimi teoremi sui centri di gravità.

Qui potremo dire qualcosa circa il solido ottenuto per rotazione della regione infinita attorno alla perpendicolare. Infatti, se si considera un rettangolo come OBCD [Fig. 13] con i lati sull'asintoto e la perpendicolare, avente altezza OB metà di AB e base BD doppia dela latus rectum, è evidente che il suo centro di gravità P coincide con quello della regione infinita ABEX, alla quale il rettangolo è equivalente. Quindi il cilindro generato dal rettangolo per rotazione attorno ad OB è equivalente al solido infinito ottenuto per rotazione dell'intera regione infinita attorno allo stesso AB così come si era già mostrato in precedenza che il cilindro ottenuto facendo ruotare lo stesso rettangolo attorno a BD è equivalente all'altro solido illimitato ottenuto per rotazione della regione ABEX attorno all'asintoto BE.

Dunque il solido generato dalla regione illimitata ABEX attorno all'asintoto BE sta al solido generato dalla stessa regione fatta ruotare attorno alla perpendicolare AB come PF sta a PS, cioè come $\frac{1}{4}$ *della perpendicolare AB sta al latus rectum AX della curva. Questo solido sta anche al solido generato per rotazione attorno ad AZ come 1 sta a 3. Quest'ultimo solido riproduce un calice di capacità infinità benché di peso esiguo, come succede anche per la Cissoide.*

Il centro di gravità della porzione delimitata da due perpendicolari dista da quella maggiore la lunghezza del latus rectum diminuita di un segmento che sta alla base della porzione come la perpendicolare minore sta alla differenza di lunghezza che la separa dalla perpendicolare maggiore. Se dunque fosse noto il centro di massa di una regione limitata qualsiasi, sarebbe possibile risalire al latus rectum.

La distanza dalla perpendicolare, ovvero dalla base del solido stesso, del centro di gravità del solido illimitato [ottenuto ruotando] attorno all'asintoto è metà del latus rectum.

Quindi anche la distanza del centro di gravità della regione illimitata attorno alla perpendicolare è $\frac{1}{8}$ *della lunghezza della perpendicolare medesima che è l'asse del solido.*[48] (p.471 di [12])

Huygens considera (Fig. 5.28) il rettangolo $OBDC$ che ha $OB = AB/2$ e $BD = 2\ell$, dove ℓ è il *latus rectum*, ed è dunque equivalente alla regione illimitata $ABEX$. Come già dimostrato (Fig. 5.24), il centro di massa di $ABEX$ coincide con quello P del rettangolo $OBDC$, per il teorema di Pappo-Guldino. Inoltre, anche il volume del cilindro generato per rotazione di $OBDC$ attorno ad AB coincide con il volume $V_h(AB)$ del solido ottenuto ruotando la curva logaritmica AX attorno ad AB. Ancora dal teorema di Pappo-Guldino si conclude che $V_h(BE) : V_h(AB) = PF : PS$. Huygens fornisce la formula per localizzare la distanza X del centro di gravità di una porzione finita come $ABHL$ di Fig. 5.22 vedendola come differenza di regioni illimitate come ABD

[48] Hinc et de solido spatij infiniti ex conversione ejus circa perpendicularem pronuntiare poterimus. Etenim si intra angulum perpendicularis cum asymptoto rectangulum applicetur, ut $OBCD$ [Fig. 13], cujus altitudo OB dimidia sit AB, basis vero BD dupla lateris recti, manifestum est ejus rectanguli centr. gr. P incidere in centr. gr. spatij infiniti $ABEX$; cui spatio quoque dictum rectangulum aequale est. Unde constat conversione ejus circa OB cylindrum gigni aequale solido infinito ex conversione spatij infiniti circa eundem axem AB. Sicut de cylindro qui sit ejusdem rectanguli conversione circa BD, ostensum antea est esse eum aequalem solido alteri infinito ex circumvolutione spatij $ABEX$ circa asymptoton BE.

Est ergo solidum ex spatio infinito $ABEX$ circa asymptoton BE ad solidum infinitum ex eodem spatio circa AB perpendicularem, sicut PF ad PS, hoc est $\frac{1}{4}$ perpend.^{is} AB ad latus rectum lineae AX. ad solidum vero circa rectam AZ asymptoto parallela ut 1 ad 3. Quod postremum solidum calicem refert infinitae capacitatis, licet exigui ponderis, quod et in Cissoide contigit.

Portionis a binis perpendicularibus terminatae centrum gravitatis distat a perpendiculari majore longitudine lateris recti demta linea quae se habeat ad basin portionis sicut minor perpendicularis ad excessum quo ipsa a majori superatur. Si igitur detur portionis cujusvis terminatae centrum grav. inveniri poterit latus rectum.

Centrum gr. solidi infiniti circa asymptoton distat a perpendiculari sive a basi ipsius solidi per dimidium lateris recti.

Ergo et centr. gr. solidi infiniti circa perpendicularem distabit per $\frac{1}{8}$ ipsius perpendicularis, quae est axis solidi.

ed HLD. Dette $x_1 = \ell$ ed $x_2 = \ell + BL$ le ascisse dei centri di massa di tali regioni illimitate, contate a partire da AB e ricordando che $A(ABD) = AB \times \ell$ e $A(HLD) = LH \times \ell$, deve essere

$$x = \frac{x_1 \cdot A(ABD) - x_2 \cdot A(HLD)}{A(ABD) - A(HLD)} = \ell - \frac{CB}{AB - CB} BL\,.$$

Osserviamo poi la menzione del solido ottenuto per rotazione della curva logaritmica attorno alla curva AZ (Fig. 5.28) parallela all'asintoto. Dal teorema di Pappo-Guldino tale solido ha volume $V_Z(ABEX) = 2\pi A(ABEX)\frac{3}{4}AB$, dove abbiamo notato che la distanza del centro di massa P da AZ è $(3/4)AB$. D'altra parte il volume $V(ABEX)$ del solido ottenuto per rotazione completa della curva logaritmica attorno al proprio asintoto è $V(ABEX) = 2\pi A(ABEX)\frac{1}{4}AB$ da cui si ricava l'asserto di Huygens che $V(ABEX)/V_Z(ABEX) = \frac{1}{3}$.

L'ultimo risultato riguarda la distanza da AB del centro di gravità del solido ottenuto per rotazione della curva attorno al proprio asintoto (Fig. 5.28) e nel passo riportato sopra è solo enunciato: tale distanza è metà del *latus rectum*. La dimostrazione viene riportata da Huygens in appendice.

5.5 Testi Originali

Testo 5.3 *[*Torricelli*, De Hemhyperbole logarithmica]*(pp. 87-88 di [10], pp. 344-346 di [11]).

Esto hyperbola monoasymptota (Fig. 5.14), cuius asymptotos AB, maxima vero applicata AC, tangens CD, et secetur recta AD bifariam in E, compleaturque rectangulum CAE. Dico solidum Hyperbolicum sine fine longum factum circa axem AB aequale esse cylindro circa eundem axem facto ex revolutione rectanguli ACFE. Nam si ita non est, erit solidum hyperbolicum vel maius, vel minus cylindro praedicto ab AF facto.

Sit primo solidum hyperbolicum maius cylindro ex AF facto, si possibile est. Ergo cylindrus ab AF factus minor erit quam dictum solidum: ponatur cylindribus ex EH minor defectu, eritque totus cylindrus ex AH adhuc minor solido hyperbolico. Fiat circa diametrum AG parabola quae transeat per punctum C. Manifestum est parabolam hanc hyperbolamque se mutuo intersecare in aliquo puncto praeter ipsum C. Si enim sumamus quamcumque rectam GB minorem quam GA, et iungamus CB, cadet omnino aliqua pars parabolae extra rectam CB versus N, quia GB minor est quam GA, et ideo CB secans. Sed cum CD sit tangens hyperbolae, hoc est ultima inclinatorum, secabit omnino recta CB ipsam hyperbolam, atque aliquod ipsius segmentum cadet versus punctum A. Unde certum est parabolam atque hyperbolam non solum in puncto C convenire, sed in alio etiam puncto, quod sit I. Agatur ergo per I recta LIN ordinatim applicata, et secans CIB atque IM parallela asymptoto AB. Concipiatur iam circa universam hyperbolam descriptam esse figuram ex parallelogrammis aeque altis costantem, quorum primum sit CALN; secundum vero aequale erit ipsi MALI; tum intelligatur universa huiusmodi figura converti circa axem AB ita ut ex rectangulis fiant totidem cylindri aequealti nostro hyperbolico solido

circumscripti, quorum primus erit factus ex CALN, secundus vero aequalis erit cylindro facto ex MALI. Eruntque omnes infiniti numero cylindri inter se in continua proportione Geometrica; et erit prima differentia solidum armillare factum ex revolutione rectanguli CMIN circa axem AB. Jam cylindrum ex CAGH ad cylindrum ex NLGH in eadem basi est ut altitudo AG ad altitudinem GH[49] sive ut quadratum CA ad quadratum IL ob parabolam nempe ut circulus ex CA ad circulum ex IL, sive ut cylindrus ex CALN ad cylindrum ex MALI. Ergo per conversionem rationis cylindrus ex CAGH ad cylindrum ex CALN, qui est primus terminus geometricae proportionis, ita cylindrus ex CALN primus terminus ad differentiam, quae est inter cylindros factos ex CALN, et ex MALI, quae quidem prima differentia progressionis est. Ergo cylindrus ex CAGH aequalis est aggregato omnium simul terminorum, nempe universae figurae ex cylindris aequealtis compositae, et circa solidum descriptae. Sed idem cylindrus ex AH minor erat ipso solido hyperbolico, necesse ergo est ut solidum hyperbolicum maius sit quam figura ipsi circumscripta, hoc est pars maior suo toto. Quod est absurdum.

Testo 5.4 /Huygens/(pp. 468-469 di [12]). Sit ejusmodi spatium ABCD [Fig. 11], dico ejus centr. gr. non alterius distare ab AB quam est longitudo lateris recti. Si enim fieri potest sit ejus centr. gr. in G ita ut GM major fit latere recto. Possum ergo ab ea abscindere particulam ut MR ut residua RG adhuc major sit latere recto. Ducatur NRO parall. BA, et per O ubi occurrit curvae, agatur AOM recta. Fietque necessario NM minor latere recto, quia OM non tangit sed secat curvam in O. Sit OP parall. BC et ipsi OP vel BN sumatur aequalis CF versus partem acutam spatij infiniti, et ducatur FE parall. BA. Quia igitur portionis OEFN basis FN aequalis est basi CB portionis ADCB, erit quoque ON ad EF ut AB ad DC unde quum portio utraque constare concipi possit es innumeris rectang.[is] aequales bases habentibus atque eadem proportione decrescentibus, manifestum est (sed et accurate ostendi posset) utriusque centra grav. similiter dividere distantiam utriusque extremarum perpendicularium; quae distantia cum sit utrobique aequalis, aequaliter ergo utriusque centra gr. aberunt a perpendicularibus majoribus AB, ON. Ergo cum centr. gr. spatij ADCB ponatur G, erit (sumpta RH=MG) punctum H centr. gr. spatij ONFE a quo si auferatur spatium DEFC, cujus intra seipsum est centr. gr.; apparet spatij reliqui ODCN centr. gr. inter H et G cadere, puta in K. Jam vero quia spatium AONB est ad spatium ODCN ut AP ad OQ, ex praecedentibus, hoc est ut OP ad XQ; si fiat ut OP ad XQ ita KG ad GL, erit L centr. gravitatis spatij AONB, quia nempe G ponitur centr. gr. spatij totius ABCD et K centr. gr. spatij ONCD. Erit autem GL minor quam XQ cum et KG sit minor quam OP; nam tota HG ipsi OP aequalis erat atqui XQ minor est quam MN, et haec minor latere recto, ut supra dictum fuit. Ergo GL omnino erit latere recto. Sed GR ipso major erat: Ergo GL minor quam GR. Itaque L centr. gr. spatij AONB caderet extra spatium ipsum, atque ita ut ducta per L linea recta totum caderet ad partem unam quod esse non potest.

[49] Si legga GL.

Hinc itaque patet, ubicunque CD perpend.[is] statuatur, etsi in infinitum distans ab AB, semper spatij ab utraque terminati centr. gr. non ulterius ab AB remotum fore, quam longitudine lateris recti atque adeo recte de spatio infinito concluditur esse ei centr. aliquod gr., idque non alterius quam dictum est distare ab AB.

Bibliografia

[1] R.P. Burn: Alphonse Antonio de Sarasa and logarithms, *Hist. Math.* (2001), 1–17.

[2] F. Cajori: The history of Zeno's arguments on motion. Phases in the development of the theory of limits. IV. *Amer. Math. Monthly* (1915), 77–82.

[3] J. Dhombres: Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period, *Educ. Stud. Math.* **24**, (1993), 401–419.

[4] C.H. Edwards, jr.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer, New York, (1979).

[5] A.A. De Sarasa: *Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi* van Meurs, Anwerpt (1649).

[6] J. Kepler: *Johannis Kepleri astronomi Opera Omnia*, Vol VII, A cura di Ch. Frisch. Heyder & Zimmer, Francoforte, (1868).

[7] C. Huygens: Fundamentum regulae nostrae ad inveniendos logarithmos. In *Ouvres Completès de Christiaan Huygens* vol XIV *Calcul des Probabilités, travaux des mathématique pures: 1655-1666.* Den Hague, Martinus Nijhoof (1920), pp. 451-457.

[8] C. Huygens: Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro. In *Ouvres Completès de Christiaan Huygens* vol XI *Travaux mathématique: 1645-1651.* Den Hague, Martinus Nijhoof (1908), pp. 283–307.

[9] C. Huygens: Regula ad inveniendos logarithmos. In *Ouvres Completès de Christiaan Huygens* vol XIV *Calcul des Probabilités, travaux des mathématique pures: 1655-1666.* Den Hague, Martinus Nijhoof (1920), pp. 458-459.

[10] G. Loria: Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. *Bibl. Math.* **1**, (1900), 75–89.

[11] E. Torricelli: De Hemihyperbola Logarithmica. In *Opere di Evangelista Torricelli* vol. I: *Geometria* Parte II. Curatori: G. Loria e G. Vassura. Faenza, Montanari (1919), pp. 335-347.

[12] C. Huygens: In *Ouvres Completès de Christiaan Huygens* vol XIV *Calcul des Probabilités, travaux des mathématique pures: 1655-1666*. Den Hague, Martinus Nijhoof (1920), pp. 460-473.

Capitolo 6

Gli sviluppi in serie

6.1 I logaritmi visti da Pietro Mengoli

Pietro Mengoli (1625-1686) è una figura singolare nel panorama matematico del Seicento. Allievo di Bonaventura Cavalieri a Bologna, professore di Meccanica nel Collegio dei Nobili e priore della chiesa di S. Maria Maddalena, è stato a lungo relegato nell'oblìo. Su di lui pesava l'accusa, non del tutto infondata, di avere uno stile ostico al punto da rendere inintellegibile il contenuto delle sue scoperte. In una lettera a Collins, Isaac Barrow paragonò lo stile di Mengoli all'arabo per difficoltà di comprensione. Lo storico della matematica Jean-Ètienne Montucla (1725-1799) ebbe per lui un giudizio tagliente: *Non ho che poche parole per Mengoli, professore di Matematiche a Bologna. Se lo si giudica dai titoli delle sue diverse opere, egli cercò di servire la geometria in ciò che di più difficile e rilevante essa offre. È certo possibile che ci siano cose nuove nelle sue opere; ma sembra essersi voluto avvolgere in un linguaggio tutto suo. Il suo nome è destinato all'oblio e lo ha meritato.*[1] (*Histoire des Mathématiques*, Tome II, p.92. In [1], p.50)

A partire dall'inizio del Novecento, il giudizio degli storici su Mengoli è progressivamente cambiato ed un esame attento della sua opera ha portato alla luce molti contributi originali, in particolare nella teoria dei limiti e nella quadratura di curve da lui ottenuta con procedimenti generali, a differenza di molti contemporanei per i quali il processo di quadratura veniva adattato volta per volta alla curva da studiare. Per quanto riguarda la teoria dei logaritmi, occorre analizzare una delle sue opere principali, la *Geometriae Speciosae Elementa* del 1659, che comprende una introduzione *Lectori Elementario* e sei *Elementa*. Nel primo, *De Potestatibus, a radice binomia, et residua* egli presenta in forma letterale gli sviluppi del binomio $(a \pm b)^n$ per gli interi non superiori a

[1] Je n'ai que quelques mots à dire de Mengoli, professeur de Mathématiques à Bologne. Si l'on en juge par les titres de ses divers ouvrages, il tâcha de servir la géométrie dans ce qu'elle a de plus difficile et relevé. Il y a même peut-être dans ses ouvrages des choses neuves; mais il semble avoir voulu s'envelopper dans un langage particulier à lui. Son nom est resté dans l'oubli et il'a mérite.

10, affermando che è facile generalizzare a potenze superiori. Il secondo Elementum, *De innumerabilibus numerosis progressionibus* contiene calcoli di somme di potenze e prodotti di potenze. Nel *De quasi proportionibus* introduce i concetti di quasi-numero, quasi-zero, quasi-infinito che anticipano la definizione di limite e costruisce una teoria delle quasi-proporzioni, prendendo a modello la teoria delle proporzioni del V libro degli *Elementi* di EUCLIDE. I due successivi *Elementa*, *De rationibus logarithmicis* e *De propriis rationum logarithmis* sono quelli più interessanti per noi in quanto MENGOLI costruisce una teoria delle proporzioni logaritmiche e sviluppa un metodo per il calcolo del logaritmo di un rapporto. Nel sesto ed ultimo *Elementum*, *De innumerabilibus quadraturis* ottiene la quadratura di una famiglia di curve [2].

Come accennato sopra, MENGOLI propone un approccio puramente aritmetico ai logaritmi fornendo una teoria rigorosa che non ricorre alle progressioni geometriche od all'iperbole [1, 3, 5]. Presi due numeri interi a ed n, MENGOLI definisce l'*iperlogaritmo* $\mathrm{Hyl}_n(a)$ e l'*ipologaritmo* $\mathrm{hyl}_n(a)$ come

$$\mathrm{Hyl}_n(a) := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{na-1} \tag{6.1}$$

e

$$\mathrm{hyl}_n(a) := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{na-1} + \frac{1}{na}\,. \tag{6.2}$$

Al crescere di n vengono definite due successioni di iper- ed ipologaritmi ed è facile verificare che

$$\mathrm{Hyl}_n(a) - \mathrm{Hyl}_{n+1}(a) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{na} + \frac{1}{na+1} + ... + \frac{1}{(n+1)a-1}\right) > \frac{1}{n} - a\frac{1}{na} = 0$$

mentre $\mathrm{hyl}_n(a) < \mathrm{hyl}_{n+1}(a)$, per cui la successione degli iperlogaritmi di a è decrescente, mentre quella degli ipologaritmi è crescente. Inoltre, per tutti gli n

$$\mathrm{Hyl}_n(a) - \mathrm{hyl}_n(a) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

e dunque la differenza tra $\mathrm{Hyl}_n(a)$ $\mathrm{hyl}_n(a)$ quando n tende all'infinito tende a zero ovvero, per usare la terminologia di MENGOLI, è *quasi zero*. Il limite A comune alle due successioni è definito come logaritmo di a: $A = \log a$.

Inoltre, il logaritmo è quella quantità a cui tendono sia gli iperlogaritmi, decrescendo via via, sia gli ipologaritmi, crescendo via via; (il logaritmo) è minore di ogni iperlogaritmo, maggiore di ogni ipologaritmo[2] (MENGOLI, *Geometriae Speciosae Elementa*. In [1], p.47)

Questa definizione da sola non basta per convincere che il logaritmo definito da MENGOLI sia in effetti la stessa cosa dei logaritmi studiati e tabulati prima

[2] Porro, logarithmus illa est quantitas, ad quae tendunt hyperlogarithmi, cum semper deinceps minuuntur et ad quam tendunt hypologarithmi, cum semper deinceps augientur; omni minor hyperlogarithmo, omni major hypologarithmo

di lui se prima non se ne determinano le proprietà algebriche. Presi allora tre numeri *interi* n, a e $b < a$, si definiscono

$$\mathrm{Hyl}_n \frac{a}{b} := \mathrm{Hyl}_n(a) - \mathrm{Hyl}_n(b) = \frac{1}{nb} + \frac{1}{nb+1} ... + \frac{1}{na-1}$$

e

$$\mathrm{hyl}_n \frac{a}{b} := \mathrm{hyl}_n(a) - \mathrm{hyl}_n(b) = \frac{1}{nb+1} + \frac{1}{nb+2} + ... + \frac{1}{na} \ :$$

entrambe le successioni convergono ad uno stesso valore quando $n \to \infty$ che viene definito come $\log \frac{a}{b}$. D'altra parte, poiché $\mathrm{Hyl}_n(a)$ ed $\mathrm{hyl}_n(a)$ convergono a $\log a$ e $\mathrm{Hyl}_n(b)$ ed $\mathrm{hyl}_n(b)$ convergono a $\log b$ abbiamo

$$\log(a) - \log(b) = \log \frac{a}{b} \, .$$

Un procedimento simile può essere seguito per i logaritmi del prodotto di due interi a e b, con $a > b$. Per ogni intero n deve essere [3]

$$\mathrm{Hyl}_n(a) = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{na-1} > \log a > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{na} = \mathrm{hyl}_n(a)$$

e

$$\mathrm{Hyl}_{na}(b) = \frac{1}{na} + ... + \frac{1}{nab-1} > \log b > \frac{1}{na+1} + ... + \frac{1}{nab} = \mathrm{hyl}_{na}(b)$$

per cui sommando

$$\mathrm{Hyl}_n(ab) = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{nab-1} > \log a + \log b > \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{nab} = \mathrm{hyl}_n(ab)$$

ma siccome anche $\mathrm{Hyl}_n(ab) > \log(ab) > \mathrm{hyl}_n(ab)$ segue $\log(ab) = \log a + \log b$.

Il risultato più importante di Mengoli è lo sviluppo in serie convergente del logaritmo di a/b, con $a > b$ entrambi interi. Egli ottiene il risultato introducendo in successione i *prologaritmi* di ordine n per un intero a come

$$\mathrm{plog}_1(a) := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{a}$$

$$\mathrm{plog}_2(a) := \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + ... + \frac{1}{2a}$$

.....

$$\mathrm{plog}_n(a) := \frac{1}{(n-1)a+1} + \frac{1}{(n-1)a+2} + ... + \frac{1}{na} \, .$$

Una verifica diretta mostra che

$$\mathrm{plog}_n(a) = \mathrm{hyl}_n(a) - \mathrm{hyl}_{n-1}(a) + \frac{1}{n}$$

e

$$\operatorname{plog}_n(b) = \operatorname{hyl}_n(b) - \operatorname{hyl}_{n-1}(b) + \frac{1}{n}$$

per cui, ricordando la definizione di ipologaritmo di un numero razionale, si ha anche

$$\operatorname{plog}_n(a) - \operatorname{plog}_n(b) = \operatorname{hyl}_n \frac{a}{b} - \operatorname{hyl}_{n-1} \frac{a}{b}$$

e, definito $\operatorname{hyl}_0 \frac{a}{b} := 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{plog}_n(a) - \operatorname{plog}_n(b)] = \lim_{n\to\infty} \operatorname{hyl}_n \frac{a}{b} = \log \frac{a}{b}\,.$$

Se si prende $a = 2$ e $b = 1$ si ottiene

$$\log 2 = \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

La serie così ottenuta verrà ricavata per altra via da Nicolaus Mercator, come vedremo nella prossima sezione.

6.2 La *Logarithmotechnia* di Nicolaus Mercator

Oltre che matematico, Nicolaus Mercator (1620-1687) fu astronomo e fisico. Ha lasciato la monografia *Hypothesis Astronomica Nova, ejusque cum Observationibus consensus* (1664) che contiene una esauriente presentazione dei sistemi geo- ed eliocentrici che sarà ripresa ed ampliata nelle *Institutiones Astronomicae* del 1676. Curò una edizione degli *Elementi* di Euclide—*Euclidis Elementa Geometrica, novo ordine ac methodo fere demonstrata*—(1666) che esercitò una certa influenza sulle edizioni successive [6]. Nel 1666 pubblicò sulle *Philosophical Transactions* della Royal Society di cui era socio un lavoro *Problemata quaedam, ad promotionem scientiae navigationis facientia* in cui annunciava tra l'altro di potere dimostrare l'affermazione di Henry Bond secondo cui la mappa meridiana della proiezione di Mercator—Gerhard, attivo un secolo prima—è determinabile a partire dalla tangente logaritmica del meridiano terrestre. La dimostrazione fu in realtà esposta da James Gregory nelle *Exercitationes Geometricae* del 1668, di cui ci occuperemo più avanti. Infine, Mercator scrisse la *Logarithmotechnia* che consta di tre parti, due delle quali rese note nel 1667, la terza aggiunta in appendice all'edizione del 1668. Le prime due parti sono dedicate al calcolo dei logaritmi briggsiani, come spiegato nel sottotitolo all'opera: *Logarithmotechnia: sive Methodus construendi Logarithmos. Nova, accurata, & facilis.* La parte più originale collega la quadratura dell'iperbole con il calcolo dei logaritmi: *Vera Quadratura Hyperbolae & Inventio Summae Logarithmorum.*

Le prime due parti risentono dell'impianto un po' rigido della teoria euclidea dei rapporti, ma sono aperte all'assimilazione dei metodi di calcolo proposti da Briggs, in particolare per quanto riguarda l'uso delle differenze finite. Il calcolo dei logaritmi briggsiani viene illustrato con il calcolo di $\log(100.5)$ e $\log(99.5)$.

Egli suddivide l'intervallo $[1, 10]$ in 10 milioni di parti attraverso l'inserzione di medi proporzionali: il logaritmo di un numero n nell'intervallo $[1, 10]$ è il numero di medi proporzionali, detti *ratiunculae*, compresi tra 1 ed n.

Logaritmo è vocabolo composto da rapporto e numero, quasi a dire numero di rapporti; ciò che ben esprime la realtà delle cose. Infatti il logaritmo non è altro che il numero di raziuncole contenuto nel rapporto tra un numero qualsiasi e l'unità.[3] (p. 1 di [7])

Il metodo di MERCATOR, applicato al calcolo di $\log(100.5)$ si riassume nei passi seguenti. Attraverso divisioni per multipli di 10 egli riporta il numero dato nella forma $100g$ con $g = 1.005$, come nel metodo radicale di BRIGGS. A questo punto egli calcola le potenze g^2, g^4, g^8,...$g^{256} < 10$ e $g^{512} > 10$. In seguito, sfruttando le potenze trovate di g egli ottiene le limitazioni $g^{461} < 10 < g^{462}$ e, grazie alla regola aurea è in grado di determinare che $g^{461.6868} \simeq 10$ da cui segue che il corrispondente numero di *ratiunculae* è $10^7/461.6868 = 21659,7$ e pertanto il logaritmo decimale $\log(100.5) = 2.00216597$, con un errore di una unità sulla sesta cifra decimale.

Testo 6.1 (MERCATOR**, Logarithmotechnia)** (pp. 4-6 di [7]). Originale 6.8

Vorrei conoscere il numero di raziuncole contenute nel rapporto tra 100[5 ed 1 sapendo che il rapporto decuplo ne contiene 1,0000000. Suddivido allora il rapporto tra 100[5 ed 1 nelle sue parti, cioè 100[5 a 100, 100 a 10, e 10 ad 1, gli ultimi due sono decupli (da cui segue che la caratteristica sarà 2); resta allora da studiare quale sia la quota parte del rapporto decuplo che compete al rapporto restante tra 100[5 e 100. Se dunque si moltiplicano per sé stessi i termini del rapporto 100[5 e 100, i prodotti forniranno il rapporto doppio del rapporto tra 100[5 e 100, e moltiplicando i termini (si intende del rapporto duplicato) per sé stessi, si otterrà il rapporto doppio del rapporto doppio, cioè il rapporto quadruplo del rapporto tra 100[5 e 100: e si prosegue così nella moltiplicazione continua dei termini finché il rapporto generato dalla continua moltiplicazione del termine 100[5 per se stesso superi il decuplo del rapporto ottenuto per moltiplicazione successiva di 100 per se stesso; il denominatore dell'ultima potenza ottenuta mostrerà il numero intero di volte in cui il rapporto tra 100[5 e 100 è contenuto nel rapporto decuplo. E poiché il secondo dei termini è 100, le cui potenze constano tutte dell'unità e di un certo numero di zeri, tutta la fatica restante sarà rivolta ad elevare l'altro termine 100[5 a quella potenza che supera di dieci volte la stessa potenza del termine precedente (cioè di 100); un esempio meglio si presta delle parole per comprendere lo schema dell'operazione.

Pertanto, la potenza 462ª del termine 100[5 supera l'ugual potenza di 100 più di dieci volte; ma la 461ª dello stesso termine 100[5 supera l'ugual potenza di 100 meno di dieci volte: affermo allora che il rapporto tra 100[5 e 100 è contenuto nel decuplo più di 461 volte ma meno di 462 volte.

[3] Logarithmus composito vocabulo dicitur a ratione & numero, quasi rationum numerus; id quod plane cum re consentit. Est enim logarithmus nihil aliud, quam numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque ad unitatem obtinet.

100[5000 (1)	1893406 (128)	ma per quella precedente
5001 (1)	6043981 (128)	in questo modo:
1005000	3584985 (256)	9340130 (448)
5025	5894853 (256)	8603801 (16)
1010025(2)	12852116 (512)	10115994 (464)
10100 (2)	questa potenza supera	Dove di nuovo il risultato
20	più di dieci volte	è eccessivo; pertanto non moltiplico
5	l'uguale potenza	ancora la 448ª
——	del 100; riprendo dunque	per la 16ª, come prima, ma per
1020150 (4)	la potenza 256ª e non la moltiplico per se stessa	
0510201 (4)	ma per quella che la precede immediatamente	la 8ª, così
1020150	cioè per,	do:
20403	la 128ª, in questo	9340130 (448)
102	modo	6070401 (8)
51	3584985 (256)	9720329 (456)
1040706 (8)	6043981 (128)	0510201 (2)
6070401 (8)	6787831 (384)	10015603 (462)
——		
1083068 (16)	1106731 (64)	Questa potenza ancora
8603801 (16)	9340130 (448)	supera il limnite per cui
——		moltiplico la 460ª
1173035 (32)	5303711 (32)	non per la 2ª ma per
5303711 (32)	10956299 (480)	la 1ª, così
1376011 (64)	Questa potenza supera di nuovo	9916193 (460)
1106731 (64)	più di dieci volte	5001 (1)
——	quella uguale di 100	9965774 (461)
1893406 (128)	dunque non moltiplico la 448ª	
	per la 32ª, come sopra,	

Del resto

$$\textit{Poiché la potenza}\left\{\begin{array}{c}460\\461\\462\end{array}\right\}\textit{è}\left\{\begin{array}{c}9916193\\9965774\\1001560\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\textit{e le differenze}\\49581\\49829\end{array}\right\}\textit{sono circa uguali;}$$

Allora è possibile trovare facilmente e con sicurezza la parte proporzionale della quale la potenza esatta, cioè 10000000 supera quella che meglio la approssima per difetto 9965774 assumendo cioè

potenza corretta	10000000
ed approssimazione per difetto	9965774
differenza	34226

e dicendo che la differenza tra l'approssimazione per difetto e per eccesso (cioè 49829) sta alla differenza tra l'approssimazione per difetto e la potenza corretta (cioè 34226) come 10000 sta a 6868; che sono parti dell'unità, cosicché il rapporto tra 100⌊5 e 100 è contenuto nel rapporto decuplo 461⌊6868 *volte. Inoltre, se il rapporto decuplo (ovvero* 461⌊6868 *volte il rapporto tra* 100⌊5 *e 100) contiene 1,0000000 raziuncole; quante raziuncole saranno contenute nel rapporto tra* 100⌊5 *e 100? Ve ne sono* 21659⌊7 *che costituiscono la misura esatta del rapporto tra* 100⌊5 *e 100, aggiungendo al quale i rapporti tra 100 e 10 e tra 10 ed 1, cioè due volte il rapporto decuplo, che contiene 2,0000000 raziuncole; si ha che la misura complessiva del rapporto tra* 100⌊5 *ed 1 (ovvero il logaritmo del numero assoluto* 100⌊5*) è evidentemente* $2,0021659\lfloor 7$.

In formule, Mercator trova che $g^{461.6868} \simeq 10$ e da questo ricava $\log g \simeq 1/461.6868 = 0.00216597$ da cui il logaritmo di $100.5 = 10^2 g = 2.00216597$ segue facilmente.

Illustrato il procedimento per dei casi espliciti Mercator ottiene, nello spirito di Nepero, stime numeriche sui logaritmi grazie al calcolo delle differenze

finite per frazioni del tipo $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$ in cui cioè il numeratore di una frazione della famiglia coincide con il denominatore della precedente ed ogni frazione ha una differenza costante tra denominatore e numeratore: *rationes continuae et terminorum aequidifferentium.* Lo schema alle differenze è esposto nella tabella che segue (p. 11 di [7])

Rationes	Diff: primae.	Differentiae secundae
a		
$a+b$		
	$aa+2ab+bb$	
	$aa+2ab$	
$a+b$		$a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$
$a+2b$		$a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$
	$aa+4ab+4bb$	
	$aa+4ab+3bb$	
$a+2b$		$a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$
$a+3b$		$a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$
	$aa+6ab+9bb$	
	$aa+6ab+8bb$	
$a+3b$		$a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4$
$a+4b$		$a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$
	$aa+8ab+16bb$	
	$aa+8ab+15bb$	
$a+4b$		
$a+5b$		

Un esame della tabella mostra che essa *non* corrisponde allo schema alle differenze per la funzione $\frac{x}{b+x}$, ma che il solo modo di interpretarla come schema alle differenze è quello di riferirla alla funzione logaritmo. In effetti,

$$\log\frac{a+b}{a+2b}-\log\frac{a}{a+b}=\log\frac{(a+b)^2}{a(a+2b)}$$

che è proprio la prima delle differenze prime riportate. Con questa precisazione si capisce la Proposizione III che insegna ad ottenere tutte le frazioni del tipo $A/(A+B)$ in termini della più piccola, a, della differenza prima b tra a e la frazione successiva, della prima differenza seconda c incontrata, della prima differenza terza d, e così via:

Rationes	diff: primae	Secundae	Tertiae	4
a				
	b			
a+b		c		
	b+c		d	
a+2b+c		c+d		e
	b+2c+d		d+e	
a+3b+3c+d		c+2d+e		
	b+3c+3d+e			
a+4b+6c+4d+e				

La dimostrazione di MERCATOR, come anche le altre presentate, è in realtà l'illustrazione attraverso un esempio del fatto che il risultato enunciato è corretto, non un'autentica deduzione formale. Ad esempio, l'affermazione che i coefficienti di a, b, c, ecc. nell'espressione delle frazioni successive sono coefficienti binomiali non è dimostrata.

Nelle Proposizioni V e VI MERCATOR espone due regole che consentono di dare limiti superiori od inferiori a logaritmi di frazioni del tipo $a/(a+b)$. La Proposizione V è posta in questi termini

Trovare un valore vicino a quello vero per il multiplo di un dato rapporto.

Costruzione. Moltiplica la differenza dei termini del rapporto assegnato per il denominatore del multiplo assegnato e sottrai dal prodotto la stessa differenza, aggiungi metà del risultato al termine maggiore e toglilo dal termine minore; otterrai così due termini che esprimono un rapporto di poco inferiore a quello cercato. Se allora i termini del rapporto si presentano come numeri misti, composti da parte intera e frazionaria, li si riduca a sole frazioni, eliminati i denominatori delle quali, il rapporto richiesto si presenterà con numeratori interi e liberi da frazioni. Ad esempio, si cerchi il quadruplo del rapporto $\frac{25}{28}$. *Moltiplicato 3, differenza dei termini, con 4 si ottiene 12 da cui, sottraendo 3 si ricava 9, la cui metà* $4\frac{1}{2}$, *aggiunta al termine maggiore 28 dà* $32\frac{1}{2}$, *mentre sottratta al termine minore 25 dà* $20\frac{1}{2}$. *Il rapporto tra* $20\frac{1}{2}$ *e* $32\frac{1}{2}$ *sarà di poco superiore al quadruplo del rapporto* $\frac{25}{28}$. *Ridotti i termini* $20\frac{1}{2}$ *e* $32\frac{1}{2}$ *a frazioni pure si ottengono* $\frac{41}{2}$ *e* $\frac{65}{2}$ *e, omettendo i denominatori, il rapporto* $\frac{41}{65}$ *sarà di poco superiore a quello cercato.*[4] (pp. 14-15 di [7])

Ricordiamo che un rapporto viene diviso in n parti uguali tramite l'inserzione di $n-1$ medi proporzionali per cui, dicendo che a/b è *multiplo* (*multiplicem*) di un altro rapporto c/d significa che $(a/b) = (c/d)^n$. MERCATOR cerca di ottenere un'espressione semplice per $[(a/a+b)]^p$ ed enuncia una stima dall'alto. Per poter trasferire senza valori assoluti la disuguaglianza ai logaritmi, ricaviamo la formula proposta da MERCATOR per frazioni del tipo $(u+v)/u$, seguendo la ricostruzione di Hofmann [8]. Lo schema si traduce in questi passaggi. Si prenda la differenza v tra i termini della frazione e la si moltiplichi per l'esponente intero p. Dal prodotto pv ottenuto si sottragga v e si divida il risultato per 2, ottenendo $v(p-1)/2$ che viene aggiunto al termine maggiore della frazione di partenza e

[4] Datae rationis multiplicem invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datae rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & a facto aufer ipsam differentiam, reliqui semissem adde termino majori, & detrahe minori; ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulo minorem quaesita. Tum si termini prodeuntes sint forte numeri mixti ex integris et fractis; reducantur ad pure fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quaesita censebitur in numeratoribus integris & a fractione liberis. V. gr. Quaeratur rationis $\frac{25}{28}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus restant 9, cujus semis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28 facit $32\frac{1}{2}$, detractus termino minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulo major quadruplo rationis $\frac{25}{28}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad pure fractos, fiunt $\frac{41}{2}$ et $\frac{65}{2}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{41}{65}$ paulo major quaesita.

sottratto al minore, ottenendo la frazione

$$\frac{u+v+v\frac{p-1}{2}}{u-v\frac{p-1}{2}}\ :$$

MERCATOR afferma che questa frazione è di poco maggiore del multiplo cercato, vale a dire che

$$\left(\frac{u+v}{v}\right)^p < \frac{u+v+v\frac{p-1}{2}}{u-v\frac{p-1}{2}}$$

o, passando ai logaritmi,

$$\log\left(\frac{u+v}{u}\right)^p < \log\frac{u+v+v\frac{p-1}{2}}{u-v\frac{p-1}{2}}\,. \tag{6.3}$$

Nell'esempio proposto si chiede di trovare il "quadruplo" di 25/28 e, applicando la regola esposta si ottiene la frazione $41/65 = 0.630769 < 0.635518 = (25/28)^4$.

La Proposizione VI considera il problema complementare di stimare $([u+v)/u]^{1/q}$ e la regola da applicare è espressa in questi termini

Trovare il valore approssimato di una parte richiesta di un rapporto assegnato.

Costruzione. Dividi la differenza dei termini del rapporto assegnato in tante parti quante sono le unità di cui consta il denominatore della parte richiesta e, tolta una delle parti, si aggiunga al termine minore e si sottragga da quello maggiore la metà delle parti restanti; si otterranno così due termini che esprimono un rapporto di poco inferiore a quello cercato. Se i termini si presentano poi come numeri misti con parte intera e frazionaria, li si riduca a frazioni pure da cui, una volta eliminati i denominatori, il rapporto cercato si presenterà con numeratori interi, privi di parte frazionaria. Ad esempio, si debba trovare la quinta parte della frazione $\frac{3}{5}$*. La differenza 2 tra i termini, divisa cinque volte dà* $\frac{2}{5}$ *che è una parte quinta che, sottratta dall'intero pari a 2 diventa* $\frac{8}{5}$*, la cui metà, aggiunta al termine minore dà* $3\frac{4}{5}$ *mentre, sottratta dal termine maggiore 5 dà* $4\frac{1}{5}$*; dunque, il rapporto tra* $3\frac{4}{5}$ *e* $4\frac{1}{5}$ *è di poco minore della quinta parte del rapporto* $\frac{3}{5}$*. Ridotti i termini* $3\frac{4}{5}$ *e* $4\frac{1}{5}$ *a frazioni pure si ottengono* $\frac{19}{5}$ *e* $\frac{21}{5}$ *da cui, omessi i denominatori, si ottiene che il rapporto* $\frac{19}{21}$ *è di poco inferiore a quello cercato.*[5] (p.15 di [7])

[5] Datae rationis partem imperatam invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datae rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quaesitae constat unitatibus, atque ex iis partibus exemta una, reliquarum semissem adde termino minori, & detrahe quoque majori; ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulo minorem quaesita: Tum si termini prodeuntes sint forte numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad pure fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quaesita censebitur in numeratoribus integris, & a fractione liberis. V. gr. Oporteat rationis $\frac{3}{5}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 divisa quinquefariam exhibet $\frac{2}{5}$, quae est una pars quinta, eximenda ex integra summa quinque partium, quae erat 2, & restant $\frac{8}{5}$, quarum semis $\frac{4}{5}$ additus termino minori, facit $3\frac{4}{5}$; detractus vero ex majori 5, reliquum facit $4\frac{1}{5}$; erit igitur ratio $3\frac{4}{5}$ ad $4\frac{1}{5}$ paulo minor, quam pars quinta rationis $\frac{3}{5}$. Reductis terminis $3\frac{4}{5}$ & $4\frac{1}{5}$ ad pure fractos, fiunt $\frac{19}{5}$ & $\frac{21}{5}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{19}{21}$ paulo minor quaesita.

Tradotta in simboli, la prescrizione di Mercator è la seguente: si divide per q la differenza v tra i termini della frazione, ottenendo v/q che, sottratta a v dà $v\frac{q-1}{q}$ che viene a sua volta divisa per due, sottratta ad $u+v$ ed aggiunta ad u per dar luogo alla frazione

$$\frac{u+v-v\frac{q-1}{2q}}{u+v\frac{q-1}{2q}} < \sqrt[q]{\frac{u+v}{u}}$$

o, passando ai logaritmi,

$$\log\sqrt[q]{\frac{u+v}{u}} > \log\frac{u+v-v\frac{q-1}{2q}}{u+v\frac{q-1}{2q}}\,. \tag{6.4}$$

Nell'esempio numerico $19/21 = 0.904762 > 0.90288 = \sqrt[5]{\frac{3}{5}}$.

Come riconosciuto da Hofmann, la Prop. V è un caso particolare della disuguaglianza

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^p < \frac{a+px}{a-px} \tag{6.5}$$

valida per numeri reali $x \in (0,a)$ e $p \in (1, \frac{a}{x})$. Questa disuguaglianza si può dimostrare passando ai logaritmi naturali di ambo i membri

$$\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^p = 2p\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + ...\right)$$

e

$$\ln\frac{a+px}{a-px} = 2\left(\frac{px}{a} + \frac{p^3x^3}{3a^3} + \frac{p^5x^5}{5a^5} + ...\right)$$

da cui l'asserto segue osservando che si è scelto $p > 1$. Estraendo la radice p-esima di (6.5) si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{a+x}{a-x} < \sqrt[p]{\frac{a+px}{a-px}}$$

da cui, posto $x \mapsto x/p$, segue

$$\frac{ap+x}{ap-x} < \sqrt[p]{\frac{a+x}{a-x}}$$

che equivale alla (6.4). Lo schema alle differenze introdotto da Mercator nelle proposizioni III-IV viene ora adoperato per dare una stima di quanto le frazioni ottenute con le regole illustrate nelle Propp. V e VI si allontanino dal valore di $[(u+v)/v]^p$ o $[(u+v)/v]^{1/q}$. Concentriamoci sul secondo caso che Mercator affronta nella Prop. VII distinguendo il caso q dispari da quello q pari. Iniziamo ad esporre il testo relativo al caso di q dispari.

Trovare di quanto la parte richiesta di un rapporto, trovata con il metodo precedente, differisca dal valore esatto.

Costruzione. Supposto dapprima che il denominatore della parte richiesta sia un numero dispari, considera i rapporti equidifferenti che sono vicini a quello trovato in precedenza, da una parte e dall'altra, in modo da ottenere tre rapporti; sottrai il più piccolo da quello di mezzo e quest'ultimo dal maggiore per ottenere due differenze la cui differenza, che per ora conserva da parte, a sua volta studierai. Quindi diminuisci di uno il denominatore della parte richiesta e cerca la metà di quanto resta tra le radici nella tavola dei numeri figurati collocata nella prop. III e, diviso per tre il corrispondente numero triangolare, troverai il multiplo che occorre prendere della differenza di differenze conservata in precedenza per trovare la particola di cui la parte cercata, determinata in precedenza, differisce da quella corretta. Ad esempio, voglio sapere di quanto il rapporto $\frac{19}{21}$ *trovato in precedenza differisce dal valore esatto della quinta parte di* $\frac{3}{5}$*. I rapporti equidifferenti più vicini a* $\frac{19}{21}$ *sono* $\frac{17}{19}$ *e* $\frac{21}{23}$*. La differenza tra il rapporto medio ed il minore è* $\frac{437}{441}$ *e tra il maggiore ed il medio è* $\frac{357}{361}$ *e la differenza da conservare di queste differenze è* $\frac{157437}{157757}$*. Sottraggo allora 1 dal denominatore 5 della parte richiesta ed ottengo 4 la cui metà 2, trovata tra le radici, ha 3 come numero triangolare corrispondente la cui terza parte è 1 che indica come la differenza di differenze* $\frac{157437}{157757}$ *sopra conservata indichi la particola di cui il rapporto* $\frac{19}{21}$ *differisce dalla quinta parte esatta di* $\frac{3}{5}$*, cosicché una parte quinta più corretta è* $\frac{19}{21}+$ *il rapporto* $\frac{157437}{157757}$.[6] (pp. 15-16 di [7])

Cerchiamo ora di formalizzare la regola di MERCATOR. Data una frazione della forma $\frac{t+s}{s}$ che rappresenta l'approssimante di $[(u+v)/v]^{1/q}$ trovata prima, egli chiede di costruire due altre frazioni *equidifferenti* che la comprendano, $\frac{s}{s-t}$ ed $\frac{s+2t}{s+t}$, e di formare le differenze prime[7] tra la frazione più piccola e la centrale e tra la più grande e la centrale: $\frac{s(s+2t)}{(s+t)^2}$ ed $\frac{s^2}{s^2-t^2}$. Infine si formi la corrispondente differenza seconda $\Delta := \frac{s(s+2t)(s^2-t^2)}{s^2(s+t)^2}$. A questo punto, si consideri il numero dispari $q = 2k+1$ e si cerchi k nella colonna *radices* della Tabella seguente, adattata da quella presente nella Prop. III.

---

[6] Invenire, quantum pars rationis imperata, quae per praecedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Constructio. Primo, si partis imperatae denominator sit numerus impar, sume rationes, quae sunt rationi per praecedentem inventae utrinque vicinae & aequidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer a media, & mediam a maxima, prodibunt duae differentiae, quarum differentiam denuo investigabis, tantisper asservandam. Deinde partis imperatae denominatori unitatem detrahe, reliqui semissem in tabula Figuratorum inserta prop. III, quaere inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, sic invenies, quoties sumenda sit differentiarum differentia supra asservata, ut acquiras particulam, qua pars imperata, quae per praecedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. V. gr. Scire velim, ratio $\frac{19}{21}$ per praecedentem inventa quantum deficiat exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$. Rationi $\frac{19}{21}$ utrinque vicinae & aequidifferentes sunt $\frac{17}{19}$ et $\frac{21}{23}$. Differentia minimae a media $\frac{437}{441}$ & mediae a maxima $\frac{357}{361}$, et harum differentiarum differentia $\frac{157437}{157757}$ asservanda. Tum partis imperatae denominatori 5 detraho 1, restant 4, cujus semissi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens est 1, indicans differentiarum differentiam supra asservatam $\frac{157437}{157757}$ semel sumtam exhibere particulam, qua ratio $\frac{19}{21}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$, adeo ut hujus exactior pars quinta sit ratio $\frac{19}{21}$ + ratione$\frac{157437}{157757}$.

[7] Si ricordi che le differenze sono riferite ai logaritmi delle frazioni equidifferenti. Ad esempio $\log\frac{s}{s-t} - \log\frac{s+t}{s} = \log\frac{s^2}{s^2-t^2}$.

Unitates	radices	trigonales	pyramidales	trigono-trigonales	trigono-pyramidales	pyramidi-pyramidales	trigono-trigono-pyramid.	trigono-pyramidi-pyramid.	pyramidi-pyramidi-pyramida
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								

Si cerchi il numero nella colonna *trigonales* corrispondente che coincide con la somma di tutti gli interi fino a k, cioè $\frac{k(k+1)}{2} = \frac{q^2-1}{8}$ e si divida per 3 il numero così ottenuto. Allora la differenza tra i logaritmi di $(s+t)/s$ e di $\log \sqrt[q]{\frac{u+v}{u}}$ è $\Delta \frac{q^2-1}{24}$. Nell'esempio proposto $q = 5$ per cui

$$\left|\log \sqrt[5]{\frac{3}{5}}\right| > \left|\log \frac{19}{21}\right| + 1 \cdot \left|\frac{17 \cdot 21^3}{23 \cdot 19^3}\right| ,$$

dove l'introduzione dei moduli è dovuta al fatto che le frazioni sono proprie. Per comprendere la stima dell'errore commesso consideriamo l'esempio numerico che coinvolge l'approssimazione di $\sqrt[5]{\frac{5}{3}}$ con $\frac{21}{19}$ [8]. Osserviamo anzitutto che la frazione approssimante nell'equazione (6.4) si può riscrivere nella forma

$$\frac{qu + v\frac{q+1}{2}}{qu + v\frac{q-1}{2}} \; : \tag{6.6}$$

pertanto, se si creano frazioni equidifferenti aggiungendo ad ogni passaggio v a numeratore e a denominatore, dopo $(q-1)/2$ passaggi si ha una frazione con numeratore $q(u+v)$. Al contrario, se si procede formando frazioni equidifferenti ottenute togliendo ad ogni passaggio v a numeratore e a denominatore, dopo $(q-1)/2$ passaggi si ottiene una frazione che ha a denominatore qu e si ha la sequenza

$$\frac{qu+v}{qu} > \frac{qu+2v}{qu+v} > .... > \frac{q(u+v)}{qu+v(q-1)} \, . \tag{6.7}$$

Si chiami a il logaritmo della frazione più piccola, $a+b$ quello della frazione immediatamente successiva, e così via seguendo lo schema alle differenze ottenuto nelle proposizioni III e IV. Se i logaritmi di tutte le frazioni ottenute in (6.7) vengono sommati, per costruzione si ottiene $\log \frac{u+v}{u}$ e dividendo il risultato per q si giunge al numero da approssimare $\log \sqrt[q]{\frac{u+v}{u}}$ e dalla posizione della frazione approssimante (6.6) nella sequenza (6.7) si può stimare l'errore commesso con la sostituzione ed ottenere una stima più accurata. Tornando all'esempio di Hofmann, formiamo la catena di $q = 5$ frazioni

$$\frac{25}{23} < \frac{23}{21} < \frac{21}{19} < \frac{19}{17} < \frac{17}{15}$$

e poniamo $\log\frac{25}{23} = a$, $\log\frac{23}{21} = a+b$, $\log\frac{21}{19} = a+2b+c$, $\log\frac{19}{17} = a+3b+3c+d$, $\log\frac{17}{15} = a+4b+6c+4d+e$. Pertanto

$$\log\frac{5}{3} = \log\frac{25}{15} = \log\frac{25}{23}\cdot\frac{23}{21}\cdot\frac{21}{19}\cdot\frac{19}{17}\cdot\frac{17}{15} = 5a+10b+10c+5d+e$$

e, dividendo per 5

$$\log\sqrt[5]{\frac{5}{3}} = a+2b+2c+d+\frac{e}{5}\,.$$

D'altra parte è $\frac{21}{19} = a+2b+c$, per cui

$$\log\sqrt[5]{\frac{5}{3}}-\log\frac{21}{19} = c+d+\frac{e}{5} = (a+b)+(a+3b+3c+d)-2(a+2b+c)+\frac{e}{5} = \log\frac{23\cdot 19^3}{17\cdot 21^3}+\frac{e}{5}\,.$$

Nel caso generale, posto $q = 2k+1$, i logaritmi delle q frazioni equidifferenti, disposte in ordine crescente, sono a, $a+b$, $a+2b+c$,...

$$a+2kb+\binom{2k}{2}c+\binom{2k}{3}d+\binom{2k}{4}e+\dots,$$

limitando l'attenzione alle differenze quarte. La somma di questi logaritmi diventa

$$qa+\binom{q}{2}b+\binom{q}{3}c+\binom{q}{4}d+\binom{q}{5}e\,.$$

Per quanto mostrato sopra, se si divide questo valore per q si ottiene

$$\log\sqrt[q]{\frac{u+v}{u}} = a+kb+\frac{k(2k-1)}{3}c+\frac{k(2k-1)(k-1)}{6}d+\frac{k(2k-1)(k-1)(2k-3)}{30}e\,.$$

La frazione approssimante a destra di (6.4) si trova nella posizione $k+1$ della successione e pertanto ha come logaritmo

$$a+kb+\frac{k(k-1)}{3}c+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}d+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}e$$

cosicché si può scrivere

$$\log\sqrt[q]{\frac{u+v}{u}}-\log\frac{u+v-v\frac{q-1}{2q}}{u+v\frac{q-1}{2q}} = \frac{q^2-1}{24}\left\{c+(k-1)d+\frac{(k-1)(11k-18)}{20}e\right\}$$

dove si è ripristinato q al posto di k. Si vede dunque che all'ordine dominante la differenza tra $\log\sqrt[q]{\frac{u+v}{u}}$ ed il suo approssimante è pari al prodotto tra $\frac{q^2-1}{24}$ e la differenza seconda c che coinvolge il termine centrale della successione di frazioni adoperate.

Il caso in cui q è pari viene trattato in modo simile. Presa $\frac{s+t}{s}$ come frazione approssimante si costruisce una successione di frazioni equidifferenti. Nel caso

illustrato da MERCATOR dove $q = 8$ la successione è formata da 16 termini. Occorre osservare che nessuno dei termini coincide con $\frac{s+t}{s}$; in effetti egli considera

$$\frac{s+\frac{9}{2}t}{s+4t} < \frac{s+4t}{s+\frac{7}{2}t} < ... < \frac{s+\frac{3}{2}t}{s+t} < \frac{s+t}{s+\frac{1}{2}t} < \frac{s+\frac{1}{2}t}{s} < \frac{s}{s-\frac{1}{2}t} < ... < \frac{s-\frac{5}{2}t}{s-3t} < \frac{s-3t}{s-\frac{7}{2}t}$$

composta da 16 termini. Questo artificio di calcolo consente ancora una volta di ottenere una frazione

$$\frac{s+\frac{9}{2}t}{s-\frac{7}{2}t} = \frac{s+\frac{9}{2}t}{s+4t} \cdot \frac{s+4t}{s+\frac{7}{2}t} \cdots \frac{s+\frac{3}{2}t}{s+t} \cdot \frac{s+t}{s+\frac{1}{2}t} \cdot \frac{s+\frac{1}{2}t}{s} \cdot \frac{s}{s-\frac{1}{2}t} \cdots \frac{s-\frac{5}{2}t}{s-3t} \cdot \frac{s-3t}{s-\frac{7}{2}t}$$

equivalente a quella da approssimare. Come prima, detto a il logaritmo del termine minore della successione e procedendo secondo lo schema alle differenze $a+b$, $a+2b+c$, ecc. si ottiene l'espressione

$$\log \sqrt[q]{\frac{u+v}{u}} = 2a + 15b + 70c + 227\frac{1}{2}d + ... \tag{6.8}$$

I quattro termini centrali hanno logaritmi approssimati

$$\begin{array}{c} a+6b+15c+20d \\ a+7b+21c+35d \\ a+8b+28c+56d \\ a+9b+36c+84d: \end{array} \tag{6.9}$$

la differenza dei primi due è $b+6c+15d$, quella dei restanti due è $b+8c+28d$ e la differenza di tali differenze è $2c+13d$. Infine, la somma dei termini centrali nella (6.9) è $2a+15b+49c+91d$ la cui differenza da (6.8) è $21c+136\frac{1}{2}d = 10\frac{1}{2}(2c+13d)$ ed il coefficiente $10\frac{1}{2}$ è ancora pari a $(q^2-1)/6$, per $q = 8$.

Testo 6.2 (MERCATOR, **Logarithmotechnia)** (pp.16-17 di [7]). Originale 6.9

Se il denominatore della parte cercata è un numero pari; prendi la metà della differenza dei termini del rapporto trovato col metodo di prima e toglila la termine minore del rapporto, e sommala e toglila al termine maggiore; otterrai così quattro rapporti continui con termini equidifferenti, sottrarrai la differenza dei due rapporti minori dalla differenza dei due rapporti maggiori e conserverai la differenza tra queste differenze. Dimezza il denominatore della parte richiesta ed estrai dalla tabella della Prop. III le specie figurative opportune della metà appena trovata fino alla specie c e posto $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{3}$ *moltiplica il valore di ciascuna specie per il suo coefficiente e, sommati i contributi, avrai quante volte bisogna prendere la differenza delle differenze conservata in precedenza per ottenere la particola che esprime la differenza tra la parte richiesta trovata in precedenza ed il valore esatto. Ad esempio, con il metodo prima esposto si è trovato che l'ottava parte del rapporto* $\frac{8}{11}$ *è* $\frac{149}{155}$*; Vorrei sapere di quanto differisce dal valore esatto. La differenza dei termini è 6, la cui metà 3, sottratta al termine minore lascia 146, aggiunta al termine maggiore dà 158 e sottratta*

al maggiore lascia 152. Si hanno dunque quattro rapporti continui di termini equidifferenti $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. *La differenza dei due rapporti minori è* $\frac{24016}{24025}$ *e, sottratta alla differenza* $\frac{22192}{22201}$ *tra i due termini maggiori lascia la differenza delle differenze* $\frac{1753825}{1753879}$ *che va conservata. Il denominatore della parte cercata è 8, alla cui metà 4 corrispondono nella tabella allegata alla proposizione III queste specie:* $a + 3b + 3c$*; ma* $a = \frac{1}{2}$, *&* $3b = 6$, *&* $3c = 4$ *che, sommati danno* $10\frac{1}{2}$. *Pertanto occorre prendere il decuplo più metà di* $\frac{1753825}{1753879}$, *differenza di differenze conservata in precedenza per avere l'errore commesso prendendo il valore trovato in precedenza della parte ottava del rapporto. Ma il decuplo del rapporto* $\frac{1753825}{1753879}$ *è* $\frac{1753582}{1754122}$ *per la Prop. V, ovvero* $\frac{876791}{877061}$, *e la metà, per la Prop. VI è* $\frac{3507677}{3507731}$*; così la parte ottava del rapporto* $\frac{8}{11}$ *più corretta del valore* $\frac{149}{155}$ *trovato prima conterrà le raziuncole* $\frac{876791}{877061}$ *e* $\frac{3507677}{3507731}$.

Grazie ai risultati ottenuti, MERCATOR può passare alla costruzione di tavole logaritmiche i cui elementi sono presentati nelle proposizioni VIII-XIII. Nella proposizione VIII egli enuncia la seguente proporzione

I rapporti di termini equidifferenti stanno tra loro circa nel rapporto inverso tra le medie aritmetiche dei termini dei singoli rapporti.[8] (p.18 di [7])

Se scriviamo le frazioni nella forma $\frac{a+x}{a-x}$ e $\frac{b+x}{b-x}$, la proposizione di MERCATOR diventa

$$\log \frac{a+x}{a-x} : \log \frac{b+x}{b-x} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

ed è sostanzialmente corretta (*propemodum*) nel limite di piccoli rapporti x/a ed x/b, come si vede da uno sviluppo in serie. La Prop. IX spiega come utilizzare questo risultato per determinare $\log \frac{101}{100}$, e quindi $\log 101$, noti i logaritmi di $\frac{99.5}{100}$ e di $\frac{100}{100.5}$, ottenuti nell'introduzione. La proposizione precedente consente di affermare

$$\log \frac{101}{100} : \log \frac{100.5}{99.5} = \frac{1}{100.5} : \frac{1}{100}$$

che può essere risolta ottenendo $\log 101 = 2,0043213$. MERCATOR nota anche come migliorare la precisione delle tavole prendendo frazioni di riferimento come $999.5/1000.5$ in cui la differenza relativa tra numeratore e denominatore è sempre più piccola. La tavola logaritmica è completata nella Prop. XIII che impiega lo sviluppo in serie

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \dots . \tag{6.10}$$

Si supponga di volere trovare $\log 99999$. Poniamo $a = 100$, media aritmetica tra 99.5 e 100.5, $b = 100000$ e $c = 0.5$ in modo che $b - c = 99999.5$ sia il medio aritmetico dei termini che compongono la frazione $99999/100000$. Lo sviluppo (6.10) permette di esprimere in modo accurato $100/99999.5 = 0.00100000050000250001 25$. Dalla proposizione VIII segue allora

$$\log \frac{100000}{99999} : \log \frac{100.5}{99.5} = \frac{1}{99999.5} : \frac{1}{100}$$

[8] Rationes terminorum aequidifferentium sunt propemodum, ut reciproce ipsorum terminorum media Arithmetica.

e dunque

$$\log \frac{100000}{99999} = \frac{100}{99999.5} \log \frac{100.5}{99.5} \, .$$

Il legame dei logaritmi con la quadratura dell'iperbole equilatera e lo sviluppo in serie di $\log(1+x)$ è presentato nelle Propp. XIV-XIX, aggiunte all'opera in un secondo momento. La Prop. XIV è puramente geometrica e, basandosi su proprietà delle iperboli equilatere, mostra che $AH : AI = BI : FH$, dove I è il piede della parallela all'asintoto AE condotta a partire dal vertice B dell'iperbole, F un punto qualsiasi sull'iperbole: si tratta della nota equivalenza tra tutti i rettangoli aventi un vertice coincidente con il centro dell'iperbole, quello opposto appartenente all'iperbole e due lati posti sugli asintoti.

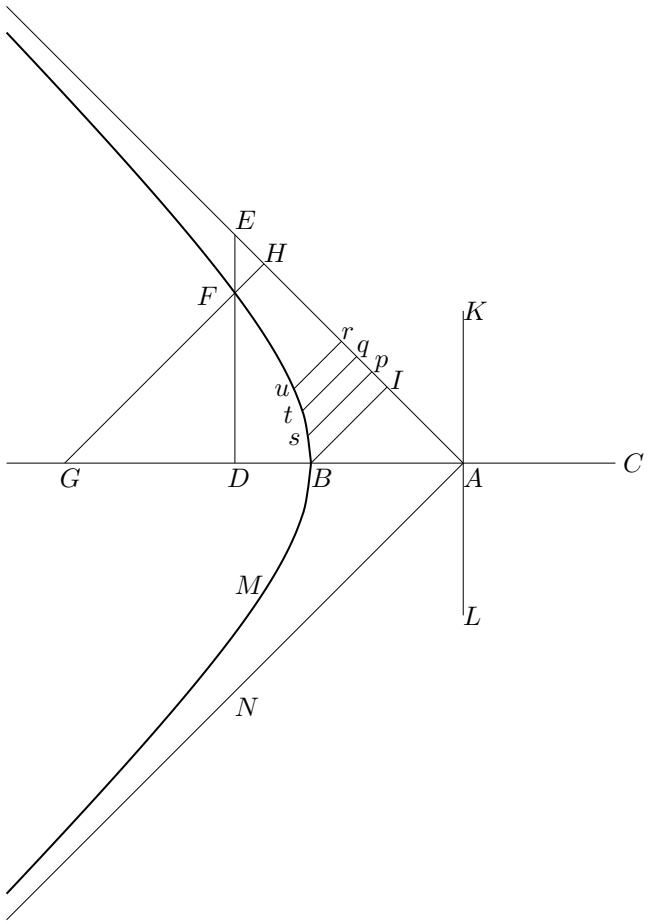

Figura 6.1: Schema per la dimostrazione della Prop. 14 della *Logarithmotechnia* di Mercator.

La successiva Prop. XV risolve il problema di trovare FH (Fig. 6.1), posti AI=BI=1 ed HI=a. Grazie alla Prop. XIV, la risposta è immediata: $FH = \frac{1}{1+a}$. MERCATOR però procede nell'effettuare la divisione estendendo al calcolo letterale le regole di divisione usuali ottenendo

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 \text{ \&c.}$$

senza preoccuparsi della presenza di un resto qualora la divisione venisse troncata ad un certo passo n.

Il contenuto della Prop. XVI equivale formalmente alla dimostrazione che

$$\int_0^x t^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \, ,$$

come già ottenuto da FERMAT (1601-1655). La dimostrazione procede induttivamente su n, basandosi su un esempio concreto, in cui $x = 21$.

Testo 6.3 (MERCATOR**, Logarithmotechnia)** (pp.30-31 di [7]). Originale 6.10

Suddiviso un numero qualsiasi in parti uguali, trovare la somma delle potenze qualsivoglia generate da questi numeri.

La somma richiesta si ottiene dividendo la potenza successiva di questo numero per l'esponente di tale potenza.

Sia dato ad esempio il numero 21 che, suddiviso in moltissime parti conterrà non solo i numeri 20, 19, 18, 17, ecc. ma anche moltissimi altri interposti, ciascuno dei quali si intende moltiplicato per una parte infinitesima del numero 21 e di questi prodotti ti domandi quale sia la somma; poiché questi stessi prodotti sono potenze prime (o linee) la potenza successiva è la quadratica che ha esponente 2, Pertanto se si divide il quadrato di 21, 441, per 2 si otterrà la somma di tutte le potenze prime generate da questi innumerevoli numeri che sono contenuti nel numero dato 21, ovvero 220|5. *Di nuovo, si consideri una qualsivoglia potenza prima moltiplicata per se stessa e si voglia trovare la somma di tutti questi quadrati. La potenza successiva è la cubica, di esponente 3, per cui diviso il cubo 9261 del numero assegnato 21 per l'esponente 3 si otterrà la somma di tutti i quadrati: 3087. Si moltiplichi uno qualunque di questi quadrati per il suo lato e si voglia trovare la somma di tutti questi cubi. La potenza successiva è la quadrato-quadratica, con esponente 4. Dunque diviso per l'esponente 4 il quadrato-quadrato di 21, 194481, si otterrà la somma di tutti i cubi:* 48620|25.

Dimostrazione. La somma di tutti i numeri dispari a partire dall'unità è uguale al quadrato del numero dei termini, così il numero di tutti i termini dispari compresi tra l'unità e 21 è 11, il cui quadrato 121 è uguale alla somma di tutti questi numeri dispari; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Ma il doppio di questo numero quadrato 121, cioè 242, supera la somma di tutti quei numeri dispari insieme ai numeri pari interposti, uguale al numero dei termini; ma dalla somma dei pari e dei dispari manca una quantità pari allo stesso numero dei termini 11. Dunque il doppio del quadrato del numero di termini dispari non può superare o mancare dalla somma di tutti i pari con i dispari più

dello stesso numero di termini ovvero (se ci sono infiniti termini) del medesimo numero di termini o la metà del termine massimo, moltiplicato per una parte infinitesima del numero dato. Se qualcuno ritiene che questo prodotto mantenga un qualche rapporto con la somma di tutti i termini, certamente il numero dato non è ancora stato diviso in parti innumerevoli, contro l'ipotesi. Dunque il quadrato della metà del numero di termini (sia pari che dispari) ovvero la metà del quadrato di tutti i termini è uguale alla somma dei termini.

La dimostrazione di MERCATOR è un ingegnoso azzardo in quanto parte dai noti risultati

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

e

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k = n(2n-1)$$

per concludere che

$$2\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{2n-1} k + n$$

e da qui estrapolare, anche nel caso in cui vi siano innumerevoli suddivisioni, che la somma di tutti i termini della divisione è pari alla metà del quadrato del termine più alto, cioè $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$. Il procedimento viene esteso alle potenze successive e permette di ottenere la quadratura dell'iperbole presentata nella Prop. XVII.

Testo 6.4 (MERCATOR, Logarithmotechnia) (pp.31-32 di [7]). Originale 6.11

Si ponga AI=1 nella figura precedente e si divida il segmento IE dell'asintoto in un gran numero di parti uguali come sono, ad esempio, $Ip = pq = qr = a$. Per le Prop. XIV e XV, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, ecc. e $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, ecc. e $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, ecc. Ora $ps + qt + ru =$ area di $BIru =$

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} 1- & a+ & aa- & a^3+ & a^4 \\ 1- & 2a+ & 4aa- & 8a^3+ & 16a^4 \\ 1- & 3a+ & 9aa- & 27a^3+ & 81a^4 \end{array} \right\} \text{ ecc.}$$
$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4$$

cioè è uguale al numero dei termini contenuti in Ir meno la somma di tali termini più la somma dei loro quadrati, meno la somma dei cubi, più la somma dei quadrato-quadrati, ecc.

Posto come prima IA=1 sia ora $Ip = 0[1=$ numero dei termini: grazie alle Prop. XV e XVI trovo che l'area BIps= al numero dei termini $0\lfloor 1$, meno la somma di quei termini $=0\lfloor 005$, più la somma dei loro quadrati $= 0\lfloor 000333333$, meno la somma dei cubi $= 0\lfloor 000025$, più la somma dei quadrato-quadrati $=0\lfloor 000002$,

meno la somma dei quadrato-cubi =0⌊000000166*, più la somma dei cubo-cubi* =0⌊000000014*, ecc.*

$$\begin{cases} 0\lfloor 1 & \\ & -0\lfloor 005 \\ 0\lfloor 000333333 & \\ & -0\lfloor 000025 \\ 0\lfloor 000002 & \\ & -0\lfloor 000000166 \\ -0\lfloor 005025166 & \\ & \underline{-0\lfloor 000000014} \\ 0\lfloor 0095310181 & = area\, BIps \end{cases}$$

Il valore ottenuto da Mercator coincide con quello corretto 0.0095313179 fino alla sesta cifra decimale.

I risultati di Mercator attirarono molta attenzione e fornirono lo spunto per articoli apparsi sulle *Philosophical Transactions* della Royal Society in cui si proponevano altri metodi di quadratura per serie dell'iperbole ovvero miglioramenti della teoria contenuta nella *Logarithmotechnia*. Al primo gruppo di lavori appartiene la memoria [10] di Lord William Brouncker (1620-1684)—matematico irlandese tra i fondatori della Royal Society di cui fu primo presidente—sulla quadratura dell'iperbole ottenuta con una ingegnosa scomposizione in rettangoli dell'area compresa tra un arco di iperbole equilatera, l'asse delle ascisse e due rette parallele all'asse delle ordinate. I lati dei rettangoli erano scelti in modo da fornire una serie i cui termini erano numeri razionali. Per la storia dei logaritmi ha interesse un lavoro del 1668 in cui John Wallis (1616-1703), dopo aver elogiato gli astuti procedimenti introdotti da Mercator, osserva un problema di convergenza che si presenta qualora si voglia quadrare una porzione BIHF di iperbole in cui $IH > AI$ in quanto la serie utilizzata per effettuare la quadratura non converge. Detta $A > 1$ la lunghezza di IH, Wallis osserva

Non bisogna frattanto nascondere che, se si cerca la quadratura della regione BIHF (in cui IH è da ritenersi maggiore di AI), il procedimento non porta ad un esito positivo: il rimedio non è sufficiente a curare il male, come abbiamo detto. Infatti se si prende $A > 1$ è evidente che le sue potenze successive saranno sempre più grandi e dunque meno trascurabili.[9] (p. 754 di [11])

Oltre a sollevare il problema, Wallis lo risolve con un cambiamento di variabili.

Testo 6.5 (Wallis) (pp. 754-755 di [11]). Originale 6.12

Questo problema è facilmente superabile operando una piccola modifica della costruzione.

[9] Dissimulandum interim non est; siquis totius BIHF spatii (cujus latus IH longius intelligatur quam AI) quadraturam postulet; rem non ita feliciter successuram: propter medelam, quam modo diximus, malo minus sufficientem. Cum enim jam ponenda sit $A > 1$; manifestum est, posteriores ipsius potestates, altius in integrorum penetraturas, adeoque minime negligendas.

Costruito tutto come prima, esponiamo come quadrare la regione HFur; (la cui lunghezza AH si può ritenere maggiore, minore od uguale ad AI: preso un punto qualsiasi r tra A ed H, oltre ad I o coincidente con esso) si ponga allora (non, come prima, AI=1, ed Ir=A ma:) AH=1; ed Hr=A che si deve intendere suddiviso in innumerevoli parti uguali, ognuna lunga a. Poiché AH=1 le parti restanti saranno via via decrescenti: 1-a, 1-2a, 1-3a, ecc. fino ad Ar=1-A. Di nuovo, poiché i rettangoli FHA, urA, BIA, ecc hanno tutti area uguale, diciamo a b^2 *sarà* $HF = \frac{b^2}{1}$ *e i restanti segmenti saranno* $\frac{b^2}{1-a}$, $\frac{b^2}{1-2a}$, $\frac{b^2}{1-3a}$, *ecc. fino ad* $ru = \frac{b^2}{1-A}$ *a racchiudere la regione HFur. (Tutto ciò è dimostrato nella mia Arithmetica Infinitorum, prop. 88, 94, 95.)*

Eseguita la divisione, si troverà

$$\frac{b^2}{1-a} = b^2 + b^2a + b^2a^2 + b^2a^3 + b^2a^4\,, \&c.$$

cioè b^2 *per* $1+a+a^2+a^3+a^4$ *, ecc. (prendendo tutte le potenze positive successive di a). Ed operando allo stesso modo con gli altri segmenti compresi tra HF ed ru si avrà,*

$$\left.\begin{array}{llllll} 1+ & a+ & a^2+ & a^3+ & a^4 & \&c. \\ 1+ & 2a+ & 4a^2+ & 8a^3+ & 16a^4 & \&c. \\ 1+ & 3a+ & 9a^2+ & 27a^3+ & 81a^4 & \&c. \\ \& & \textit{così} & \textit{via} & \textit{fino} & a & \\ 1+ & A+ & A^2+ & A^3+ & A^4 & \&c. \end{array}\right\} \textit{per } b^2$$

Ed il prodotto di tutte le somme $A+\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{3}A^3+\frac{1}{4}A^4+\frac{1}{5}A^5$ *ecc. per* $b^2 = FHru$ *(per la prop. 64 dell'Arithm. Infin.)*

Wallis ha operato un cambiamento di variabili ponendo $AH = 1$, anziché $AI = 1$ e prendendo $Ir = A$. Ha poi suddiviso il segmento Hr in parti di ampiezza arbitrariamente piccola a, così che i punti di suddivisione hanno ascissa $1 = AH$, $1-a$, $1-2a$, fino a giungere a $1-A = Hr$. A questo punto, detto b^2 il valore costante dell'area dei rettangoli aventi vertici opposti in A e in un punto sull'iperbole equilatera, le ordinate dei punti di suddivisione sono b^2, $b^2/(1-a)$, $b^2/(1-2a)$,..., $b^2/(1-A)$. Ora il procedimento di Mercator viene fatto ripartire inalterato, producendo una serie convergente. Nella sua esposizione, Wallis mostra anche come sia possibile ottenere la formula di Mercator grazie ai risultati che egli aveva esposto nella *Arithmetica Infinitorum* (1656) dove aveva mostrato—con altra notazione—

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\,. \tag{6.11}$$

Il procedimento di Wallis si può riproporre in questi termini (pp. 162-163 di [12]). Data l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{1+x}$, per calcolare l'area A sottesa nell'intervallo $[0, x]$ si divida tale intervallo in n parti uguali di ampiezza $h = x/n$ e si costruiscano i rettangoli circoscritti all'iperbole, aventi base h ed altezze

$$1, \quad \frac{1}{1+h}, \qquad \frac{1}{1+2h}, \quad \frac{1}{1+3h}, \quad \ldots. \quad \frac{1}{1+(n-1)h}$$

ognuna delle quali rappresenta la somma di una serie geometrica. Si può pertanto scrivere

$$\begin{aligned} A \simeq \quad & h + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{1+jh} \\ & h + h\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k\right) + h\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (2h)^k\right) \\ & +.... + h\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k [(n-1)h]^k\right) \end{aligned}$$

o, raggruppando i termini con la stessa potenza di h

$$\begin{aligned} A \simeq \quad & nh - h[h + 2h + ... + (n-1)h] \\ & +h[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + ... + (n-1)^2 h^2] \\ & +.... + (-1)^k h[h^k + (2h)^k + (3h)^k + ... + (n-1)^k h^k] + ... \end{aligned}$$

cioè, ricordando la definizione di h,

$$\begin{aligned} A \simeq \quad & x - \left(\tfrac{x}{n}\right)^2 [1 + 2 + ... + (n-1)] \\ & + \left(\tfrac{x}{n}\right)^3 [1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2] + ... + (-1)^k \left(\tfrac{x}{n}\right)^{k+1} [1^k + 2^k + ... + (n-1)^k] : \end{aligned}$$

nel limite in cui $n \to \infty$, grazie a (6.11) si ottiene lo sviluppo di MERCATOR

$$A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

All'articolo di WALLIS seguì una nota dove MERCATOR [13] chiama *naturali* i logaritmi ottenuti per il tramite della quadratura dell'iperbole, mentre i logaritmi di BRIGGS sono detti *tabulari*. Ancor più rilevante è che MERCATOR enuncia correttamente la regola per la trasformazione da un sistema di logaritmi nell'altro: $\log a = 0.43429448 \ln a$.

Accade pertanto che il logaritmo non tabulare di 10 *sta al logaritmo tabulare 100000000 come 1 sta a 4,3429448.*[10] (p. 761 di [13])

6.3 La serie di GREGORY

In questa sezione esaminiamo la dimostrazione rigorosa dei risultati di MERCATOR ottenuta da James GREGORY (1638-1675). L'importanza dell'opera di questo matematico scozzese fu riconosciuta solo dopo la morte, avvenuta peraltro in giovane età. Egli soggiornò a Londra due volte, nel 1663 e nel 1668 e passò alcuni anni in Italia, soprattutto a Padova. Dal 1668 fino al 1674 insegnò presso l'università scozzese di St. Andrews, troppo isolata perché potesse essere coinvolto attivamente nel fermento culturale della vita accademica inglese. Nominato professore nel 1674 ad Edimburgo, dove i contatti con il resto del mondo accademico potevano essere più facili, morì un anno più tardi a soli trentasette anni [14]. Nel 1668 pubblicò a Londra le *Exercitationes Geometricae*. Malgrado i risultati presentati, le *Exercitationes Geometricae* non esercitarono

[10] Fiat igitur, ut Log. us 10^{rii} non-tabularis 2302585, ad tabularem 100000000; ita 1 ad 4,3429448.

l'influsso che avrebbero meritato in quanto furono travolte dalla polemica tra l'autore ed HUYGENS, nata in seguito alla pubblicazione del volume *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Padova, 1667) in cui GREGORY aveva cercato di mostrare l'impossibilità di ottenere la quadratura del cerchio solo con operazioni algebriche. Ciò provocò una reazione molto critica di HUYGENS, pubblicata nel 1668 sul *Journal des Savants*, seguita da una dura replica di GREGORY apparsa sulle *Philosophical Transactions* e da un ulteriore decisivo attacco di HUYGENS ancora dalle pagine del *Journal des Savants*. La *Appendicula ad veram Circuli & Hyperbolae Quadraturam* che apre le *Exercitationes Geometricae* reca traccia di questa polemica ed utilizza surrettiziamente i risultati ottenuti per contrattaccare HUYGENS. Questa circostanza irritò i lettori gettando un immeritato discredito sul contenuto matematico pregevole dell'opera.

Dopo l'*Appendicula*, la prima *Exercitatio—N. Mercatoris quadratura hyperboles geometrice demonstrata*—si propone di dimostrare la quadratura di MERCATOR in maniera rigorosa. Questa lezione si articola lungo cinque proposizioni, nella prima delle quali GREGORY richiama il risultato, già noto ad EUCLIDE, sulla somma S di una progressione geometrica a termini positivi A, B, C,...,F,... posti in ordine decrescente:

$$A - B : A = A : S$$

proporzione verificabile sapendo che $S = A\frac{1}{1-q}$, dove $q = B/A$ è la ragione della progressione.

Dato un numero infinito di quantità A, B, C, D, E, F, ecc. la prima e la più grande delle quali sia A. Allora $A - B$ sta ad A come A sta alla somma di tutte le quantità, come in vari posti si trova dimostrato dai Geometri.[11] (p.9 di [15])

Nella Proposizione 2, GREGORY considera una progressione geometrica a segni alterni e mostra che

$$A + B : A = A : Z\,,$$

dove A, B hanno lo stesso significato di prima e Z è la differenza tra la somma degli infiniti termini di posto dispari e la somma degli infiniti termini di posto pari, cioè la somma della serie a segni alterni.

Ferme restando le ipotesi precedenti affermo che $A + B$ sta ad A come A sta alla differenza tra tutti i termini di posto dispari, A, C, E, G, ecc. e tutti quelli di posto pari: infatti questa differenza, cioè $A - B$, $C - D$, $E - F$, è la somma di una serie infinita di termini in proporzione continua di ragione A su C, e pertanto, per quanto mostrato prima, $A - C$ sta ad A ovvero $A^2 - B^2$ sta ad A^2 come $A - B$ sta alla somma di tale serie che chiamiamo Z. Dividendo i primi termini della proporzione per $A - B$, $A + B$ sta ad $\frac{A^2}{A-B}$ come $A - B$ sta a Z e dunque $AZ + BZ = A^2$ da cui $A + B$ sta ad A come A sta a Z, differenza tra

[11] Si fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, E, F, &c. numero infinitae, quarum prima & maxima A; erit $A - B$ ad A ut A ad summam omnium, hoc enim passim demonstratur apud Geometras.

tutti i termini A, C, E, G, ecc. a tutti i termini B, D, F, ecc. come occorreva dimostrare.[12] (p.9 di [15])

GREGORY osserva che la successione formata dalle differenze tra i termini dispari (con segno positivo) ed i successivi termini pari è a sua volta una progressione geometrica di ragione A/C. Infatti, se $q = B/A$ allora $A - B = A(1-q)$, $C - D = C(1-q)$, $D - F = E(1-q)$ e dunque $A - B : C - D = A : C$. Basta allora applicare il risultato della proposizione precedente per scrivere

$$(A - C)(1 - q) : A(1 - q) = A - B : Z$$

dove a destra abbiamo ripristinato la scrittura $A - B$ al posto dell'equivalente $A(1-q)$. Poiché $C = B \times q = B^2/A$ si ricava la proporzione di GREGORY

$$A^2 - B^2 : A^2 = A - B : Z$$

da cui segue $Z(A + B) = A^2$, cioè la tesi.

La Proposizione 3 illustra come legare questi risultati alla misura delle aree di parallelogrammi inscritti in un'iperbole *qualsiasi*, anche non equilatera, come nella Figura 6.2

Sia data un'iperbole $SB3$ di vertice B ed asintoti AR ed $A4$. Si tracci BK parallelo all'asintoto AR ed un altro segmento YD a piacere, parallelo ad entrambi i precedenti e tra loro compreso; dico che YD è la somma di una serie di termini in proporzione continua, di cui il primo è $BK = KA$ ed il secondo è KD; infatti, $BK - KD = AD$ sta a BK come BK sta a DY, da cui segue l'asserto per quanto mostrato nel primo punto.

Si tracci ora un segmento 34 parallelo alle stesse rette RA e BK, al di là del punto K. Affermo che il segmento 34 è uguale alla differenza di tutti i termini di posto dispari e tutti i termini di posto pari nella serie infinita il cui primo termine è KB ed il secondo è $K4$: infatti, $KB + K4 = A4$ sta ad BK come BK sta a 34 e dunque segue l'asserto grazie a quanto mostrato al punto due;[13] (p.10 di [15])

---

[12] Iisdem positis quae antecedente; dico $A + B$ ad A ut A est ad excessum omnium A, C, E, G, &c. in locis imparibus, supra omnes B, D, F, &c. in locis paribus: est enim dictus excessus summa seriei infinitae continue proportionalium in ratione A ad C, nempe $A - B$, $C - D$, $E - F$ &c. & ideo (ex praecedente) ut $A - C$ ad A vel $A^2 - B^2$ ad A^2, ita $A - B$ ad summam dictae seriei, quam vocamus Z; & priores analogiae terminos applicando ad $A - B$, $A + B$ est ad $\frac{A^2}{A-B}$ ut $A - B$ ad Z, & ideo $AZ + BZ = A^2$, & proinde $A + B$ est ad A ut A ad Z, excessum omnium A, C, E, G, &c. supra omnes B, D, F, &c. quod demonstrare oportuit.

[13] Sit Hyperbola $SB3$, cujus vertex B, asymptotae AR, $A4$; asymptotae RA ducatur parallela BK, & altera ad libitum inter rectas BK, RA, utrique parallela YD; Dico YD esse summam infinitae seriei continue proportionalium, cujus primus terminus $BK = KA$ & secundus KD; est enim $BK - KD = AD$ ad BK ut BK ad DY; & ideo ex hujus prima patet propositum.

Eisdem rectis RA, BK, ultra punctum K fiat parallela 34; dico rectam 34 aequalem esse excessui omnium terminorum imparium supra omnes terminos pares infinitae seriei cujus primus terminus KB, & secundus $K4$: est enim $KB + K4 = A4$ ad BK ut BK ad 34; & ideo ex hujus 2 patet propositum.

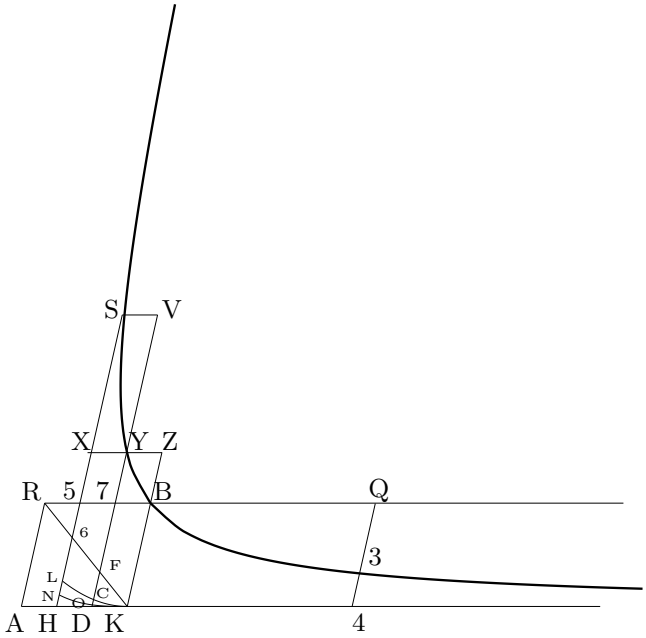

Figura 6.2: Schema per la dimostrazione della Prop. 4 delle *Exercitationes Geometricae* di Gregory.

Per commentare questo passo, richiamiamo una proprietà dell'equazione di un'iperbole generica riferita ai propri asintoti, quando questi non siano ortogonali. L'equazione generale di una conica in coordinate cartesiane *ortogonali* (x, y) è

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

e se osserviamo che il legame con le coordinate cartesiane *oblique* (X, Y) è dato da una relazione del tipo

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases}$$

possiamo concludere che, a meno di definire i coefficienti dello sviluppo, l'equazione generale di una conica in coordinate oblique è ancora del tipo

$$aX^2 + bY^2 + cXY + dX + eY + f = 0\,.$$

Se richiediamo che le rette $X = 0$ ed $Y = 0$ siano asintoti della conica, cioè non abbiano alcuna intersezione (né reale né immaginaria) con la conica, abbiamo che le equazioni

$$bY^2 + eY + f = 0 \quad \text{e} \quad aX^2 + dX + f = 0$$

non debbono ammettere soluzione, cioè deve essere $a = b = d = e = 0$ che riduce l'equazione della conica (cioè dell'iperbole) a

$$XY = k$$

che formalmente coincide con quella dell'iperbole equilatera. Questa osservazione è importante perché è grazie ad essa che si comprende come possa sussistere lo stretto legame tra iperboli e progressioni geometriche anche nel caso non equilatero. Venendo al testo di GREGORY e riferendoci alla Figura 6.2 egli traccia il segmento BK parallelo all'asintoto RA e passante per il vertice B dell'iperbole, insieme ad una famiglia di altri segmenti paralleli come YD. GREGORY afferma che YD è la somma di una progressione geometrica di termine iniziale $BK = KA$ e secondo termine KD. Infatti, poiché Y e B appartengono all'iperbole e B ne è il vertice, deve valere l'uguaglianza $X_Y Y_Y = X_B Y_B$ che può essere riletta, ricordando che $X_B = Y_B = BK = KA$

$$BK - KD(= AD) : BK = BK : YD$$

ed il risultato segue dalla Prop. 1 e dall'unicità del quarto proporzionale. Similmente, quando si prende il punto 3 sull'iperbole e si traccia la parallela 34 all'asintoto RA deve essere

$$A4(= AK + K4 = BK + K4) : BK = BK : 34$$

che mostra l'asserto di GREGORY per confronto con la Prop. 2 ed invocando ancora l'unicità del quarto proporzionale.

La Proposizione 4 è una deliziosa quanto astuta costruzione geometrica sostenuta da una logica ferrea che permette di quadrare la porzione $SBKH$ delimitata dall'arco SB di iperbole, dall'asintoto $A4$ e dalle parallele SH e BK all'asintoto AR.

Testo 6.6 (GREGORY, Exercitationes Geometricae) (pp.10-11 di [15]). Originale 6.13

Sia data la regione iperbolica $SBKH$ compresa tra la curva iperbolica SB il segmento di asintoto HK ed i segmenti di retta SH e BK, paralleli all'altro asintoto e si chiami B il vertice dell'iperbole: si ottiene un parallelogramma $BKHS$ e si prolunghi $B5$ fino ad R e si tracci il segmento KR che taglia $5H$ in 6. Si continui indefinitamente la proporzione continuata, cioè $5H$, $6H$, LH, NH, e così via e si prendano il parallelogrammo $5BKH$, il triangolo $K6H$, il trilineo quadratico KLH, il trilineo cubico KNH e così via all'infinito. Dico che la regione iperbolica $BKHS$ è equivalente all'unione di questo parallelogramma più questo triangolo, più tutti gli infiniti trilinei che chiamiamo complessivamente ω. Se la Figura $BKHS$ ed ω non hanno la stessa area, sia α la loro differenza; si divida allora il segmento HK in tante parti uguali con segmenti paralleli all'asintoto RA, in modo che i rettangoli (compresi tra quei segmenti e le porzioni del segmento KH) circoscritti alla figura $BKHS$, cioè VH, ZD abbiano un'area totale che differisce meno di α da quella dei rettangoli inscritti nella Figura $BKHS$, cioè YH, BD; infatti questo è possibile operando una divisione opportuna del segmento KH. Poiché B è il vertice dell'iperbole,

il parallelogramma $BKAR$ è equilatero e pertanto il segmento arbitrario $6H$ è uguale ad HK e dal momento che $5H$, $6H$, LH, NH, ecc. formano una proporzione continua all'infinito, dalla Prop. III si avrà che la retta SH è uguale alla somma di tutti ed il parallelogramma SD è equivalente alla somma di tutti i parallelogrammi $5D$, $6D$, LD, ND, ecc. all'infinito; e la somma di tutti i parallelogrammi $5D$, $6D$, LD, ND, ecc. all'infinito è maggiore del parallelogrammo $5D$ insieme alla porzione di triangolo $6FDH$, alla porzione di trilineo quadratico $LCDH$ alla porzione di trilineo cubico $NCDH$, ecc. all'infinito, che sono tutte ordinatamente inscritte nei parallelogrammi corrispondenti e pertanto il parallelogramma SD è maggiore del parallelogrammo $5D$ unito a queste porzioni; nella stessa maniera si dimostra che il parallelogramma YK è maggiore del rettangolo $7K$ e ad un numero infinito di porzioni FKD, CKD, OKD, ecc. cosicché il rettilineo $SVYZKH$ è maggiore di ω. Il segmento FD è poi uguale a DK e $7D$, FD, CD, OD, ecc. all'infinito formano una proporzione continua e dunque YD ne uguaglia la somma ed il parallelogramma XD è equivalente ai parallelogrammi $7H$, FDH, CDH, ODH, ecc. ma la somma dei parallelogrammi $7H$, FDH, CDH, ODH, ecc. è inferiore al rettangolo $7H$ unito alla porzione $6FDH$ di triangolo, alla porzione di trilineo quadratico $LCDH$, alla porzione di trilineo cubico $NCDH$, ecc. in quanto i parallelogrammi suddetti sono inscritti in queste porzioni e dunque il parallelogramma YH è minore del parallelogrammo $7H$ insieme alle porzioni suddette; alla stessa maniera si dimostra che il parallelogrammo BD è minore del parallelogramma BD insieme alle porzioni in numero infinito FKD, CDK, OKD e dunque il rettilineo $XY7BKH$ è minore di ω: ci sono pertanto quattro quantità, la più grande e la più piccola delle quali sono i rettilinei $SVYZKH$ ed $XY7BKH$ mentre quelle intermedie sono ω e lo spazio iperbolico $SBKH$; e dunque la differenza di quelle intermedie, cioè α è minore della differenza delle estreme che è assurdo in quanto la si era presa maggiore; dunque la differenza tra la Figura $SBKH$ ed ω è nulla e pertanto sono equivalenti, come si doveva dimostrare.

La prima osservazione riguarda il parallelogramma $AKBR$ che in effetti è un rombo, dal momento che B è il vertice dell'iperbole per cui le sue coordinate (X_B, Y_B) sono tra loro coincidenti. Sul segmento $5H$ Gregory costruisce una progressione geometrica il cui primo termine è $5H$ ed il secondo è $6H$, dove il punto 6 è l'intersezione di $5H$ con il segmento di retta KR. Dai punti L, N, ecc. della progressione Gregory spicca degli archi di curva LCK, NDK che confluiscono tutti in K. La natura di queste curve è intuibile dai loro nomi: *trilineum quadraticum*, *trilineum cubicum*, ecc. Se per il momento spostiamo l'origine delle coordinate X in K ed orientiamo l'asse X nel verso da K ad A, tali curve hanno equazione $Y = kX^n$, dove va scelta in modo che, quando $X = 5H$, si abbia il passaggio per i punti richiesti. Questa proposizione intende mostrare che l'area del quadrilatero misto $SBKH$ è equivalente all'unione ω del parallelogrammo $5K$, del triangolo $6HK$, del trilineo quadratico LHK, di quello cubico NHK e così via. Gregory ragiona per assurdo e suppone che l'area dello spazio iperbolico $SBKH$ differisca da ω per una quantità $\alpha > 0$. Egli osserva a questo punto che, a patto di suddividere HK in segmenti uguali

tra loro e sufficientemente piccoli, è sempre possibile costruire una successione di parallelogrammi circoscritti al segmento di iperbole come SD ed YK e di parallelogrammi come XD e $7K$ che sono inscritti ad $SBKH$ in modo che la somma delle aree dei primi differisca dalla somma delle aree dei secondi meno di α. A questo punto, poiché $BKAR$ è un rombo ed RH una sua diagonale, possiamo concludere che $6H = HK$ e dunque $56 = 5H - 6H = AH$ che rappresenta l'ascissa del punto S appartenente all'iperbole. Dall'equazione dell'iperbole segue che $AH : BK = BK : HS$, ovvero $AH : 5H = 5H : HS$. D'altra parte la Prop. 1, applicata alla progressione di primo termine $5H$ e secondo termine $6H$ ha somma S tale che $AH : 5H = 5H : S$. Ne consegue che HS è la somma di $5H$, $6H$, LH, NH, ecc. o, in modo equivalente, il parallelogramma circoscritto $SVDH$ è equivalente all'unione dei parallelogrammi di ugual base HD ed altezze $5H$, $6H$, LH, NH. Infine, il parallelogramma $6H$ ha area maggiore della porzione del triangolo $6HK$ compresa tra $5H$ e $7D$; il parallelogramma LD ha area maggiore della porzione del trilineo quadratico LHK compresa tra le medesime rette, e via di seguito. Analogamente, proprio perché le curve $5B$, $6K$, LK, NK sono di tipo potenza, staccheranno sul segmento $7D$ dei segmenti $7D$, FD, CD, OD che ancora formano una progressione geometrica e ripetendo il ragionamento di prima si prova che il parallelogramma YK ha area maggiore della somma delle aree comprese tra le curve $5B$, $6K$, LK, NK, il segmento DK e le parallele $7D$ e BK. Pertanto il pluriparallelogramma circoscritto $SVYZKH$ ha area maggiore di ω. Ora si passa all'esame del parallelogramma XD inscritto nello spazio iperbolico ed equivalente ad YK. Esso sarà ovviamente equivalente a tutti gli stessi parallelogrammi $7K$, FK, CK, OK di prima. Tuttavia ora si nota che il parallelogramma FK ha area *minore* della porzione $6FDH$, il parallelogramma CK ha area *minore* della porzione $LCDH$ e così via. In definitiva XD ha area minore della somma delle aree del parallelogramma $5D$ con tutte le predette porzioni $6FDH$, $LCDH$, ecc. Ripetendo un discorso analogo per il parallelogramma $7K$ si conclude che il pluriparallelogramma inscritto $XY7BKH$ ha area inferiore a quella di ω. Dunque abbiamo il seguente ordinamento

$$A(SVYZKH) > A(SBKH), A(\omega) > A(XY7BKH)$$

che è assurdo in quanto abbiamo assunto $A(SVYZKH) - A(XY7BKH) < \alpha$ e $|A(SBKH) - A(\omega)| = \alpha$.

Alla Proposizione 4 seguono quattro *Consectaria* che ne illustrano le conseguenze ed applicazioni.

Cons. 1 *E pertanto, data la serie infinita di quantità in proporzione continuata di ragione $KH = 6H$ su KB, di primo termine pari al parallelogramma BH, il primo termine $+\frac{1}{2}$ del secondo$+\frac{1}{3}$ del terzo $+\frac{1}{4}$ del quarto $+\frac{1}{5}$ del quinto + ecc. all'infinito è = allo spazio iperbolico $SBKH$ come segue dalla quadratura dei trilinei.*[14] (p. 11 di [15])

[14]Cons. 1. Et proinde si fuerit series infinita quantitatum continue proportionalium in ratione KB ad $KH = 6H$, cujus primum terminus est parallelogrammum BH; erit primus terminus $+\frac{1}{2}$ secundi$+\frac{1}{3}$ tertii $+\frac{1}{4}$ quarti $+\frac{1}{5}$ quinti +&c. in infinitum = spatio Hyperbolico $SBKH$, hoc enim sequitur ex quadratura trilineorum.

Gregory trova qui lo sviluppo in serie dell'area dello spazio iperbolico $SBKH$ in termini dell'area A_0 del parallelogrammo BH. Infatti, sappiamo dalla Prop. 4 che $SBKH$ è equivalente ad ω che è ottenuto sommando ad A_0 le aree dei triangolo $6KH$ e di tutti i trilinei successivi. Ora, se $q = \frac{KH}{KB} < 1$ ed A_0 è l'area del parallelogramma BH, l'area del triangolo FKH è $A_1 = \frac{q}{2}A_0$; il trilineo quadratico ha equazione $Y = kX^2$ (con $k = 1/KB$) e ripetendo una quadratura *alla* Wallis con parallelogrammi al posto di rettangoli, l'area sottesa risulterà $A_2 = \frac{q^2}{3}A_0$ e così via ottenendo lo sviluppo

$$A(SBKH) = A_0(1 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{4}q^3 + \frac{1}{5}q^4 + \frac{1}{6}q^5 + ...)\,.$$

che coincide con lo sviluppo di $\ln(1-q)$ se si osserva che $A_0 \propto q$ e si porta il fattore q nello sviluppo. Lo sviluppo di $\ln(1+\ell)$ viene presentato nel secondo *Consectarium* dove Gregory considera la regione iperbolica $BK34$ con 34 parallela a BK, ma dalla parte opposta rispetto ad SH. Applicando la seconda parte della Prop. 3 e ripetendo un ragionamento analogo a quello operato per quadrare $SBKH$ si giunge a dimostrare che

$$A(BK34) = A'_0(1 - \frac{1}{2}q' + \frac{1}{3}q'^2 - \frac{1}{4}q'^3 + \frac{1}{5}q'^4 - \frac{1}{6}q'^5 + ...)\,.$$

Dove A'_0 è l'area del parallelogramma KQ e $q' = 34/KB$.

Cons. 2 *Se si prende una parallela* 34 *alla retta* BK *oltre a* K *e si considera lo spazio* $B34K$*, data la serie infinita di quantità in proporzione continua avente il parallelogramma* KQ *per primo termine e di ragione pari al rapporto tra* BK *e* $K4$*; il primo termine* $-\frac{1}{2}$ *del secondo* $+\frac{1}{3}$ *del terzo* $-\frac{1}{4}$ *del quarto + ecc. all'infinito è = allo spazio iperbolico* $B34K$*: anche questa conseguenza è dimostrabile in modo rigoroso dalla seconda conclusione della Prop. III come la conseguenza precedente è dimostrabile dalla prima conclusione. In entrambi i casi non è possibile ottenere la dimostrazione ricorrendo al metodo degli indivisibili di Cavalieri; vista l'importanza della questione è però parso bene adattare un metodo rigoroso di dimostrazione*[15] (pp. 11-12 di [15])

I *Consectaria* 3 e 4 considerano il caso $\ell = \ell'$ e forniscono l'espressione di $A(SBKH) - A(BK43)$ (Cons. 3) e di $A(SH43) = A(SBKH) + A(BK43)$ (Cons. 4) nella forma

$$A(SBKH) - A(BK43) = \beta(\ell^2 + \frac{1}{2}\ell^4 + \frac{1}{3}\ell^6 + \frac{1}{4}\ell^8 + ...)$$

e

$$A(SH43) = 2\beta(\ell + \frac{1}{3}\ell^3 + \frac{1}{5}\ell^5 + \frac{1}{7}\ell^7 + \frac{1}{9}\ell^9 + ...)$$

[15] Cons. 2. Si autem ultra K sumatur spatium $B34K$, posita 34 parallela rectae BK, & sit series infinita quantitatum in continua ratione BK ad $K4$, cujus primum terminus est parallelogrammum KQ; erit primus terminus $-\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii$-\frac{1}{4}$ quarti + &c. in infinitum = spatio Hyperbolico $B34K$: poterit hoc consectarium eodem fere modo demonstrari Geometrice ex secunda conclusione hujus tertiae, quo antecedens ex ejusdem conclusione priore; utrumque autem ex methodo indivisibilium Cavalleriana nullo negotio demonstratur; sed quoniam magni sunt momenti, placuit methodum rigorosam adhibere.

che convergono più rapidamente dello sviluppo di MERCATOR.

Cons. 3. *Se $K4 = KH$ e si ha una serie infinita di quantità in proporzione continua di ragione pari al rapporto tra BK e $K4 = KH$, con primo termine $BH = B4$, la regione $SBKH$ supera la regione $B34K$ = all'intero secondo termine $+\frac{1}{2}$ del quarto $+\frac{1}{3}$ del sesto $+\frac{1}{4}$ dell'ottavo + ecc. all'infinito. Infatti, dal primo consettario la regione $SBKH$=al primo termine $+\frac{1}{2}$ del secondo+ $\frac{1}{3}$ del terzo $+\frac{1}{4}$ del quarto $+\frac{1}{5}$ del quinto +ecc. all'infinito: e dal secondo consettario la regione $B34K$ = al primo termine $-\frac{1}{2}$ del secondo $+\frac{1}{3}$ del terzo $-\frac{1}{4}$ del quarto + ecc. ma è evidente che la differenza tra queste regioni è = all'intero secondo termine $+\frac{1}{2}$ del quarto $+\frac{1}{3}$ del sesto $+\frac{1}{4}$ dell'ottavo + ecc. da cui segue l'asserto.*[16]

Cons. 4. *Sotto le stesse ipotesi del precedente Consettario è evidente che la regione iperbolica $SH43$ = al doppio del primo termine $+\frac{2}{3}$ del terzo $+\frac{2}{5}$ del quinto $+\frac{2}{7}$ del settimo $+\frac{2}{9}$ del nono ecc. all'infinito.*[17] (p.12 di [15]).

Il legame tra quadratura dell'iperbole e calcolo dei logaritmi viene messo in piena luce nella Proposizione 5 che come primo risultato fornisce l'area di una porzione iperbolica che *non* contiene il vertice dell'iperbole. Data un'iperbole CEL (equilatera, a giudicare dalla figura 6.3 conforme all'originale di GREGORY) di vertice E ed asintoti AB ed AY si considerino due porzioni qualsiasi come $HITR$ e $KLYV$ limitate dall'iperbole, dall'asintoto AY e da rette parallele ad AB.

GREGORY mostra che

$$\frac{A(HITR)}{A(KLYV)} = \frac{\frac{RS\times AO}{AS} + \frac{RS^3\times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5\times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7\times AO}{7AS^7} + \&c.}{\frac{VX\times AO}{AX} + \frac{VX^3\times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5\times AO}{5ASX^5} + \frac{VX^7\times AO}{7AX^7} + \&c.}\,.$$

dove S ed X sono i punti medi di RT e VY ed O è la proiezione del vertice E sulla retta AY, cosicché $AO = EO$. Per raggiungere lo scopo egli considera un punto M su AY tale che $AS : AR = AO : AM$ e dunque, dalla proprietà dello scomporre,

$$AS : SR = AO : OM\,. \tag{6.12}$$

Inoltre GREGORY considera un punto Q tale che $AS : AT = AO : AQ$, da cui ottiene $AS : TS(= SR) = AO : QO$ e dunque può concludere che $OM = OQ$. Alla stessa maniera, si prendono altri due punti N e P tali che $AX : AV = AO : AN$ per concludere che deve essere $OP = ON$. Siccome le aree di segmenti iperbolici si comportano come i logaritmi, le proporzioni introdotte sopra consentono di concludere che $A(CGQM) = A(HITR)$ e $A(DFPN) =$

[16] Quod si $K4 = KH$, & fuerit series infinita quantitatum in continua ratione BK ad $K4 = KH$, cujus primus terminus est $BH = B4$; erit excessus spatii $SBKH$ supra spatium $B34K$ = toti secundo termino $+\frac{1}{2}$ quarti $+\frac{1}{3}$ sexti $+\frac{1}{4}$ octavi + &c. in infinitum: Nam ex primo consectario, spatium $SBKH$=primo termino $+\frac{1}{2}$ secundi+ $\frac{1}{3}$ tertii $+\frac{1}{4}$ quarti $+\frac{1}{5}$ quinti +&c. in infinitum: & ex secundo consectario spatium $B34K$ = primo termino $-\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii$-\frac{1}{4}$ quarti + &c. at manifestum est horum differentiam = toti secundo $+\frac{1}{2}$ quarti $+\frac{1}{3}$ sexti $+\frac{1}{4}$ octavi + &c. ideo patet propositum.

[17] Eisdem positis quae in antecedente consectario, manifestum est spatium Hyperbolicum $SH43$ = duplo primi termini $+\frac{2}{3}$ tertii $+\frac{2}{5}$ quinti $+\frac{2}{7}$ septimi $+\frac{2}{9}$ noni &c. in infinitum.

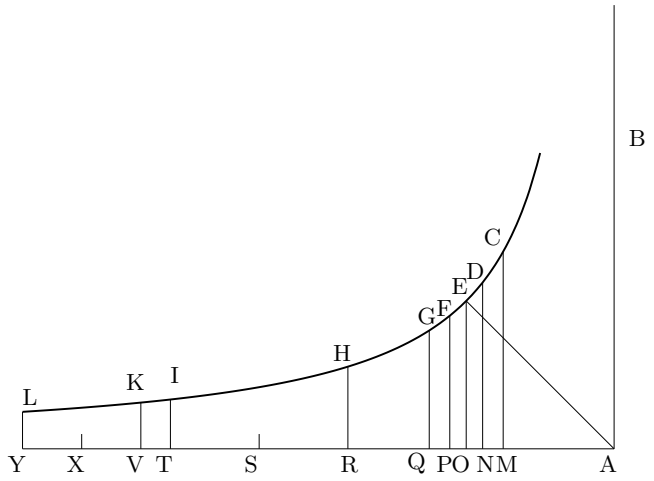

Figura 6.3: Schema per la dimostrazione della Prop. 5 delle *Exercitationes Geometricae* di Gregory.

$A(KLYV)$. Poiché i settori $CGQM$ e $DFPN$ hanno la proiezione O del vertice come punto medio, si può applicare ad esse il risultato del *Consectarium* 4 della Prop. 4 ed ottenere

$$A(CGQM) : A(DFPN) = \frac{MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6} + \&c.}{NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6} + \&c.} \tag{6.13}$$

da cui segue la tesi.

Prop. V . *Data l'iperbole CEL di vertice E ed asintoti AB ed AY, si considerino due regioni iperboliche a piacere $HITR$, $KLYV$ delimitate dall'iperbole da un asintoto e da rette parallele all'altro asintoto. Si dividano i segmenti RT, VY in due parti uguali con i punti S ed X. Dico che la regione $HITR$ sta alla regione $KLYV$ come $\frac{RS \times AO}{AS} + \frac{RS^3 \times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5 \times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7 \times AO}{7AS^7}$+ecc. all'infinito sta a $\frac{VX \times AO}{AX} + \frac{VX^3 \times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5 \times AO}{5ASX^5} + \frac{VX^7 \times AO}{7AX^7}$+ ecc. all'infinito. Si consideri la retta EO parallela all'asintoto e si abbia che AS sta ad AR come $AO = EO$ sta ad AM; e che come AS sta ad AT così AO sta ad AQ; similmente, si abbia che AX sta ad AV come AO sta ad AN, e che AO sta ad AP come AX sta ad AY; è evidente che $MO = OQ$ ed $NO = OP$. Tracciati i segmenti MC, ND, PF, QG, è evidente (dalle proprietà dell'iperbole) che la regione $CGQM$ è equivalente alla regione $HITR$ e che la regione $DFPN$ è equivalente alla regione $KLYV$; ma è evidente (dal precedente consettario 4) che la regione $CGQM$ sta alla regione $DFPN$ come $MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6}$ + ecc. sta ad $NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6}$ + ecc. proporzione che coincide con quella che volevamo dimostrare.*[18] (p.12 di [15])

[18]Sit Hyperbola CEL, cujus vertex E, & asymptotae AB, AY; in qua sumantur dua spatia

Siamo così giunti al *Consectarium 1* della Prop. 5 dove le formule di quadratura per l'iperbole vengono applicate al calcolo dei logaritmi. Precisamente, GREGORY considera quattro numeri A, B, D ed E, indica con $C := (A+B)/2$ ed $F := (D+E)/2$ le rispettive medie aritmetiche ed introduce le differenze $N := C - A$ ed $O := F - D$. Le differenze $\log(A) - \log(B)$ e $\log(D) - \log(E)$ sono interpretabili come aree di porzioni di iperboli, ed è facile verificare, grazie al fatto che S è punto medio di TR e alla proporzione (6.12), che $SR = N$ e che $AS = C$ per cui $OM = AO\frac{N}{C}$. Analogamente $ON = AO\frac{O}{F}$ per cui si ha la proporzione

$$\log(A) - \log(B) : \log(D) - \log(E) = \frac{\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \frac{N^7}{7C^7} + \&c.}{\frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \frac{O^7}{7F^7} + \&c.}.$$

GREGORY illustra poi come applicare il risultato per ottenere il logaritmo di un numero qualunque, noto che ne sia un altro.

Cons. 1 *È evidente da tutto ciò (per la proporzionalità tra le regioni iperboliche ed i logaritmi) che la differenza tra i logaritmi dei numeri A, B, sta alla differenza tra i logaritmi dei numeri D, E, (detto C il medio aritmetico di A e B e detto F il medio aritmetico di D ed E, N la differenza tra C ed A ed O la differenza tra F e D) come* $\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \frac{N^7}{7C^7} +$ *ecc. sta ad* $\frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \frac{O^7}{7F^7} +$*ecc. e dunque se si pone* $A = D = 1$ *si ottiene un metodo per trovare un logaritmo qualsiasi dato un altro, senza riferimento alcuno all'iperbole, ma grazie ad un calcolo il più delle volte troppo laborioso.*[19] (p.13 di [15])

6.4 Isaac NEWTON

Ai risultati di MERCATOR e GREGORY sulle serie logaritmiche giunse anche Isaac NEWTON (1642-1727) che si occupò di logaritmi a livello teorico e computazionale. Sotto il primo aspetto egli generalizzò la serie di MERCATOR

Hyperbolica ad libitum $HITR$, $KLYV$, contenta a curva Hyperbolica, una asymptota & rectis alteri asymptotae parallelis: dividantur rectae RT, VY, bifariam in S & X punctis. Dico spatium $HITR$ esse ad spatium $KLYV$ ut $\frac{RS \times AO}{AS} + \frac{RS^3 \times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5 \times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7 \times AO}{7AS^7} +$&c. in infinitum ad $\frac{VX \times AO}{AX} + \frac{VX^3 \times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5 \times AO}{5ASX^5} + \frac{VX^7 \times AO}{7AX^7} +$&c. in infinitum. Asymptotae AB fiat recta parallela EO, sitque ut AS ad AR ita $AO = EO$ ad AM; & ut AS ad AT ita AO ad AQ; similiter, fit ut AX ad AV ita AO ad AN, & AO ad AP ut AX ad AY; manifestum est $MO = OQ$ & $NO = OP$. Ductis rectis MC, ND, PF, QG, evidens est (ex Hyperbolae proprietatibus) spatium $CGQM$ esse aequale spatio $HITR$ & spatium $DFPN$ spatio $KLYV$; at patet (ex consectario 4 antecedentis) spatium $CGQM$ esse ad spatium $DFPN$, ut $MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6} +$ &c. ad $NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6} +$ &c. quae analogia eadem est cum proposita, quod demonstrandum erat.

[19] *Hinc manifestum est (ob analogiam inter spatia Hyperbolica & Logarithmos) differentiam inter Logarithmos numerorum A, B, esse ad differentiam inter Logarithmos numerorum D, E, (posito C medio arithmetico inter A, B, & F medio arithmetico inter D, E, item N differentia inter C & A, & O differentia inter F et D) ut* $\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \frac{N^7}{7C^7} +$ *&c. ad* $\frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \frac{O^7}{7F^7} +$*&c. & ideo si ponatur* $A = D = 1$ *hinc patet methodum inveniendi Logarithmum quemcunque ex uno dato, absque ulla Hyperbolae consideratione, sed calculo plerumque nimis laborioso.*

rappresentando l'equazione dell'iperbole nella forma

$$y(x) = \frac{a^2}{b+x}\,,$$

con a e b costanti arbitrarie. Ciò gli permise di ottenere lo sviluppo

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^3}x^2 - \frac{a^2}{b^4}x^3 + ...$$

e, applicando la teoria delle *flussioni*,

$$\log(b+x) = \int \frac{1}{b+x}\,dx = [\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{b^3} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{b^4} + ...] \tag{6.14}$$

dove egli commise un errore, che si rivelò ininfluente per la correttezza dei risultati, in quanto non inserì la costante di integrazione. La relazione ottenuta mostra la presenza di una infinità di sistemi logaritmici, determinati ognuno dal valore di b. Inoltre, moltiplicando ambo i membri di (6.14) per a^2 si mostra che ognuno dei sistemi ottenuti fissando b ne genera un'infinità con la proprietà che i logaritmi di uno stesso numero A sono equimultipli. Chiaramente, i logaritmi naturali corrispondono alla scelta $a = b = 1$ e lo sviluppo di Newton coincide in questo caso con quello di Mercator.

Sempre sul piano più teorico, Newton invertì la serie logaritmica risolvendo per serie il problema di determinare un numero, noto il suo logaritmo. Il metodo è accennato senza dimostrazione in una lettera datata 13 giugno 1676 e trasmessa ad Heinrich Oldenburg (1615?-1677)—segretario della Royal Society che svolse in Gran Bretagna il ruolo di Mersenne sul continente—perché la facesse pervenire a Gottlieb Leibniz. In questa lettera, Newton illustra dapprima la serie binomiale, sottolineandone i vantaggi nel calcolo delle radici quadrate o cubiche e poi passa ad occuparsi della soluzione di equazioni algebriche per approssimazioni successive. Infine, egli illustra la soluzione di alcuni problemi inversi, il settimo dei quali è così enunciato:

Sia inoltre CE un'iperbole (Fig. 6.4), i cui asintoti AD ed AF formino un angolo retto e si traccino comunque delle perpendicolari BC, DE ad AD che tagliano l'iperbole in C ed E e si chiami AB a, BC b e z l'area di BCED; allora sarà

$$BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$$

ecc. dove i coefficienti dei denominatori si ottengono moltiplicando i termini di questa progressione aritmetica 1,2,3,4,5, ecc. tra di loro in successione; da ciò è possibile trovare il numero che compete ad un logaritmo assegnato.[20] (p.109

[20] Praeterea si sit CE hyperbola (Fig. 6.4), cujus Asymptoti AD, AF, rectum angulum FAD constituant, et ad AD erigantur utcunque perpendicularia BC, DE, occurrentia hyperbolae in C et E, et AB dicatur a; BC, b, et area BCED, z, erit

$$BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$$

etc. ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis, 1,2,3,4,5 etc. in se continuo; et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri.

di [16])

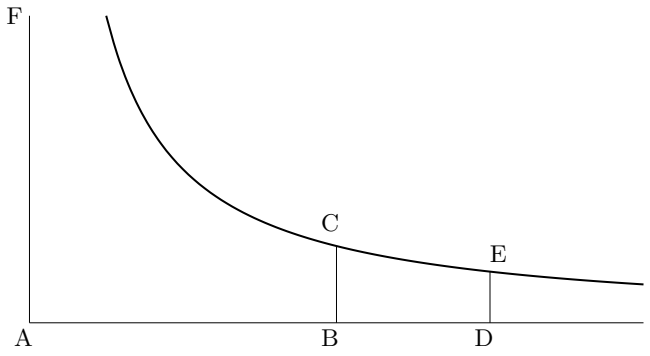

Figura 6.4: Figura utilizzata da NEWTON per illustrare l'inversione della serie logaritmica.

In una lettera di poco successiva, datata 26 ottobre 1676 (pp.122-146 di [16]), NEWTON espone con maggiori dettagli il metodo per ottenere un numero, noto il suo logaritmo, accennando ad un compendio contenente il metodo e sue applicazioni. Questo compendio, *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum infinitas*, uscirà postumo, ma per quanto ci riguarda il contenuto della lettera di NEWTON è sufficiente a chiarire il procedimento che viene illustrato dalla ricerca del numero $x < 1$, dato $z := -\ln(1-x)$, detto *area hyperbolae* per il suo legame con l'iperbole equilatera. Grazie alla serie di MERCATOR, si ha

$$z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ...$$

che, moltiplicata per se stessa fornisce

$$z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + ...$$

e, dopo moltiplicazioni successive

$$z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5 + ... \quad z^4 = x^4 + 2x^5 + ... \quad z^5 = x^5 + ...$$

L'idea di NEWTON è di combinare linearmente in successione la prima equazione con multipli delle successive in modo da eliminare ad ogni passaggio una o più delle potenze di x di grado superiore ad 1. Ad esempio, formando $z - \frac{1}{2}z^2$ si ottiene

$$z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + ...$$

nella quale è scomparso il termine in x^2. Se ora si aggiunge $\frac{1}{6}z^3$ all'espressione così ottenuta si ricava

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + ...$$

da cui è scomparso anche il termine in x^3. Se ora si sottrae $\frac{1}{24}z^4$ si ottiene

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5 + ...$$

da cui, poiché con il grado di approssimazione richiesto si ha $x^5 = z^5$, segue

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + ... = x.$$

Non si tarda a riconoscere nel membro di sinistra di questa equazione il polinomio di TAYLOR di quinto grado per $1 - \mathrm{e}^{-z}$ in un intorno di $z = 0$ (p. 143 di [16] e [17]).

Nella medesima lettera del 26 ottobre 1676, NEWTON perfeziona un metodo per ottenere tavole logaritmiche utilizzando la serie di GREGORY che egli aveva in verità introdotto negli anni 1665-1666 in cui era ritornato alla casa natale del Lincolnshire dopo la chiusura di Cambridge per l'epidemia di peste *Al tempo in cui l'assalto della peste mi costrinse a fuggire da qui e a pensare ad altro*[21] (p. 125 di [16]). Grazie a questo sviluppo egli calcolò i logaritmi naturali dei quattro numeri 0.8, 0.9, 1.1 ed 1.2 da cui, osservando che

$$\frac{1.2 \times 1.2}{0.8 \times 0.9} = 2 \quad \frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$$

egli otteneva i logaritmi di 2 e 10 e, sfruttando l'algebra dei logaritmi, quelli di 9 e dei numeri primi 3, 5 ed $11 = 10 \times 1.1$. Iterando la procedura egli determinava per serie i logaritmi di 0.98, 0.99, 1.01 ed 1.02, nonché di 0.998, 0.999, 1.001 ed 1.002 da cui, ancora per addizione, sottrazione ed elementari operazioni algebriche—come, ad esempio $7 = 10\sqrt{\frac{0.98}{2}}$— otteneva logaritmi dei successivi numeri primi (p. 126 di [16]). NEWTON non diede corso alla costruzione di una tavola logaritmica secondo le linee indicate sopra perché sospettava che, dopo la pubblicazione della *Logarithmotechnia*, qualcuno potesse completare le tavole molto più rapidamente di lui:

Ma quando uscì quell'ingegnosa Logarithmotechnia di N. Mercator (che suppongo abbia trovato lui per primo) iniziai ad occuparmene di meno, sospettando che egli conoscesse l'estrazione di radici come la divisione di frazioni o almeno che altri, effettuata la divisione, avrebbero trovato i logaritmi restanti prima che fossi pronto per scrivere.[22] (p.126 di [16])

Il progetto di una tavola logaritmica accurata ma al tempo stesso rapida da ottenere è accennato sempre nella lettera per LIEBNIZ del 24 ottobre 1676, dove la costruzione è ripresa e viene corredata di scomposizioni opportune per ottenere i logaritmi dei numeri primi inferiori a 100, noti quelli di 10, 0.98, 0.99, 1.01 ed 1.02. Particolare importante è che egli accenna al fatto che, ottenuti

[21] Eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere, et alia cogitare

[22] Sed ubi prodiit ingeniosa illa N. Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) coepi ea minus curare, suspicatus vel eum nosse extractionem radicum aeque ac divisionem fractionum, vel alios saltem, divisione patefacta, inventuros reliqua, priusquam ego aetatis essem maturae ad scribendum.

i logaritmi di 980, 990, 1000, 1010 e 1020, quelli degli altri interi compresi in questo intervallo si ottengono per interpolazione. NEWTON non pubblicò alcuna tavola logaritmica ed i suoi suggerimenti non vennero utilizzati per molto tempo.

6.5 La *restaurazione* di HALLEY

In questa sezione diamo conto di un lavoro [18] di Edmund HALLEY (1656-1742) apparso sulle Philosophical Transactions nel 1695 dove viene proposto un metodo di costruzione dei logaritmi che trae profitto dai grandi progressi compiuti nella teoria delle serie in Inghilterra nei trent'anni precedenti ma che evita accuratamente di interporre la costruzione geometrica dell'iperbole estranea alla definizione di logaritmo, come è chiaro fin dal titolo del lavoro, laddove HALLEY ha cura di avvertire che la costruzione dei logaritmi poggia sulla natura dei numeri *without any regard to the hyperbola*. L'obiettivo perseguito da HALLEY è poi da lui bene espresso nella chiusura di [18]

Spero di aver così chiarito la Dottrina dei Logaritmi e di averne dimostrato la costruzione e l'uso indipendentemente dall'iperbole, le cui proprietà sono state utilizzate finora per questo scopo, benché si tratti di argomento puramente aritmetico, non dimostrabile propriamente dai principi della geometria. Né sono stato costretto a ricorrere al metodo degli indivisibili o all'aritmetica degli infiniti, il tutto essendo niente altro che un semplice Corollario del teorema generale di Newton per formare radici e potenze.[23] (p. 67 di [18])

Nell'introduzione, HALLEY critica come inadeguata la classica definizione di logaritmi data in origine da NEPERO e BRIGGS: compagni equidifferenti di numeri proporzionali, proponendo un cambio di prospettiva:

I logaritmi si possono molto più appropriatamente chiamare numeri esponenti di rapporti, dove consideriamo il rapporto come una quantità sui generis, a partire dal rapporto di uguaglianza o 1 ad 1=0; essendo positivo quando il rapporto cresce come quello tra l'unità ed un numero più grande, ma negativo quando decresce; noi supponiamo di misurare questi rapporti con il numero di raziuncole contenute in ciascuno.[24] (pp. 58-59 di [18]).

Ritorna in questa definizione il concetto di logaritmo come misura di un rapporto, positivo per rapporti, diremmo noi, maggiori di 1 e negativo per rapporti minori di 1. Siamo ancora nell'alveo di un approccio euclideo ai logaritmi che si riferiscono più ai rapporti dei numeri all'unità che ai numeri medesimi. Le

[23] Thus I hope I have cleared up the Doctrine of Logarithms, and shewn their Construction and Use independent from the Hyperbola, whose Affections have hitherto been made use of for this purpose, though this be a matter purely Arithmetical, nor properly demonstrable from the Principles of Geometry. Nor have I been obliged to have recourse to the Method of Indivisibles, or the Arithmetick of Infinites, the whole being no other than an easie Corollary to Mr. Newton's General Theorem for forming Roots and Powers.

[24] They [=the logarithms] may much more properly be said to be Numeri rationum exponentes: wherein we consider ratio as a quantitas sui generis, beginning from the ratio of equality, or 1 to 1=0; being affirmative when the ratio is increasing, as of unity to a greater number, but negative when decreasing; and these rationes we suppose to be measured by the number of ratiunculae contained in each.

raziuncole cui fa cenno HALLEY sono i medi proporzionali di una progressione geometrica di ragione prossima all'unità ed il numero di queste raziuncole tra un intero assegnato n e l'unità è la chiave per determinare il logaritmo di n.

Ora, queste "raziuncole" sono da intendersi come una Scala di infiniti termini in proporzione continuata compresi tra i due termini del "rapporto"; questo numero infinito di medi proporzionali sta al numero infinito di analoghe ed uguali "raziuncole" tra due altri termini, come il logaritmo di uno dei "rapporti" sta al logaritmo dell'altro. Così se si suppone una Scala infinita di medi proporzionali compresi tra 1 e 10 in numero di 100000 ecc. all'infinito, allora tra 1 e 2 ci saranno 30102 ecc. di questi medi proporzionali.[25] (p. 59 di [18]).

Fin qui non si scorgono elementi molto diversi dall'impostazione di BRIGGS: osserviamo che i numeri infiniti di cui parla HALLEY sono in realtà numeri molto grandi, il cui valore preciso determina l'accuratezza del logaritmo ed il sistema logaritmico scelto. HALLEY tuttavia cambia rotta e, forte della serie binomiale e della teoria delle flussioni introdotte da NEWTON afferma che la *ratiuncula* non è altro che la *flussione* del rapporto (*ratio*) del numero assegnato rispetto all'unità. A questo punto HALLEY fa entrare in scena le radici di indice arbitrariamente grande ed afferma che la piccola differenza (*differentiola*) tra la radice m-esima di un numero qualsiasi e l'unità si comporta come il logaritmo del numero stesso. In questo modo di procedere si sente un'eco del metodo di estrazioni successive di radici quadrate seguito da BRIGGS che, quando $m \gg 1$, aveva osservato la proporzionalità tra $\sqrt[2^m]{x} - 1$ e $\log x$. La scelta di m (detto *indice* del numero la cui radice è richiesta, distingue tra loro i vari sistemi logaritmici. Come vedremo tra poco, ciò equivale ad affermare che

$$\lim_{m\to\infty} m[(1+x)^{1/m} - 1] = \log(1+x).$$

Il procedimento seguito per ottenere questo risultato è espresso da HALLEY in questi termini:

Testo 6.7 (HALLEY) (pp.59-60 di [18]). Originale 6.14

Se si estrae la radice di una qualsiasi potenza infinita di un numero qualsiasi, la "piccola differenza" tra questa radice e l'unità sarà come il logaritmo di quel numero. I logaritmi ottenuti in questo modo assumeranno tante forme a seconda degli indici presi della potenza di cui si cerca la radice: così se l'indice è preso 100000*ecc. all'infinito, le radici saranno i logaritmi introdotti da Lord Napeir; ma se quell'indice fosse* 2302585*ecc. si otterrebbero subito i logaritmi del Sig. Briggs. E se vi aggrada di fermarvi ad un qualunque numero di cifre senza continuare oltre, basterà prendere un indice di una o due cifre superiori a quelle richieste per il logaritmo (....) Ora, benché la nozione di potenza infinita possa apparire molto strana e forse anche inutilizzabile da coloro che sanno quanto sia*

[25] Now these "ratiunculae" are so to be understood as in a continued Scale of Proportionals infinite in Number between the two terms of the "ratio", which infinite Number of mean Proportionals is to that infinite number of the like and equal "ratiunculae" between any other two terms, as the Logarithm of the one "ratio" is to the Logarithm of the other. Thus if there be supposed between 1 and 10 an infinite Scale of mean Proportionals, whose number is 100000& c. in infinitum; between 1 and 2 there shall be 30102& c. of such Proportionals

difficile estrarre radici di alte potenze; tuttavia, con l'aiuto dell'ammirabile invenzione del Sig. Newton, con cui egli determina le "Unciae" o numeri preposti ai termini che formano la serie (da cui soprattutto dipende la Dottrina delle Serie) il fatto che l'indice sia infinito contribuisce a rendere assai più semplice l'espressione; infatti, se la potenza infinita da sciogliere è posta come $\overline{p+pq}$, $\overline{p+pq}|^{\frac{1}{m}}$ *o* $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}}$ *(grazie al metodo di Newton), invece di*

$$1+\frac{1}{m}q+\frac{1-m}{2mm}qq+\frac{1-3m+2mm}{6m^3}q^3+\frac{1-6m+11mm-6m^3}{24m^4}q^4 Ecc.$$

(che è la radice quando m è finito) si ha

$$1+\frac{1}{m}q-\frac{1}{2m}qq+\frac{1}{3m}q^3-\frac{1}{4m}q^4+\frac{1}{5m}q^5 \quad ecc.$$

in quanto, siccome m è infinito tutto ciò che viene diviso in seguito si annulla. Dunque si ha che $\frac{1}{m}$ *per*

$$q-\frac{1}{2}qq+\frac{1}{3}q^3-\frac{1}{4}q^4+\frac{1}{5}q^5 \quad ecc.$$

è l'aumento del primo dei nostri medi proporzionali tra uno ed $1+q$ *ed è dunque il logaritmo del rapporto tra 1 ed* $1+q$ *e, mentre l'indice infinito m può essere preso a piacere, le diverse Scale di logaritmi corrispondenti a tali indici saranno come* $\frac{1}{m}$ *o, reciprocamente, come gli indici.*

Dunque HALLEY considera lo sviluppo di $\sqrt[m]{1+q}$ o, nella sua notazione, $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}}$, formalmente raccoglie un fattore $1/m$ e fa tendere m all'infinito nella somma che moltiplica $1/m$ ottenendo la *differentiola* che fornisce l'espressione di $\log(1+q)$. Notiamo che il numero 2302585 da utilizzare per ottenere i logaritmi briggsiani è il valore numerico di $\ln 10$. Con un procedimento del tutto analogo, egli fornisce la serie per $\log(1-q)$. Per trovare il logaritmo di un rapporto qualsiasi b/a, con $b>a$, detta $x:=b-a>0$ la differenza tra i termini della frazione ed introdotta la *media aritmetica* $\frac{z}{2}=\frac{a+b}{2}$, per le proprietà elementari dei logaritmi si può scrivere

$$\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log\left(\frac{2b}{z}\right)+\log\left(\frac{z}{2a}\right)$$

e siccome $2a=z-x$ e $2b=z+x$ si ottiene

$$\log\left(\frac{2b}{z}\right)=\log\left(1+\frac{x}{z}\right)=\left(\frac{x}{z}-\frac{xx}{2zz}+\frac{x^3}{3z^3}-\frac{x^4}{4z^4}+\frac{x^5}{5z^5}-\frac{x^6}{6z^6}+...\right)$$

e

$$\log\left(\frac{z}{2a}\right)=\left(\frac{x}{z}+\frac{xx}{2zz}+\frac{x^3}{3z^3}+\frac{x^4}{4z^4}+\frac{x^5}{5z^5}+\frac{x^6}{6z^6}+...\right)$$

e pertanto, sommando, si ottiene lo sviluppo convergente

$$\log\left(\frac{b}{a}\right)=\log\left(\frac{1+\frac{x}{z}}{1-\frac{x}{z}}\right)=\left(\frac{2x}{z}+\frac{2x^3}{3z^3}+\frac{2x^5}{5z^5}+\frac{2x^7}{7z^7}+...\right),$$

che è la serie di Gregory, senza riferimento all'iperbole.

Per ottenere una convergenza ancora più rapida Halley fa intervenire anche la media geometrica $M := \sqrt{ab}$ di a e b ed osserva che

$$\log\left(\frac{z}{2a}\right) - \log\left(\frac{2b}{z}\right) = \log\frac{ab}{\frac{z^2}{4}} = 2\log\frac{\frac{z}{2}}{M}$$

da cui segue che

$$\log\frac{\frac{z}{2}}{M} = \left(\frac{xx}{2zz} + \frac{x^4}{4z^4} + \frac{x^6}{6z^6} + \frac{x^8}{8z^8} + ...\right).$$

Halley mostra come utilizzare con frutto questo risultato per determinare il logaritmo dei numeri primi, punto di partenza cruciale per la costruzione di una tavola logaritmica. Egli nota che la differenza dei termini del rapporto $ab/(z^2/4)$ è, per calcolo diretto, $\frac{z^2}{4} - ab = [(a-b)/2]^2 = \frac{1}{4}x^2$. Ora, se occorre trovare il logaritmo di un numero primo n, si considerano $b = n+1$ ed $a = n-1$ così che $\frac{1}{4}x^2 = 1$; posto $y^2 = \frac{z^2}{4} + ab$, dalla definizione di x si ricava $ab = \frac{1}{2}(y^2-1) = \frac{1}{2}y^2\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$ e $\frac{z^2}{4} = \frac{1}{2}(y^2+1) = \frac{1}{2}y^2\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$ da cui si ottiene

$$\frac{1}{2}\log\frac{\frac{z^2}{4}}{ab} = \left(\frac{1}{yy} + \frac{1}{3y^6} + \frac{1}{5y^{10}} + \frac{1}{7y^{14}} + \frac{1}{9y^{18}} + ...\right)$$

che converge più rapidamente della serie di Gregory. Come illustrazione numerica della validità del metodo, Halley calcola il logaritmo di 23, media aritmetica di 22 e 24, servendosi delle tre serie. Per l'ultima egli considera la media geometrica $\sqrt{528}$ di 22 e 24 e grazie alla regola precedente, poiché ora $y^2 = 23^2 + 22 \cdot 24 = 1057$ si ha

$$\frac{1}{2}\log\frac{\frac{z^2}{4}}{ab} = \left(\frac{1}{1057} + \frac{1}{3542796579} + \frac{1}{659676558485285}\right)$$

Poiché infine $528 = 11 \cdot 3 \cdot 2^4$, la conoscenza dei logaritmi di 2, 3 ed 11 consente di arrivare al valore di $\log 23$.

Nell'ultima parte di [18], Halley considera il problema di trovare un numero, assegnato il suo logaritmo. Anche in questo caso, lo strumento utilizzato è il teorema del binomio di Newton.

Siccome si è dimostrato che il logaritmo del rapporto tra 1 ed $1+q$ *è* $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}} - 1$ *e quello del rapporto tra 1 ed* $1-q$ *è* $1 - \overline{1-q}|^{\frac{1}{m}}$*: dunque assegnato il logaritmo che chiameremo d'ora in poi* L*,* $1+L$ *sarà uguale ad* $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}}$ *in un caso ed* $1-L$ *sarà uguale ad* $\overline{1-q}|^{\frac{1}{m}}$ *nell'altro. Di conseguenza* $\overline{1+L}|^m$ *uguaglierà* $1+q$*, ed* $\overline{1-L}|^m$ *uguaglierà* $1-q$*; pertanto, in accordo alla menzionata regola del Sig.* Newton*,* $1 + mL + \frac{1}{2}m^2L^2 + \frac{1}{6}m^3L^3 + \frac{1}{24}m^4L^4 + \frac{1}{120}m^5L^5$ *ecc. sarà* $1+q$*, e*

$1 - mL + \frac{1}{2}m^2L^2 - \frac{1}{6}m^3L^3 + \frac{1}{24}m^4L^4 - \frac{1}{120}m^5L^5$ *sarà uguale ad* $1 - q$, *dove* m *è un indice infinito qualsivoglia.*[26] (pp.65-66 di [18])

Si tratta pertanto di una inversione formale della definizione di logaritmo, in termini di radici con indice molto elevato. HALLEY sottolinea il ruolo privilegiato del sistema di logaritmi naturali, in cui la moltiplicazione per m può essere omessa ottenendo

$$1 + q = 1 + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \frac{1}{24}L^4 + \frac{1}{120}L^5 .$$

Infine, HALLEY considera il caso in cui il logaritmo L non sia tabulato e lo intende esprimere grazie a logaritmi di numeri tabulati. Egli chiama a e b i numeri con i logaritmi più vicini di tutti ad L nella tavola. Nel caso in cui il numero tabulare con logaritmo più vicino ad L sia b tale che $\log b > L$, HALLEY introduce la quantità $\ell := \log b - L$ ed osserva che, se $L = \log x$, il valore incognito x si può ottenere in termini dei dati tabulati b ed ℓ in quanto

$$\ell = \log \frac{b}{x} = \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

dove $\Delta x := b - x$. Per quanto visto prima si conclude che

$$1 + \frac{\Delta x}{x} = \frac{b}{x} = 1 + \ell + \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^3}{6} + \ldots.$$

da cui si ottiene

$$x = b\left(1 - \ell + \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^3}{6} + \ldots.\right) .$$

Similmente, se si parte da un numero a il cui logaritmo è minore di L e si indica $\ell := L - \log a$ si conclude che

$$x = a\left(1 + \ell + \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^3}{6} + \ldots.\right) .$$

Poiché ℓ è una quantità piccola, questi sviluppi convergono più rapidamente che quelli espressi in termini di L ricavati in precedenza. Il lavoro di HALLEY, benché criticato per essere oscuro, ha alcuni elementi di pregio quali l'avere evidenziato come si distinguano tra loro i diversi sistemi logaritmici ed aver perfezionato la costruzione di canoni logaritmici accurati attraverso lo sviluppo in serie convergenti rapidamente.

---

[26] As the Logarithm of the "ratio" of 1 to $1 + q$ was proved to be $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}} - 1$, and that of the ratio of 1 to $1 - q$ to be $1 - \overline{1-q}|^{\frac{1}{m}}$: so the Logarithm, which we will from henceforth call L, being given, $1 + L$ will be equal to $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}}$ in the one case; and $1 - L$ will be equal to $\overline{1-q}|^{\frac{1}{m}}$ in the other: Consequently $\overline{1+L}|^m$ will be equal to $1 + q$, and $\overline{1-L}|^m$ to $1 - q$; that is, according to Mr. NEWTON said rule, $1 + mL + \frac{1}{2}m^2L^2 + \frac{1}{6}m^3L^3 + \frac{1}{24}m^4L^4 + \frac{1}{120}m^5L^5$ & c. will be $1 + q$, and $1 - mL + \frac{1}{2}m^2L^2 - \frac{1}{6}m^3L^3 + \frac{1}{24}m^4L^4 - \frac{1}{120}m^5L^5$ & c. will be equal to $1 - q$, m being any infinite Index whatsoever.

6.6 Testi originali

Testo 6.8 *[*MERCATOR*, Logarithmotechnia]* (pp. 4-6 di [7]).
Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculuas, qualium decupla continet 1,0000000. Dispesco igitur rationem 100[5 ad 1 in suas partes, nimurum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum posteriores duae constituunt duas decuplas (unde patet Characteristicam fore 2;) itaque restat, ut investigemus, quota pars fit reliqua ista ratio 100[5 ad 100 ipsius decuplae. Quod si igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in sese, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatae scilicet rationis) termini rursus in se ducti procreabunt duplicatam duplicatae, id est, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100: atque ita continuata multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in seipsum, evadat decuplus ejus, quem ductus continuus termini 100 in seipsum producit; denominator potestatis postremo genitae ostendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cum alter terminorum fit 100, cujus potestates omnes constant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam potestatem, quae prioris termini (nimirum 100^{rij}) aeque altam potestatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quam verbis docere praestat.

Cum igitur 462da *potestas termini 100[5 excedat aeque altam 100*^{rij} *plus quam decuplo; at 461*^{ma} *ejusdem termini 100[5 excedat aeque altam 100*^{rij} *minus quam decuplo: ajo, rationem 100[5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minus autem quam 462*$^{\text{bus.}}$

Coeterum

$$\textit{Cum potestas} \left\{\begin{array}{c}460\\461\\462\end{array}\right\} \textit{sit} \left\{\begin{array}{c}9916193\\9965774\\1001560\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\textit{\& differentiae}\\49581\\49829\end{array}\right\} \textit{propemodum aequales;}$$

Itaque partem proportionalem, qua potestas justa, nimirum 10000000 excedit proxime minorem 9965774, per Regulam auream facile ac tuto reperire datur, sumendo nimirum

justae	10000000
& proxime minoris	<u>9965774</u>
differentiam	34226

& dicendo: Ut differentia inter proxime minorem et majorem (nimirum 49829) Ad differentiam inter proxime minorem et justam (puta 34226) Ita 10000 ad 6868; quae sunt partes unius vicis, adeo ut ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla 461⌊6868 *vicibus. Porro, si decupla (sive ratio* 100⌊5 *ad 100 sumta* 461⌊6868 *vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejusmodi ratiunculas continebit ratio* 100⌊5 *ad 100 sumta? Prodeunt* 21659⌊7 *ratiunculae, quae sunt exacta mensura rationis* 100⌊5 *ad 100, quibus si addas rationes 100 ad 10 et 10 ad 1, hoc est bis decuplam, constantem ratiunculis 2,0000000; fit integra mensura rationis* 100⌊5 *ad 1 (sive logarithmus absoluti* 100⌊5*) hic scilicet* $2,0021659\lfloor 7$.

100[5000 (1) 5001 (1)	1893406 (128) 6043981 (128)	sed in proxime praece- dentem, hoc modo:
1005000 5025	3584985 (256) 5894853 (256)	9340130 (448) 8603801 (16)
1010025(2) 10100 (2) 20 5 —— 1020150 (4) 0510201 (4) 1020150 20403 102 51	12852116 (512) Haec potestas plus- quam decuplo excedit potestatem aeque altam 100^{rij}; ergo resumo 256^{tam}, eamq, duco, non in sese, ut modo, sed in proxime praecedentem, nimirum 128^{vam}, hoc- modo 3584985 (256)	10115994 (464) Ubi rursus nimium colligitur; ergo eandem adhuc 448^{vam} duco, non in 16^{tam}, ut modo, sed in proxime praecedentem, nimirum 8^{vam}, hoc mo- do: 9340130 (448) 6070401 (8) 9720329 (456)
1040706 (8) 6070401 (8) ——- 1083068 (16) 8603801 (16) —— 1173035 (32) 5303711 (32) 1376011 (64) 1106731 (64) —— 1893406 (128)	6043981 (128) 6787831 (384) 1106731 (64) 9340130 (448) 5303711 (32) 10956299 (480) Haec potestas denuo excedit aeque altam 100^{rij} plusquam decuplo; ergo eandem 448^{vam} duco, non in 32^{dam}, ut modo,	0510201 (2) 10015603 (462) Quae potestas rursus excedit limitem; quare eandem 460^{mam} duco, non in 2^{dam}, sed in 1^{mam}, hoc modo 9916193 (460) 5001 (1) 9965774 (461)

Testo 6.9 *[*Mercator*, Logarithmotechnia]* (pp.16-17 di [7])

Sin partis imperatae denominator sit numerus par; sume semissem differentiae terminorum rationis per praecedentem inventae, quem ejusdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum aequidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam asservabis. Deinde partis imperatae denominatorem bipartire, & invento semissi congruentes in tabella propositioni III. subjuncta species excerpe, saltim usque ad c speciem, positoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{3}$; duc cujusque speciei valorem in suum coefficientem, collectisque omnibus in unam summam, habebis, quot vicibus sumenda sit differentiarum differentia supra asservata, ut acquiras particulam, qua pars imperata, quae per praecedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. Ex. gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per praecedentem inventus sit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum est 6, cujus semis 3 detractus minori termino, reliquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuae terminorum aequidifferentium $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata a differentia duarum majorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentiam $\frac{1753825}{1753879}$ asservandam. Partis imperatae denominator est 8, cujus semissi 4 congruunt in tabella propositioni III subjuncta species istae: $a + 3b + 3c$; sed $a = \frac{1}{2}$, & $3b = 6$, & $3c = 4$, quae juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differentie $\frac{1753825}{1753879}$ supra servatae sumendum est decuplum cum semisse, ut acquiramus particulam, qua octans per praecedentem inventus deficit ab exactiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus est $\frac{1753582}{1754122}$ vel $\frac{876791}{877061}$, & semis per VI est $\frac{3507677}{3507731}$; adeo ut rationis $\frac{8}{11}$ octans exactior praeter rationem per praecedentem inventam $\frac{149}{155}$ contineat etiamnum ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

Testo 6.10 *[*Mercator*, Logarithmotechnia]*(pp.30-31 di [7])

Quovis numero in partes aequales discerpto; invenire summam quarumvis potestatum ab innumeris istis numeris genitarum.

Numeri dati potestas proxime superior potestatibus quaesitis, si dividatur per exponentem suum, extabit summa potestatum quaesita.

V. gr. Numerus datus sit 21, hic si discerpatur in partes innumeras, continebit non modo hos numeros 20, 19, 18, 17, &c. sed & innumeros interjectos, quorum quisque intellegitur ductus in unam partem infinitissimam numeri 21, Horum igitur omnium productorum summam si queras; quoniam ipsa producta sunt potestates primae (sive lineae;) erit potestas proxime superior quadratica; & ejus exponens 2, Ergo dati numeri 21 quadratum 441, si dividatur per exponentem 2. extabit summa omnium primarum potestatum, genitarum ab innumeris istis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220⌊5. Rursus quaevis potestas prima intelligatur ducta in seipsam, & oporteat nos invenire summma omnium istorum quadratorum. Potestas proxime superior est cubica, & ejus exponens 3, Ergo dati numeri 21 cubus 9261, si dividatur per exponentem 3, extabit summa omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in suum latus, & oporteat nos invenire summam omnium

istorum cuborum. Potestas proxime superior est quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, si dividatur per exponentem 4, extabit summa omnium cuborum 48620⌊25.

Demonstratio. Summa omnium ab unitate imparium aequalis est quadrato numeri terminorum sic numerus terminorum omnium imparium ab unitate usque ad 21 est 11, cujus quadratum 121 aequale est summae omnium horum imparium; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit summam omnium eorundem imparium una cum paribus inclusis ipso numero terminorum 11; deficit autem a summa omnium parium aeque ac imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non potest excedere vel deficere a summa omnium tam parium quam imparium, plusquam ipso numero terminorum imparium, hoc est (si termini sunt innumeri) eodem numero terminorum sive dimidio termini maximi, ducto in partem infinitissimam numeri dati. Quod productum si quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad summam omnium terminorum; nondum utique divisus est numerus datus in partes innumeras, quod est contra hypothesin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quam imparium) duplicatum; vel, quod idem est; dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quam imparium) aequale est summae omnium terminorum.

Testo 6.11 *[*Mercator*, Logarithmotechnia]*(pp.31-32 di [7]) In diagrammate praecedenti, positio AI=1; intelligatur asymptotos inde ab I versus E divisa in partes aequales innumeras, quae sunt v.gr. $Ip = pq = qr = a$. Erit, per XIV et XV hujus, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, &c. & $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, &c. & $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, &c. Sed $ps + qt + ru =$ areae $BIru =$

$$= \left\{ \begin{array}{rrrrr} 1- & a+ & aa- & a^3+ & a^4 \\ 1- & 2a+ & 4aa- & 8a^3+ & 16a^4 \\ 1- & 3a+ & 9aa- & 27a^3+ & 81a^4 \\ \hline \end{array} \right\} \ \&c.$$
$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4$$

hoc est, = numero terminorum contentorum in linea Ir, minus summa eorundem terminorum, plus summa quadratorum ab iisdem, minus summa cuborum, plus summa quadrato-quadratorum, &c.

Hinc posito, ut ante, IA=1; sed $Ip = 0$[1= numero terminorum: invenio, per XV et XVI hujus, aream BIps= numero terminorum 0⌊1, minus summa eorundem terminorum =0⌊005, plus summa quadratorum ab iisdem = 0⌊000333333, minus summa cuborum = 0⌊000025, plus summa quadrato-quadratorum =0⌊000002, minus summa quadrato cuborum =0⌊000000166, plus summa cubo-cuborum

=0⌊000000014, &c.

$$\left\{\begin{array}{ll} 0\lfloor 1 & \\ & -0\lfloor 005 \\ 0\lfloor 000333333 & \\ & -0\lfloor 000025 \\ 0\lfloor 000002 & \\ & -0\lfloor 000000166 \\ -0\lfloor 005025166 & \\ & \underline{-0\lfloor 000000014} \\ 0\lfloor 0095310181 & = \text{areae}\, BIps \end{array}\right.$$

Testo 6.12 [Wallis](pp. 754-755 di [11]). Originale

Huic autem incommodo, levi constructionis immutatione, facile subvenitur.

Caeteris utique ut prius constructis; Quadrandum exponatur HFur spatium; (cujuscumque fuerit longitudine AH; puta major, minorve quam AI, vel huic aequalis: sumptoque ubivis inter A & H, puncto r; puta ultra citrave punctum I, vel in ipso puncto:) Ponantur autem (non, ut prius AI=1, & Ir=A: sed) AH=1; & Hr=A, quae intelligatur in aequales partes innumeras dividi, quarum quaelibet sit a. Erunt itaque, post AH=1, reliquae deinceps decrescentes 1-a, 1-2a, 1-3a, &c. usque ad Ar=1-A. Item, propter aequalia rectangula FHA, urA, BIA, &c. puta, $= b^2$: erit $HF = \frac{b^2}{1}$; reliquaeque deinceps $\frac{b^2}{1-a}$, $\frac{b^2}{1-2a}$, $\frac{b^2}{1-3a}$, &c, usque ad $ru = \frac{b^2}{1-A}$ spatium HFur complentes. (Quae omnia ostensa sunt, in mea Arithmetica Infinitorum, prop. 88, 94, 95.)

Factaque divisione; reperietur

$$\frac{b^2}{1-a} = b^2 + b^2a + b^2a^2 + b^2a^3 + b^2a^4\,, \&c.$$

Hoc est b^2 in $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$, &c. (sumptis ipsius a potestatibus continue sequentibus affirmatis omnibus). Cumque de reliquis idem sit judicium; erunt rectae omnes, ipsis HF & ru interjectae,

$$\left.\begin{array}{llllll} 1+ & a+ & a^2+ & a^3+ & a^4 & \&c. \\ 1+ & 2a+ & 4a^2+ & 8a^3+ & 16a^4 & \&c. \\ 1+ & 3a+ & 9a^2+ & 27a^3+ & 81a^4 & \&c. \\ \& & \text{sic} & \text{deinceps} & \text{usque} & \text{ad} & \\ 1+ & A+ & A^2+ & A^3+ & A^4 & \&c. \end{array}\right\} \text{in } b^2$$

Omniumque aggregatorum $A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \frac{1}{4}A^4 + \frac{1}{5}A^5$ &c. in $b^2 = FHru$ (per Arithm. Infin. prop. 64).

Testo 6.13 [Gregory, *Exercitationes Geometricae*](pp.10-11 di [15]).

Sit $SBKH$ spatium Hyperbolicum, contentum sub curva Hyperbolica SB, asymptotae portione HK, & rectis SH, BK, alteri asymptotae parallelis, posito B Hyperbolae vertice: fit parallelogrammum $BKHS$, & producatur $B5$ in R; jungaturque KR quae $5H$ secet in 6: deinde continuetur series infinita continue proportionalium nempe $5H$, $6H$, LH, NH, & sic deinceps; sitque $5BKH$

parallelogrammum, $K6H$ triangulum, KLH trilineum quadraticum, KNH trilineum Cubicum, & ita deinceps in infinitum. Dico spatium Hyperbolicum, $BKHS$ aequale esse dicto parallelogrammo, dicto rectangulo, una cum infinitis istis trilineis, quorum omnium vocamus ω. Si Figura $BKHS$ et ω non sunt aequales, sit inter illas differentia α; & dividatur recta HK in tot partes aequales a rectis asymptotae RA parallelis, ut rectangula (ab illis & portionibus rectae KH contenta) Figurae $BKHS$ circumscripta, nempe VH, ZD, differentia a rectangulis Figurae $BKHS$ inscriptis, nempe YH, BD, minore intervallo quam α; hoc enim fieri potest ab indefinita divisione rectae KH. Quoniam B est Hyperbolae vertex, parallelogrammum $BKAR$ est aequilaterum; & proinde recta $6H$, ad libitum est aequalis rectae HK, cumque $5H$, $6H$, LH, NH, &c. sunt continue proportionales in infinitum, ex hujus 3 erit recta SH aequalis summae omnium, & parallelogrammum SD aequale summae omnium parallelogrammorum $5D$, $6D$, LD, ND, &c. in infinitum; atque summa omnium parallelogrammorum $5D$, $6D$, LD, ND, &c. in infinitum, major est parallelogrammo $5D$ una cum portione trianguli $6FDH$ una cum portione trilinei quadratici $LCDH$ una cum portione trilinei cubici $NCDH$, &c. in infinitum, quoniam praedictae portiones dictis parallelogrammis inscribuntur, & ideo parallelogrammum SD majus est parallelogrammo $5D$ una cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum YK majus esse rectangulo $7K$ una cum infinitis numero portionibus FKD, CKD, OKD, &c. & proinde rectilineum $SVYZKH$ majus est quam ω. Deinde recta FD est aequalis rectae DK; atque $7D$, FD, CD, OD, &c. sunt rectae continue proportionales in infinitum, & igitur recta YD est aequalis ipsarum summae, & parallelogrammum XD aequale parallelogrammis $7H$, FDH, CDH, ODH, &c. at summa parallelogrammorum $7H$, FDH, CDH, ODH, &c. minor est quam rectangulum $7H$ una cum portione trianguli $6FDH$ una cum portione trilinei quadratici $LCDH$ una cum portione trilinei cubici $NCDH$, &c. quoniam dicta parallelogramma dictis portionis inscribuntur, & ideo parallelogrammum YH minus est parallelogrammo $7H$ una cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum BD minus esse parallelogrammo BD una cum infinitis numero portionibus FKD, CDK, OKD, & ideo rectilineum $XY7BKH$ minus est quam ω: quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectilineua $SVYZKH$, $XY7BKH$, intermediae autem ω & spatium Hyperbolicum $SBKH$; et ideo diffrerentia intermediarum, nempe α minor est quam differentia extremarum, quod est absurdum, ponitur enim major; nulla igitur est differentia inter Figuram $SBKH$ & ω, & ideo aequales sunt, quod demonstrandum erat.

Testo 6.14 *[*Halley*]* (pp.59-60 di [18])
If the Root of any Infinite Power be extracted out of any Number, the "differentiola" of the said Root from Unity, shall be as the Logarithm of that Number. So that Logarithms thus produced as many forms as you please to assume infinite "Indices" of the Power whose Root you seek: as if the "Index" be supposed 100000*&c. infinitely, the Roots shall be the Logarithms invented by the Lord Napeir; but if the said "Index" were* 2302585*&c. Mr. Briggs's Logarithms would immediately be produced. And if you please to stop at any number of Figures,*

and not to continue them on, it will suffice to assume an "Index" of a Figure or two more than your intended Logarithm is to have (....) Now, though the Notion of Infinite Power may seem very strange, and to those that know the difficulty of the Extraction of the Roots of High Powers, perhaps impracticable; yet, by the help of the admirable Invention of Mr. Newton, whereby he determines the "Unciae" or number prefixt to the Members composing Powers (on which chiefly depends the Doctrine of Series) the infinity of the Index contributes to render the Expression much more easie: For if the Infinite Power to be resolved be put (after Mr. Newton's method) $\overline{p+pq}$, $\overline{p+pq}|^{\frac{1}{m}}$ *or* $\overline{1+q}|^{\frac{1}{m}}$, *instead of*

$$1+\frac{1}{m}q+\frac{1-m}{2mm}qq+\frac{1-3m+2mm}{6m^3}q^3+\frac{1-6m+11mm-6m^3}{24m^4}q^4\&c.$$

(which is the Root when m is finite) become

$$1+\frac{1}{m}q-\frac{1}{2m}qq+\frac{1}{3m}q^3-\frac{1}{4m}q^4+\frac{1}{5m}q^5 \quad \&c.$$

m being infinite, and consequently whatever is divided thereby vanishing. Hence it follows that $\frac{1}{m}$ *multiplied into*

$$q-\frac{1}{2}qq+\frac{1}{3}q^3-\frac{1}{4}q^4+\frac{1}{5}q^5 \quad \&c.$$

is the augment of the first of our mean Proportionals between Unity and $1+q$, *and is therefore the Logarithm of the "ratio" of 1 to* $1+q$, *and whereas the Infinite Index m may be taken at pleasure, the several Scales of Logarithms to such "Indices" will be as* $\frac{1}{m}$ *or reciprocally as the "Indices".*

Bibliografia

[1] C. Naux: *Histoire des Logarithmes de Neper a Euler. Tome II. La promotion des logarithmes au rang de valeur analytique.* Blanchard, Parigi, (1971).

[2] Ma. R. Massa Esteve: Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625-1686), *Historia Math.* **33**, (2006), 82–112.

[3] G. Vacca: The theory of Napierian logarithms explained by Pietro Mengoli (1659). In [4], pp. 165-167.

[4] C.G. Knott (curatore): *Napier Tercentenary Memorial Volume* Longmans, Londra, (1915).

[5] A. Agostini: La teoria dei logaritmi da Mengoli ad Eulero. *Period. di Mat.* Serie IV, **2**, (1922), 430–451.

[6] J.E. Hofmann: On the discovery of the logarithmic series and its development in England up to Cotes. *Nat. Math. Mag.*, **14**, (1939), 37–45.

[7] N. Mercator: *Logarithmotechnia*. Fac-simile dell'edizione pubblicata a Londra nel 1668. G. Olms, Hildesheim, (1975).

[8] J.E. Hofmann: Nicolaus Mercators Logarithmotechnia. *Deutsche Math.*, **3**, (1938), 446–466.

[9] I. Grattan-Guinness: Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Hist. Math.* (1996), 355–375.

[10] W. Brouncker: The squaring of the hyperbola by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration. *Phil. Trans.* **3**, (1668), 645–649.

[11] I. Wallis: Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris. *Phil. Trans.* **3**, (1668), 753–759.

[12] C.H. Edwards, jr.: *The Historical Development of the Calculus.* Springer, New York, (1979).

[13] N. Mercator: Some illustration of the *Logarithmotechnia* of M. Mercator, who communicated it to the Publisher. *Phil. Trans.* **3**, (1668), 759–764.

[14] M. Dehn, E.D. Hellinger: Certain mathematical achievements of James Gregory. *Amer. Math. Monthly*, **50**, (1943), 149–163.

[15] J. Gregory: *Exercitationes Geometricae*. Godbid, London, (1668).

[16] C.I. Gerhardt (curatore): *Leibnizens Mathematische Schriften* vol. I, pp.100-113.

[17] J.E. Hofmann: Weiterbildung der logarithmischen reihe Mercators in England II. Aus Briefen Gregorys und Newtons *Deutsche Math.*, **4**, (1939), 556–562.

[18] E. Halley: A most compendious and facile method for constructing the logarithms, exemplified and demonstrated from the nature of numbers, without any regard to the hyperbola, with a speedy method for finding the number from the logarithm given. *Phil. Trans.* **19**, (1695-1697), 58–67.

Capitolo 7

La controversia sui logaritmi dei numeri negativi

7.1 Il carteggio Leibniz-J. Bernoulli I (1712-1713)

Può apparire strano oggi ma l'impossibilità di definire in campo reale il logaritmo di un numero negativo fu argomento di discussione scientifica che infiammò gli epistolari dei migliori scienziati europei: da Leibniz (1646-1716) a Johann Bernoulli (1667-1748) I, da Jean Le Ronde D'Alembert (1717-1783) a Leonhardt Euler (Eulero, 1707-1783). La conclusione del dibattito si ebbe solo quando Eulero elaborò l'estensione del concetto di logaritmo ai numeri complessi mostrando anche che ad ogni numero corrispondono un'infinità di valori possibili per il logaritmo. In effetti la storia della controversia sui logaritmi dei numeri negativi si intreccia più volte con i numeri complessi ed in qualche misura ne dipende. Come preambolo, osserviamo [1] che il calcolo integrale aveva fornito al matematico svizzero J. Bernoulli I l'occasione di trovare un legame tra funzioni trigonometriche ed il logaritmo dei numeri immaginari fin dal 1702, anno in cui, grazie alla trasformazione $z = \frac{\sqrt{-1}b(t-1)}{t+1}$, egli riuscì a trasformare il differenziale

$$\frac{a\mathrm{d}z}{b^2 + z^2}$$

nel differenziale

$$-\frac{a\mathrm{d}t}{2b\sqrt{-1}t}$$

mostrando dunque che l'arcotangente è esprimibile come logaritmo di un numero complesso. Sempre nel 1702, scrivendo il 24 giugno a J. Bernoulli I, anche

Leibniz afferma di essersi imbattuto in logaritmi di numeri immaginari nel corso dell'integrazione di funzioni razionali.

Un arcano si cela dietro questo. Poiché le quantità immaginarie si possono utilizzare correttamente e con frutto nell'analisi delle equazioni, come un tempo trovai in equazioni e confermai con un calcolo singolare; feci poi la stessa cosa nell'Analisi Tetragonistica e ridussi delle quadrature razionali a logaritmi sia veri che immaginari, e la stessa quadratura del cerchio, non in un modo soltanto.[1] (p.703 di [2])

Si tratta di incontri occasionali perché manca una trattazione sistematica della teoria dei logaritmi dei numeri immaginari la cui esistenza viene data per scontata, più per la consistenza dei risultati ottenuti che per una matura consapevolezza del loro significato. Quanto lungo fosse il cammino per arrivare ad una teoria soddisfacente sarà chiaro dalle tappe della controversia che ora iniziamo ad esaminare.

Benché collegata ai logaritmi dei numeri immaginari, la controversia sui logaritmi dei numeri negativi ebbe origine da un'altra questione. I numeri negativi sono "meno del nulla" cioè dello zero? Se così fosse, la proporzione $1 : -1 = -1 : 1$ sarebbe impossibile in quanto nel rapporto a sinistra il numero più grande sta al più piccolo, mentre a destra è il più piccolo che sta al più grande. Al proposito Leibniz pubblicò un articolo sugli *Acta Eruditorum* del 1712 in cui pur ritenendo impossibili *de facto* proporzioni di questo tipo, ne ammetteva l'utilizzo alla stessa stregua con cui si utilizzavano tranquillitamente altre quantità immaginarie.

Dissi già allora che non mi sembravano dei rapporti veri *quelli nei quali una quantità minore di nulla è l'antecedente od il conseguente, anche se nel calcolo li si può utilizzare in sicurezza e con frutto, come altre quantità* immaginarie[2] (p.388 di [3])

Per Leibniz un rapporto va considerato immaginario quando non ha logaritmo. È questo il caso del rapporto $(-1/1)$ perché, dice Leibniz, se ammettesse logaritmo avremmo

$$\log(-1/1) = \log(-1) - \log(1) = \log(-1)\,.$$

Ora, per Leibniz $\log(-1)$ non può essere un numero reale: infatti non può essere positivo, visto che sono i logaritmi dei numeri maggiori di 1 che danno luogo a logaritmi positivi, né può essere un numero negativo, in quanto sono i numeri positivi minori dell'unità cui corrispondono logaritmi negativi. Non resta che concludere che $\log(-1)$ è immaginario. A ben vedere Leibniz presuppone l'iniettività della funzione logaritmo. Seguendo Cajori [1], osserviamo il

[1] Sed latet in his arcanum adhuc majus. Quoniam, ut olim etiam inveni in aequationibus et calculo singulari comprobavi, possunt imaginariae non minus quam reales in Analysi aequationum recte et utiliter adhiberi; ideo idem feci etiam in Analysi Tetragonistica et quadraturas rationales reduxi ad logarithmos vel veros vel imaginarios, ipsamque adeo circuli quadraturam, non una ratione.

[2] Jam tum dixi mihi videri, *veras* illas *rationes* non esse, in quibus quantitas nihilo minor est antecedens, vel consequens, etsi in calculo haec, ut alia *imaginaria*, tuto et utiliter adhibeatur.

duplice significato che LEIBNIZ attribuisce al termine *immaginario* inteso come non esistente e come numero del tipo di $\sqrt{-1}$.

Ma dello stesso -1 non si dà logaritmo. Infatti non è un numero positivo, perché sono tali i logaritmi di un numero positivo maggiore dell'unità. Tuttavia non può neppure essere un numero negativo perché sono tali i logaritmi di numeri positivi minori dell'unità. Dunque non resta che concludere che il logaritmo di -1, non potendo essere né positivo né negativo, deve essere immaginario.[3] (p.388 di [3])

È a questo punto che LEIBNIZ scrive a BERNOULLI una breve lettera, datata 16 marzo 1712 in cui, tra le altre cose, lo informa succintamente sull'argomento.

La risposta di Varignon alle obiezioni di Grandi comparirà sugli Acta di Lipsia del mese di aprile; vi aggiunsi una piccola osservazione dove notai che benché si possa affermare che -1 ed espressioni simili significhino meno di nulla, tuttavia non è possibile che esistano rapporti, fuorché immaginari, nei quali l'antecedente o il conseguente è una quantità minore di nulla, ovvero il rapporto -1 sta a 1 come 1 sta a -1 è immaginario. Lo dimostro, tra l'altro, dal fatto che ad un rapporto come questo o ad un altro simile non corrisponde alcun logaritmo.[4] (p.881 di [2])

La risposta di BERNOULLI è contenuta in una lettera del 25 maggio 1712 dove dissente dall'argomento di LEIBNIZ perché a suo dire x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. Egli considera il differenziale $\mathrm{d}x/x$ del logaritmo ($\mathrm{d}\,lx$ nella sua notazione). Poiché

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}x}{-x}$$

egli ottiene

$$\mathrm{d}\,\log(x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}x}{-x} = \mathrm{d}\,\log(-x)$$

che per BERNOULLI dimostra l'uguaglianza $\log(x) = \log(-x)$. Come conseguenza, BERNOULLI afferma che, similmente all'iperbole, anche la curva logaritmica ha due rami distinti. BERNOULLI applica identità valide solo all'interno del dominio di definizione della funzione logaritmo. Inoltre, come evidenzierà EULERO, sbaglia nel dedurre l'uguaglianza di due funzioni a partire dall'uguaglianza dei loro differenziali. Ecco di seguito l'originale della lettera in esame.

Non sono del tutto d'accordo con te nel sostenere che il rapporto -1 sta ad 1 come 1 sta a -1 è immaginario perché non gli corrisponde alcun logaritmo; tu infatti supponi che un numero negativo non abbia un logaritmo, ma ora ti dimostrerò il contrario: sia x un numero variabile che cresce per incrementi infinitamente

[3] At ipsius -1 non datur Logarithmus. Non enim est positivus, nam talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate majoris. Sed tamen etiam non est negativus, quia talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate minoris. Ergo Logarithmus ipsius -1 cum nec positivus nec negativus, superest quod non sit verus, sed imaginarius

[4] Varignoniana ad Grandii objectiones responsio in Actis Lipsiensibus mense Aprili comarebit; adjeci Observatiunculam notavique, etsi possit dici, -1 et similes expressiones significare nihilo minora, non tamen dari rationes nisi imaginarias, quarum antecedens aut consequens sit quantitas nihilo minor, seu rationem -1 ad 1, vel 1 ad -1 esse imaginariam. Quod inter alia ex eo probo, quia huic rationi vel simili nullus respondet Logarithmus.

piccoli, il cui logaritmo sia lx; dico che lx corrisponde sia a $-x$ che allo stesso x. Infatti, tu sai che $\mathrm{d}\,lx$ è $= \frac{\mathrm{d}x}{x}$, cioè che il differenziale di un qualche logaritmo si ottiene dividendo il differenziale del numero per il numero stesso; poiché poi $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ è uguale a $\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$, segue l'asserto. Ecco i passaggi: $\mathrm{d}\,lx = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}x}{-x} = \mathrm{d}\,l - x$, per cui è anche $l\,x = l - x$. Da ciò puoi vedere che la curva logaritmica ABC ha una compagna $\alpha\beta\gamma$ come, ad esempio, un'iperbole ha la sua opposta. In questo modo, preso BE come unità, EF non è soltanto il logaritmo dello stesso CF ma anche di γF che indica l'opposto del numero precedente.[5] (pp.886-887 di [2])

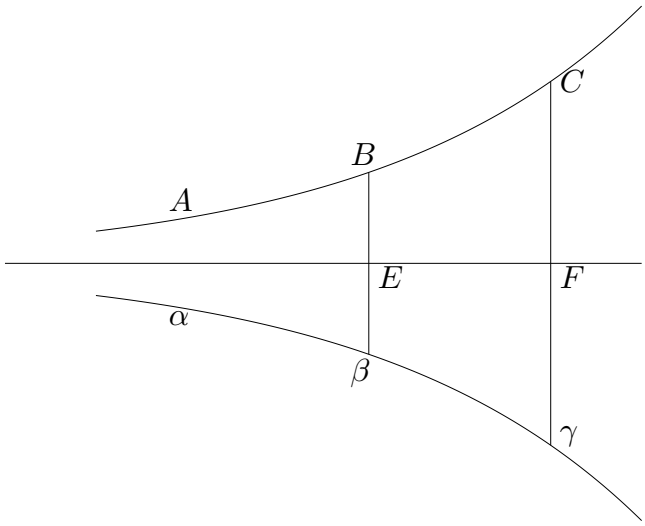

Figura 7.1: I due rami della curva logaritmica descritta da Bernoulli nella lettera del 25 maggio 1712.

Benché Leibniz evidenzi nella lettera successiva del 30 giugno 1712 l'inammissibilità al ricorso dei differenziali effettuata da Bernoulli, egli mescola altre osservazioni poco concludenti. Ad esempio, basa l'impossibilità di definire $\log(-2)$ sul fatto che, se ciò fosse possibile, esisterebbe anche $\log\sqrt{-2}$ che ne è la *metà*. Contesta anche l'argomento geometrico di Bernoulli dichiarando impossibile per la curva logaritmica attraversare il proprio asintoto con un comportamento simile a quello mostrato in Fig. 7.3. Sembra che qui Leibniz

[5] Non prorsus Tecum sentio, rationem -1 ad 1, vel 1 ad -1 esse imaginariam ex eo, quod hiuc rationi nullus respondeat logarithmus; supponis enim numerum negativum nullum habere Logarithmum, cujus contrarium ego sic probo: Esto x numerus variabilis, per infinite parva crescens, cujus Logarithmus sit lx; dico eundem lx respondere ipsi -x aeque ac ipsi +x: hoc est $l\,x = l - x$. Nam scis $\mathrm{d}\,lx$ esse $= \frac{\mathrm{d}x}{x}$, hoc est differentiale alicujus Logarithmi haberi dividendo differentiale numeri per ipsum numerum; cum itaque $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ sit aequale $\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$, patet propositum. Ecce rei connexionem $\mathrm{d}\,lx = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}x}{-x} = \mathrm{d}\,l - x$, ergo etiam $l\,x = l - x$. Unde vides curvam Logarithmicam ABC habere suam comparem $\alpha\beta\gamma$, ut ex. gr. Hyperbola suam oppositam. ita ut, sumta BE pro unitate, EF sit Logarithmus non tantum ipsius CF, sed et ipsius γF, quae designat numerum prioris negativum.

non ammetta la possibilità di un comportamento discontinuo per la funzione logaritmo.

Mi stupisco di come con il tuo acume non ti sia accorto che non esiste il logaritmo di -2 dal momento che non esiste il logaritmo di $\sqrt{-2}$ *che sarebbe la metà del precedente. Ma tu dici che il differenziale del numero -x, cioè* $-\mathrm{d}\,x$*, diviso per il numero -x dà il differenziale del logaritmo* $\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$ *o* $\frac{\mathrm{d}x}{x}$*. Ma questa regola che il differenziale diviso per il numero dà il differenziale del logaritmo e qualsivoglia proprietà che compete alla natura o per costruzione dei logaritmi non ha luogo, come tu trovi, con i numeri negativi dove vuoi dimostrarle. La stessa figura mostra che non si può giungere a* $\log$ *.-1 o a una quantità simile perché l'ordinata x della curva logaritmica LL (Fig. 7.2) non può decrescere per annullarsi fino a -1, come succede nella curva CC (Fig. 7.3). Per ottenere questo, infatti, la curva logaritmica dovrebbe intersecare l'asse che però è il suo asintoto.*[6] (pp.888 di [2])

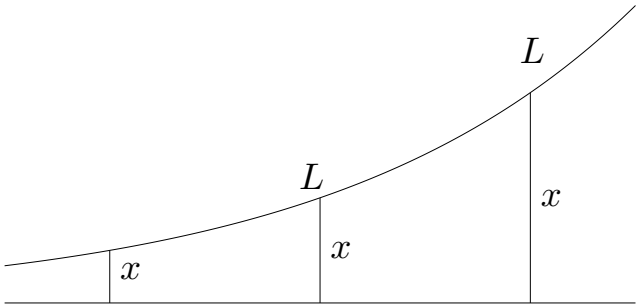

Figura 7.2: La curva logaritmica per Leibniz non può attraversare l'asse delle ascisse che ne rappresenta l'asintoto. (*cfr.* lettera del 30 giugno 1712).

Nella risposta del 13 agosto 1712 Bernoulli non dice nulla sulla inammissibilità dell'argomento basato sui differenziali ma, grazie alla debolezza delle altre argomentazioni addotte da Leibniz, rafforza il convincimento che x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. Sull'argomento geometrico di Leibniz, Bernoulli è nel giusto: vi sono molti esempi di curve con due rami distinti separati da un asintoto. Egli ne riporta uno classico, la concoide di Nicomede, insieme alla curva $x^2 = \frac{a^4}{az+z^2}$. Interessante è la riprovazione dell'argomento secondo cui $\log(-2)$ non esisterebbe in quanto non è ammissibile $\log(\sqrt{-2})$ che ne è la metà. Bernoulli è netto: $\log(\sqrt{-2})$ *non* è la metà di $\log(-2)$. Infatti, $\log\sqrt{2}$

[6] Miror te pro acumine Tuo non vidisse, haud posse Logarithmum $\tau o\tilde{\upsilon}$ -2, quia non potest dare Logarithmus $\tau o\tilde{\upsilon}$ $\sqrt{-2}$, qui esset prioris dimidius. At dicis, differentiale numeri -x, quod est $-\mathrm{d}\,x$, divisum per numerum -x, dat differentiale logarithmi $\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$ seu $\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Sed haec regula, quod differentiale divisum per numerum dat differentiale Logarithmi, et quaevis alia de Logarithmorum natura et constructione non habet locum in numeris negativis, ut reperies, ubi demonstrare voles. Ipsa etiam figura ostendit, non posse perveniri ad log .-1 vel similem, quia x ordinata logarithmicae LL non potest ita decrescere ut evanescat tandem seu ad -1, ut fit in curva CC. Nam ad hoc obtinendum debuisset curva logarithmica secare axem, qui tamen est ei asymptotos.

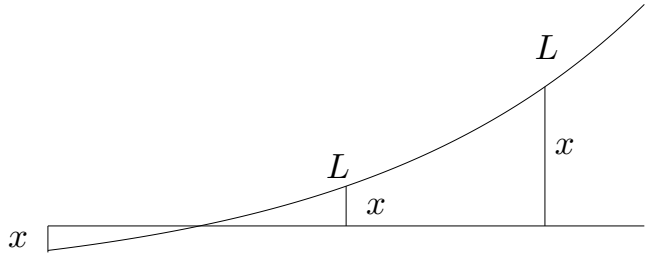

Figura 7.3: Curva che, per Leibniz, ha profilo inammissibile per la curva logaritmica (*cfr.* lettera del 30 giugno 1712).

è la metà di $\log 2$ perché $\sqrt{2}$ è medio proporzionale tra 1 e 2, mentre $\sqrt{-2}$ *non* è medio proporzionale tra -1 e -2. Pertanto, così come $\log(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\log(2)$ deve essere $\log(\sqrt{-1 \times -2}) = \frac{1}{2}\log(-2)$ e, in definitiva $\log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\log(-2)$

[Tu dici:] Non vedo ancora come sia possibile dare un senso al logaritmo di -2*: infatti io nego quello che tu affermi, che il logaritmo di* $\sqrt{-2}$ *sia la metà del logaritmo di* -2*, anche se è vero che il logaritmo di* $\sqrt{2}$ *è metà del logaritmo di 2: è bene senza dubbio indagare il motivo di questa verità e poi vedrai la differenza. Senza dubbio* $\log.$ *di* $\sqrt{2}$ *è la metà di* $\log.$ *di 2, perché* $\sqrt{2}$ *è il medio proporzionale tra 1 e 2: ma* $\sqrt{-2}$ *non è medio proporzionale tra -1 e -2 per cui non è lecito concludere che* $\log.\sqrt{-2}$ *è la metà del logaritmo di -2 allo stesso modo in cui* $\log.$ *di* $\sqrt{1 \times 2}$ *è la metà del logaritmo di 2 così anche* $\log.\sqrt{-1 \times -2}$ *è la metà del* $\log. -2$*, cioè* $\log.\sqrt{2}$ *è la metà di* $\log. -2$ *ed anche la metà del logaritmo di +2. Ciò che conferma in sommo grado l'argomento proposto nella mia ultima che evidentemente* $\log.x = \log. -x$ *dal momento che* $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ *è* $= \frac{-\mathrm{d}x}{-x}$*, e dunque un numero preso con segno positivo o negativo ha sempre lo stesso logaritmo. In realtà mi stupisce che tu voglia mostrare il contrario da una figura, come se l'ordinata della curva logaritmica LL (Fig. 7.2) non possa decrescere fino ad annullarsi o giunga a* 0 *per poi passare dalla parte contraria, o a -x, come succede per la curva CC (Fig. 7.3) come mostrano molti esempi ovvi e comuni che riescono a far vacillare completamente entrambe le parti del tuo argomento. In primo luogo una certa curva può passare da una parte all'altra da +x a -x senza che ci sia bisogno di tendere o raggiungere lo 0, come si può vedere nell'iperbole ordinaria dove la parte comune è portata via alle ordinate positive e negative senza mai annullarsi; in secondo luogo nego che la curva logaritmica LL possa giungere all'altro ramo* $\lambda\lambda$ *(7.8), tramite l'annullarsi delle ordinate x; ciò succede dopo che LL diverge all'infinito, laddove x svanisce o si annulla; anche in questo caso abbiamo molti esempi, come nella Concoide di Nicomede (Fig. 7.5), dove ci sono due parti opposte* ABC *ed* $\alpha\beta\gamma$ *sopra il medesimo asse* DEF *e descritte a partire dallo stesso polo* O*, che però non sono connesse tra loro se non dopo l'escursione all'infinito. Hai anche un altro esempio in quest'altra curva, la cui equazione (dette x e z le ordinate)* $xx = \frac{a^4}{az+zz}$ *o* $x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{az+zz}}$ *mostra che la curva ha due parti che convergono all'infinito, mentre una ordinata x positiva*

qualsiasi ha un'opposta x negativa, allo stesso modo che io dico accade per la curva logaritmica. Forse, soppesate con attenzione tutte le cose cambierai parere e ritratterai quanto asserito su questo argomento nell'ultimo numero di aprile degli Acta, che ho appena visto.[7] (pp.891 -892 di [2])

La risposta di LEIBNIZ del 18 settembre 1712 e la lettera successiva di BERNOULLI datata 11 novembre 1712 sono molto più articolate. LEIBNIZ allega una *scheda*, un'aggiunta, alla breve lettera del 18 settembre, interamente dedicata alla questione. Tralasciato ogni argomento geometrico, egli ricomincia dalla definizione di logaritmi come progressione aritmetica associata ad una geometrica e, considerando il sistema di logaritmi in base 2 osserva che, benché sia +2 che -2 elevati al quadrato danno entrambi +4, tuttavia solo il primo numero appartiene ad una progressione geometrica contenente +2: egli dà per scontato che la progressione parta da +1, visto il modo in cui introduce i logaritmi in base 2. L'impossibilità a dare *simultanenamente* significato ai logaritmi di 2 e -2 viene mostrata con un argomento interessante perché lega esplicitamente logaritmi ad esponenziali. L'unione dei concetti di logaritmo ed esponenziale era già chiara a WALLIS che al Capitolo XII della sua *Algebra* del 1685 osserva dal confronto tra le progressioni

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & r & rr & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & \text{ecc.} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \text{ecc.}, \end{array}$$

come

[7] *Nondum video haud posse dari Logarithmi τοῦ -2: nego enim, quod asseris, Logarithmum τοῦ* $\sqrt{-2}$ *esse prioris dimidium, etsi verum sit logarithmi τοῦ* $\sqrt{2}$ *esse dimidium logarithmi τοῦ 2: oportet quippe inspicere rationem hujus veritatis, et videbis discrimen. Ideo scilicet* $\log.$ *τοῦ* $\sqrt{2}$ *est dimidium* $\log.$ *τοῦ 2, quia* $\sqrt{2}$ *est medium proportionale inter 1 et 2: sed* $\sqrt{-2}$ *non est medium proportionale inter -1 et -2, adeoque concludi non potest* $\log.$ *τοῦ* $\sqrt{-2}$ *esse dimidium Logarithmi τοῦ -2, adeoque quemadmodum* $\log.$ *τοῦ* $\sqrt{1\times 2}$ *est dimidium logarithmi τοῦ 2, ita quoque* $\log.\sqrt{-1\times -2}$ *est dimidium* $\log.-2$*, hoc est* $\log.\sqrt{2}$ *est dimid.* $\log.-2$ *aeque ac dimidium Logarithmi τοῦ +2. Id quoque maxime confirmat argumentum meum in postremis meis allatum, esse scilicet* $\log.x = \log.-x$ *ex eo, quod* $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ *sit* $=\frac{-\mathrm{d}x}{-x}$*, et sic numeri alicujus tam affirmativi quam negativi commumem esse Logarithmum. Miror vero Te velle ex figura contrarium ostendere, quasi ordinata logarithmicae LL non possit ita decrescere, ut evanescat tandem seu perveniat ad* 0*, et deinde transeat in contrariam partem seu ad -x, sicuti id fit in curva CC, cum suppetant tamen innumera exempla quotidie obvia, quae utramque Tui argumenti partem vacillare evincunt. Primo etenim curva aliqua in partem oppositam seu +x in -x transire potest, ita ut non opus sit, ut evanescat seu perveniat ad 0, sicuti videre est in Hyperbola ordinaria super axe conjugato, cujus pars abscissa communis est ordinatae affirmativae et negativae, licet nunquam evanescentis; secundo nego Logarithmicam LL non ad alteram partem pervenire λλ, per evanescentiam ordinatarum x; hoc enim fit, postquam LL excurrit in infinitum, ibi quippe evanescit x, seu pervenit ad 0; hujusmodi iterum multa exempla habemus, sicuti videmus in Conchoide Nicomedis, cujus duae sunt partes oppositae ABC et αβγ, super eodem axe DEF et ex eodem polo O descriptae, quae tamen non in se invicem transeunt, nisi post excursionem in infinitum. Habes itaque exemplum in hac altera curva, cujus aequatio (positis ordinatis x et z)* $xx = \frac{a^4}{az+zz}$ *seu* $x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{az+zz}}$ *ostendit, eam habere duas partes convergentes in infinitum, dum interim ordinata quaelibet x affirmativa oppositam habet x negativam, plane ut in Logarithmica fieri statuo. Quae omnia ubi perpenderis, forte mutabis opinionem, et quae in novissimo Actorum Aprili, nuperrime tantum mihi viso, hac de re habes, retractanda ultro fateberis.*

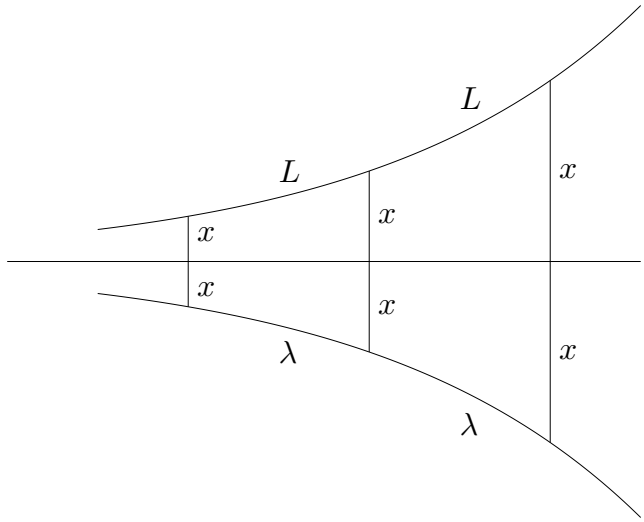

Figura 7.4: I presunti due rami della curva logaritmica di Bernoulli (*cfr.* lettera del 13 agosto 1712).

Questi esponenti sono detti logaritmi e sono numeri artificiali che sono messi in corrispondenza ai numeri naturali in modo che all'addizione o alla sottrazione dei primi corrispondano la moltiplicazione o la divisione dei secondi.[8] (Wallis, *Algebra*, p.37 di [1])

Tuttavia, nel presentare la teoria dei logaritmi egli ritorna alla definizione di logaritmo tradizionale, senza collegarla alla nozione di esponenziale. Dal canto suo Johann Bernoulli I, in una lettera diretta a Leibniz nel maggio 1694, nel tracciare le curve del tipo $y = x^x$ era servito dei logaritmi ordinari in quanto soddisfano un'equazione del tipo $y = a^x$. Nel dettaglio, la costruzione per punti di $y = x^x$ procede prendendo un valore x_1 di x e ricavando $\log x_1$ dalla curva logaritmica per poi costruire geometricamente il prodotto $x_1 \log x_1 = \log y_1$ ed infine, ancora grazie alla curva logaritmica, risalire al valore di y_1. È importante osservare [1] che in tutto questo Bernoulli non menziona progressioni aritmetiche o geometriche, ma assume un atteggiamento, per così dire, moderno nel trattare il logaritmo come operazione inversa all'esponenziazione. Se Bernoulli aveva chiara l'equivalenza delle scritture $y = x^x$ e $x \log x = \log y$, egli però non la formulò mai esplicitamente.

Tornando alla controversia Leibniz-Bernoulli, nella lettera del 18 settembre Leibniz afferma che l'equazione $2^e = x$ *equivale* ad $e = \log_2 x$ (anche se egli non introduce la base nella notazione) e non può essere risolta per e quando $x = -2$. Oltre a questo argomento, Leibniz ritiene che i logaritmi di numeri negativi vadano respinti per altri due motivi. Il primo coinvolge di nuovo

[8] These exponents they call logarithms, which are artificial numbers, so answering to the natural numbers, as that the addition and subduction of these answers to the multiplication and division of natural numbers.

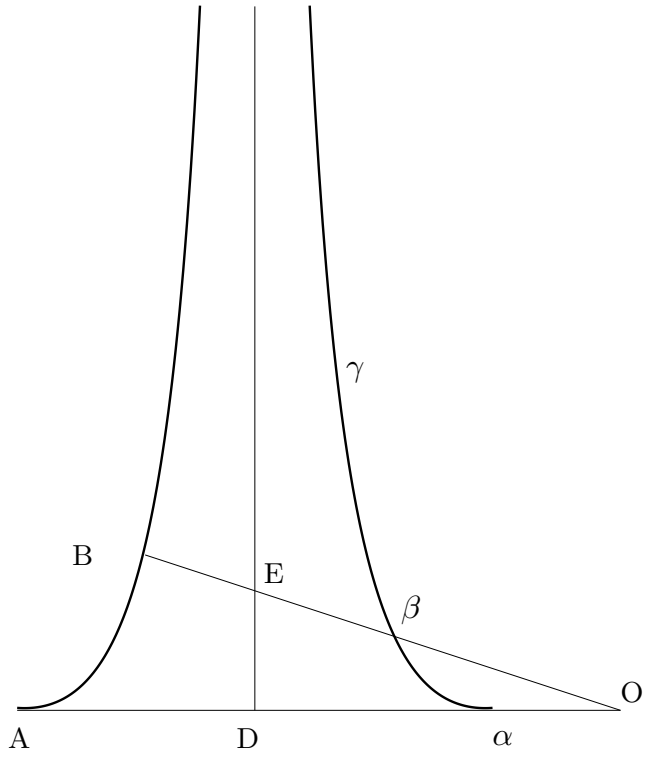

Figura 7.5: Schizzo della concoide di NICOMEDE citata da BERNOULLI nella lettera del 13 agosto 1712.

$\sqrt{-2}$ che, avendo quadrato -2 dovrebbe avere logaritmo pari ad $\frac{1}{2}\log(-2)$, se quest'ultimo ammettesse logaritmo. Ora, poiché $\sqrt{-2}$ è immaginario (*numerus impossibilis*), lo è anche il suo logaritmo e dunque anche il doppio di quest'ultimo, cioè $\log(-2)$. Come ulteriore argomento contro l'esistenza di $\log(-2)$, LEIBNIZ osserva come, nelle corrispondenze di operazioni tra numeri e logaritmi (al prodotto tra numeri si associa la somma di logaritmi, alla divisione la differenza, ecc.) non vi sia corrispondente alcuno all'operazione che manda un numero nel suo opposto. Infine, LEIBNIZ tiene a mostrare che, reale od immaginario che sia, $\log\sqrt{-2}$ deve essere la metà di $\log(-2)$ semplicemente perché $\sqrt{-2}$ è medio proporzionale tra $+1$ e -2. Ecco ora l'originale dell'aggiunta di LEIBNIZ sui logaritmi.

Testo 7.1 (LEIBNIZ) (pp.895–896 di [2]). Originale 7.9

La serie dei logaritmi è una serie di numeri che formano una progressione aritmetica corrispondente ad una serie di numeri in progressione geometrica, uno dei quali si può prendere l'unità ed un altro un qualunque numero positivo, ad esempio il 2. Come logaritmo dell'unità si può prendere lo 0 ed un

numero qualsiasi come logaritmo di 2, ad esempio possiamo prendere l'unità come logaritmo proprio di 2.

È inoltre evidente che, preso qualsiasi terzo proporzionale in questa progressione geometrica mai si può giungere ad un numero negativo. Sembra però che, presi i medi proporzionali, si possa arrivare ad un numero negativo come in questa nostra serie, dati 1,2,4 il medio tra 1 e 4 sembra essere tanto +2 quanto -2 dal momento che sia +2 che -2 moltiplicati per sé stessi danno +4. Questo problema sorge dal fatto che -2 non può appartenere ad una progressione geometrica come la nostra dove, per ipotesi, c'è +2; infatti -2 non è una potenza di 2 secondo un esponente qualsiasi ovvero non è della forma 2e *che si può dire contenga il logaritmo di qualsiasi numero che di conseguenza cade nella serie 1,2,4 ecc. almeno se è prolungata all'infinito o interpolata equivalentemente. Infatti se* $x = 2^e$ *si avrà* $e = \log x$*, posto che* $\log 1$ *è 0 e* $\log 2$ *è 1. Poiché dunque non esiste soluzione e all'equazione* $-2 = 2^e$*, il logaritmo di -2 non esisterà. E anche per questo non è possibile assegnare -2 come ordinata sull'asintoto della curva logaritmica nella stessa serie che contiene 1 e 2 ovvero non è possibile determinare* x *nell'equazione della curva logaritmica che soddisfi* $x = 2^e$*.*

Ma la medesima cosa si dimostra ancor più facilmente grazie alle proprietà delle quantità immaginarie. Se -2 ha logaritmo, esisterà anche la metà di questo logaritmo. D'altra parte questo è il logaritmo di un numero che, moltiplicato per se stesso dà -2 ovvero è il logaritmo di $\sqrt{-2}$*. Ma* $\sqrt{-2}$ *è un numero impossibile ed il logaritmo di un numero impossibile è impossibile; dunque è anche impossibile la metà del logaritmo di -2; ma un numero la cui metà è impossibile deve essere anch'esso impossibile. Pertanto il logaritmo di -2 è impossibile.*

Tra l'altro la stessa armonia di numeri e logaritmi illustra ciò. La moltiplicazione per se stesso di un numero corrisponde alla moltiplicazione nei logaritmi; la moltiplicazione tra i numeri è rappresentata dall'addizione tra i logaritmi; alla condizione di numero corrisponde quella di logaritmo.

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & n^e & \text{corrisponde} & e \cdot \log n \\ & n \cdot n & & \log n + \log n \\ & n & & \log n\,. \end{array}$$

Al contrario, l'estrazione di radice tra i numeri corrisponde alla divisione tra i logaritmi; la divisione tra i numeri viene rappresentata dalla sottrazione tra i logaritmi. Ma che cosa rappresenta la negazione tra i numeri? Rispondo che non si può trovare un corrispondente perché scendendo dall'estrazione per mezzo di divisione e sottrazione non si può trovare nulla al di sotto della sottrazione.

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \sqrt[e]{n} & \text{corrisponde} & \log n : e \\ & \frac{n}{n} & & \log n - \log n \\ & -n & & \text{che cosa?} \end{array}$$

Da questo si capisce anche che benché sia possibile dire che il prodotto di -2 per se stesso è 4, non è giusto però dire che -2 è il medio proporzionale tra 1 e 4 ed in generale i numeri negativi non entrano nei rapporti benché in qualche modo entrino nei calcoli, come ho da poco mostrato altrove, negli Acta Eruditorum.

Da ciò viene confermata la non esistenza dei logaritmi di numeri negativi come, viceversa, l'esclusione dei logaritmi di numeri negativi conferma che rapporti o proporzioni con numeri negativi non possono essere considerati.

A chi volesse sostenere che il logaritmo di $\sqrt{-2}$ *non è la metà del logaritmo di -2 pur essendo il logaritmo di* $\sqrt{2}$ *la metà del logaritmo di 2 adducendo come ragione che* $\sqrt{2}$ *è medio proporzionale tra -1 e -2 si dà una facile risposta comune ad entrambe: come la radice di un numero è medio proporzionale tra 1 ed il numero di cui è radice, come appunto* $\sqrt{2}$ *è medio proporzionale tra 1 e 2, e come* $\sqrt{-2}$ *è medio proporzionale (o fingiamo che lo sia) tra 1 e -2. Ma da ambo le parti segue che il logaritmo della media sarà metà del termine posteriore, infatti il logaritmo del medio proporzionale tra 1 e 2 (cioè proprio* $\sqrt{2}$*) è* $\log 1 + \log 2 : 2$*. Ma* $\log 1$ *è 0; per cui il logaritmo del medio tra 1 e 2 è* $\log 2 : 2$*. Similmente il logaritmo del medio proporzionale tra 1 e -2 (cioè proprio* $\sqrt{-2}$*) è* $\log 1 + \log -2 : 2$*, cioè (siccome* $\log 1 = 0$*)* $\log -2 : 2$*. La cosa si vede così : poiché -2 è =* $\sqrt{-2}$ *per* $\sqrt{-2}$*, sarà* $\log -2 = \log \sqrt{-2} + \log \sqrt{-2}$*. Dunque* $\log \sqrt{-2}$ *è metà di* $\log -2$*.*

Bernoulli non solo non trova nel ragionamento di Leibniz elementi incompatibili con l'esistenza dei logaritmi di numeri negativi ma nella successiva lettera dell'11 novembre passa al contrattacco proponendo una costruzione dei due rami della curva logaritmica, basata sul legame tra logaritmi ed area sottesa da un'iperbole equilatera. Su un punto è d'accordo con Leibniz: non è possibile ottenere numeri negativi in una progressione geometrica che, partendo dall'unità, abbia ragione positiva. Con questo egli accetta che non esistano *simultaneamente* logaritmi di numeri positivi e negativi. Ciononostante, nulla vieta di costruire una progressione geometrica che parta da -1 e sia formata da termini negativi e ricavare ancora che $+n$ e $-n$ hanno lo stesso logaritmo. Di questo Bernoulli crede di fornire una dimostrazione geometrica considerando i due rami PQG e pqg di un'iperbole equilatera e costruendo la curva logaritmica per punti, sfruttando il legame tra logaritmi ed area sottesa da un arco di iperbole. Fissato come punto di riferimento il punto P dell'iperbole (Fig. 7.7, l'area dei settori come $SQPR$ e $EGPR$ cresce sempre più man mano che la retta EG si avvicina all'asintoto OT, visto che il logaritmo tende all'infinito. Il punto cruciale è quello seguente. Nulla impedisce di far passare la retta EG lungo il ramo pqg dell'iperbole. L'area di $egXT \cup OTPR$ è composta da una parte infinita e positiva e da una infinita negativa. Tuttavia, preso e tale che $TE = Te$, le parti infinite *si elidono* e resta l'area $EGPR$. Se ora si prende r sul ramo di iperbole pqg tale che $rT = TR$ Bernoulli conclude che le aree sottese da $EGPR$ ed $egpr$ sono uguali e dunque $\log(x) = \log(-x)$. Al contrario, il punto debole del ragionamento è proprio avere assunto $+\infty - \infty = 0$: curiosamente, negli attacchi rivolti da molti matematici all'argomento bernoulliano, questa obiezione non fu mai mossa.

Testo 7.2 (J. Bernoulli I) (pp.898–900 di [2]). Originale 7.10

Ho letto con attenzione il tuo foglio sui logaritmi dei numeri negativi ma direi, con tua buona pace, di non averci trovato nulla che ne dimostri l'impossibilità. Da tutte le tue argomentazioni segue solo questo, che non è possibile

passare da una serie di numeri positivi ad una di numeri negativi, cioè che presa l'unità (+1, appunto) come inizio della serie numerica non si può trovare in essa alcun numero negativo e che dunque in questo caso non sono ammessi logaritmi di numeri negativi: non lo nego. Ciò però non impedisce che dei numeri negativi possano formare una loro serie particolare che inizi dall'unità negativa (-1, appunto) e così tutto ciò che avrai dimostrato per i logaritmi dei numeri positivi varrà allo stesso modo per i logaritmi di numeri negativi. Per dirla in una parola, ogni numero positivo ed il suo negativo hanno lo stesso logaritmo, ovvero Log. di +n=log.-n: ciò che ti dimostrerò di nuovo e spero che questa volta non avrai più niente in contrario, bastandomi per questo di fare vedere che la curva logaritmica ABC ne ha un'altra opposta $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 7.6) ad essa coniugata rispetto all'asintoto comune LMN, e questi due rami sono da ritenersi appartenenti alla stessa curva come due rami di iperbole non dànno luogo se non ad una sola curva: seguirà da ciò (preso AL come +1 ed αL come -1) che LM, LN ecc. sono i logaritmi sia dei numeri positivi MB, NC ecc. che dei numeri negativi $M\beta$, $N\gamma$ ecc.

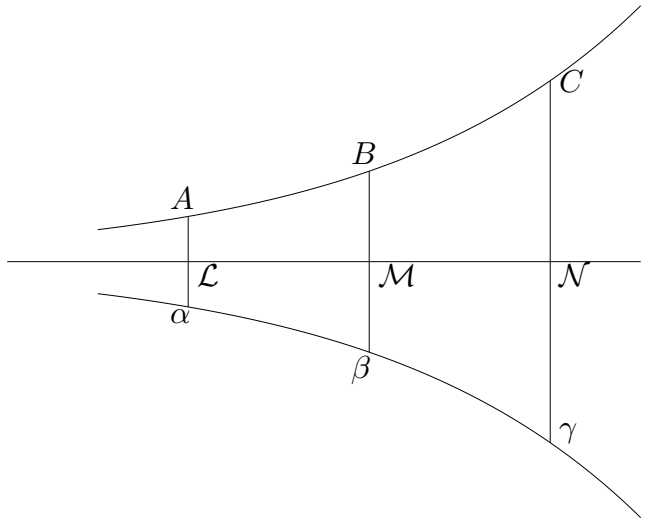

Figura 7.6: Schizzo dei due rami della curva logaritmica di Bernoulli, simmetrici rispetto all'asintoto comune LMN (lettera dell'11 novembre 1712).

Ciò si dimostra facilmente se riflettiamo su un certo modo di generare la curva logaritmica che rende evidente la presenza di due rami con un asintoto comune. Consideriamo per questo l'iperbole PQG ed il ramo opposto pqg, gli asintoti ortogonali Rr ed OX che si intersecano in T: preso un segmento arbitrario fissato PR come primo estremo e condotti dai punti S, E, s, e ecc. situati sopra e sotto l'asintoto OX i segmenti SQ, EG, sq, eg, ecc. e prese su questi dei segmenti SF, EH, proporzionali alle aree iperboliche RSPQ, REGP, vale a dire che $SF \times C$=area SP e $EH \times C$= area EP, è evidente che la curva RFH così

ottenuta sarà quella logaritmica. (Fig. 7.7)

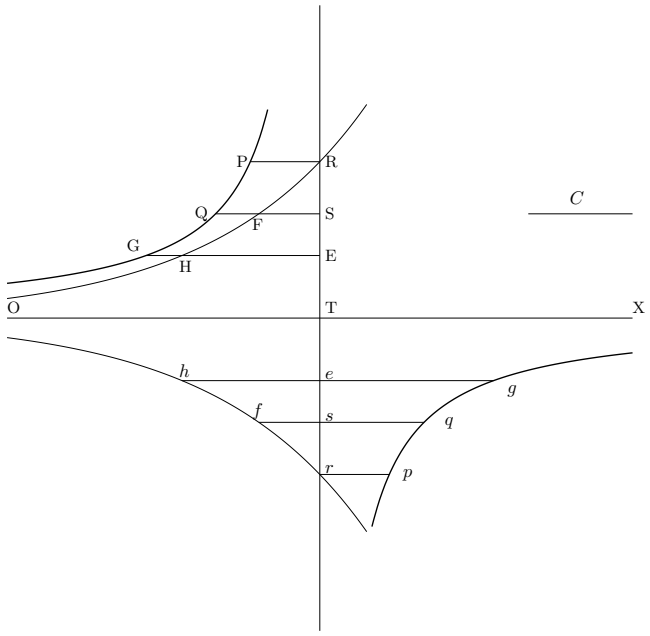

Figura 7.7: La "dimostrazione" geometrica dell'uguaglianza $\log(+x) = \log(-x)$ proposta da Bernoulli (lettera dell'11 novembre 1712). I rami dell'iperbole sono in tratto più largo dei rami della curva logaritmica.

Rivolgiamoci a tale generazione e proseguiamo fin dove possibile. È chiaro in primo luogo che al crescere di RS crescerà SF finché, quanto S tende a T, l'area iperbolica Tp diventa infinita e così anche il segmento TO cui tende SF diventa infinito e pertanto è un asintoto della curva logaritmica. Ma (chi lo può impedire?) il punto S prosegua fino a giungere in e; si vede ora che l'area iperbolica che compete ad Re è in parte infinita e positiva (TP), in parte infinita negativa (Tg) e precisamente = TP − Tg=(preso TE=Te) EP; ed i segmenti EH ed eh sono uguali; similmente, se il punto mobile giungerà nel suo moto ad s cosicché TS = Ts si avrà sf = SF; perciò nasce una nuova curva logaritmica hfr che, con la precedente HFR forma un'unica curva, RFXOhfr appunto, come le due iperboli opposte PQG e pqg formano una sola curva, appunto PQGOXgpq. Infatti entrambi i rami RFH ed hfr sono ottenuti con la medesima legge cosicché i segmenti SF, EH dapprima crescono fino a diventare di lunghezza infinita TO e poi, allo stesso modo diminuiscono a partire dal valore infinito TO verso eh, sf ecc. Presi pertanto TR come unità positiva e Tr come unità negativa EH SF esprimono i logaritmi di numeri positivi, ed i segmenti eh, sf uguali ai precedenti esprimono i logaritmi dei numeri Te, Ts che, a dispetto degli altri TE, TS, sono negativi. È dunque vero che un unico logaritmo corrisponde a due numeri uguali, uno positivo, l'altro negativo, cioè log. +n=log. -n. Q.E.D.

Quasi a volere rifiatare dopo le dense note appena scambiate, la lettera di Leibniz del gennaio 1713 (*initio anni 1713*) serve a fissare i punti condivisi e a ribadire gli argomenti più forti a favore della propria tesi.

Non voglio null'altro rispetto a quanto mi concedi, cioè che non sia possibile per i logaritmi un passaggio da una serie di numeri positivi ad una di numeri negativi. E così se nell'equazione generale $2^e = x$ *è* $e = 0$ *quando* $x = 1$ *ed* $e = 1$ *quando* $x = 2$ *non è possibile assegnare* e *quando* $x = -1$. *Non penso ad altro logaritmo rispetto a quello compreso da quell'equazione.*[9] (p. 901 di [2])

Degno di nota ci appare il riferimento ai logaritmi ammissibili come i valori e che soddisfano l'equazione $2^e = x$ per x assegnato, che ancora salda i concetti di logaritmo ed esponenziale. Nella sua risposta datata 28 febbraio 1713, Bernoulli dichiara che non vi è nulla di straordinario nell'impossibilità di definire il logaritmo del medio proporzionale tra un numero positivo ed uno negativo, come in una curva del tipo indicato in Figura 7.8, simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, dove GH che è medio proporzionale tra i numeri positivi BC e DE. Benché GH non può essere medio proporzionale tra BC e $DF = -DE$, la curva passa per F. Una tale proprietà è condivisa dalla curva logaritmica con i suoi rami simmetrici. Bernoulli concede a Leibniz che, posto $x = 1$ in $2^e = x$ con $e = 0$ e $x = 2$ con $e = 1$ non c'è spazio per logaritmi di numeri negativi. Ma per lui nulla vieta di *supporre* che ad $x = -1$ corrisponda $e = 0$ e di conseguenza far corrispondere un valore di e ad ogni numero negativo.

Se tu non sostieni nient'altro che l'impossibilità di un passaggio per i logaritmi da una serie di numeri positivi ad una di numeri negativi, cioè che, ad esempio, non si può ricavare il logaritmo del medio proporzionale tra un numero positivo ed uno negativo, non è davvero cosa straordinaria che non valga per le ordinate di una curva che abbia due parti opposte. Sia EAF, (Fig. 7.8) una curva siffatta, di asse AD e siano BC e DE due ordinate positive e DF un'altra ordinata negativa. Presa dunque l'ascissa AG che corrisponde al medio proporzionale tra BC e DF, non si potrà negare che alla medesima ascissa BD corrispondono due segmenti DE, positivo, e DF, negativo. Non diversamente succede per i logaritmi: se si prendono i logaritmi come ascisse ed i numeri corrispondenti come ordinate sulla curva logaritmica. Infatti, nelle mie ultime lettere mostrai che davvero la curva logaritmica ha due rami situati da parti opposte rispetto all'asse cosicché allo stesso logaritmo corrispondono due ordinate ovvero due numeri, uno positivo e l'altro negativo. E ciò è quanto sembravi voler negare, ovvero che i numeri negativi hanno logaritmo. Ciò riguarda in verità quanto dici, che se nell'equazione generale $2^e = x$ *si chiede che sia* $e = 0$ *quando* $x = 1$ *ed* $e = 1$ *quando* $x = 2$, *non si può assegnare* e *quando* $x = -1$, *ciò che è vero sotto quell'ipotesi arbitraria; supponendo però (come è lecito fare) che* $e = 0$ *quando* $x = -1$, *si può far corrispondere un valore di* e *quando* x *è un numero negativo, proprio come volevo.*[10] (p. 902 di [2])

[9] Nihil aliud revera nolo, quam quod concedis, non dari transitum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum. Atque ita si sit aequatio generalis $2^e = x$, posito in casu $x = 1$, fore $e = 0$, et in casu $x = 2$, fore $e = 1$, non posse assignari e, cum

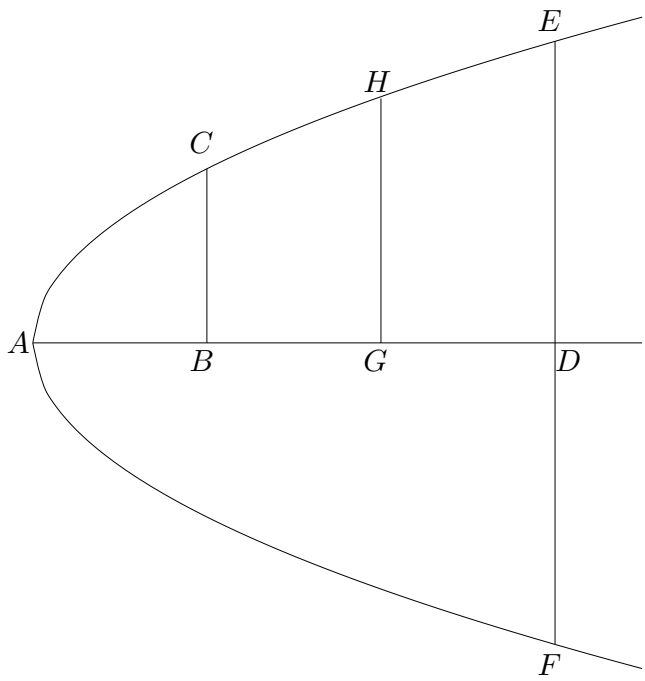

Figura 7.8: Curva con due rami simmetrici allegata da Bernoulli alla lettera del 28 febbraio 1713.

Leibniz cerca di sfruttare l'appiglio concessogli da Bernoulli per mostrare l'inammissibilità della posizione $x = -1$ ed $e = 0$ nell'equazione $2^e = x$. Nella lettera del 26 aprile 1713 egli sciorina cinque argomenti basati ancora sull'estensione di proprietà algebriche dei logaritmi di numeri positivi a logaritmi di numeri negativi. Per prima cosa, siccome $2 \cdot 0 = 0$ e $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$, posto $2^0 = -1$

$x = -1$. Neque ego alium Logarithmum cogito, quam qui tali aequatione comprehendi potest.

[10]Si nihil aliud contendis, quam non dari transitum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum, hoc est, non posse ex. gr. sumi logarithmum medii proportionalis inter numerum affirmativum et alium negativum, hoc certe nihil extraordinarii est, quod non competat applicatis cujuscunque curvae duas partes oppositas habentis. Sit enim talis curva EAF, cujus axis AD, duae applicatae affirmativae BC et DE, aliaque negativa DF. Datur sane abscissa AG, respondeat mediae proportionali inter BC et DF, etsi interim negari non possit, eandem abscissa AD respondere utrique applicatae, et affirmativae DE et negativae DF. Haud secus se res habet in numeris eorumque Logarithmis: numeri namque designantur per applicatas Logarithmicae, et eorum logarithmi per abscissas. Jam vero in novissimis meis ostendi, Logarithmicam revera habere duas partes oppositas ab utroque axis latere, ita ut eidem abscissae, hoc est, eidem logarithmo, duae respondeant applicatae, seu duo numeri, affirmativus unus, alter negativus. Atque hoc est quod negare videbaris, numeros scilicet negativos habere logarithmos. Quod vero attinet ad id, quod dicis: si sit aequatio generalis $2^e = x$, posito in casu $x = 1$, fore $e = 0$, et in casu $x = 2$, fore $e = 1$, non posse assignari e, cum $x = -1$, hoc quidem verum est in illa suppositione, quae est arbitraria, sed si supponatur (sicuti supponere licet) in casu $x = -1$, fore $e = 0$, potest utique assignari e, cum x=numero negativo. Et hoc est, quod ego volui.

seguirebbe che numeri positivi, negativi ed immaginari hanno lo stesso logaritmo in quanto $\log -1 = 0$ implica $2\log -1 = \log(-1)^2 = \log(1) = 0$ e $\frac{1}{2}\log(-1) = \log\sqrt{-1} = 0$. Inoltre (secondo argomento), la quantità 2^0 risulterebbe avere un'infinità di valori: ± 1, $\sqrt[2n]{-1}$, cosa inammissibile per Leibniz.

A parte questo (terzo argomento), il transito tra numeri positivi e negativi accadrebbe ponendo $x^e = -2$ in quanto $x^{2e} = +4$, contraddicendo un punto su cui anche Bernoulli era d'accordo. Ammettere i logaritmi dei numeri negativi (quarto argomento) trascina con sé l'assurdo (per Leibniz) di far corrispondere logaritmi positivi a numeri immaginari. Infine, con il supporre $2^0 = -1$ si contraddirebbe l'incompatibilità—condivisa da Bernoulli— delle equazioni $2^e = 1$ e $2^e = -1$ in quanto, come visto nel primo argomento, la scelta di $e = 0$ per soluzione di $2^e = -1$ è compatibile con $2^e = 1$, sempre per $e = 0$.

Testo 7.3 (Leibniz) (p. 902 di [2]). Originale 7.11

Vedo che sei d'accordo con me nel dire che se si suppone che $e = 0$ risolva l'equazione generale $2^e = x$ quando $x = 1$ e che $e = 1$ la risolva quando $x = 2$ [ad esempio], allora segue che non si può far corrispondere un valore di e quando $x = -1$. Però aggiungi che questa ipotesi a favore dei logaritmi di numeri positivi è arbitraria perché, ferma restando l'equazione generale $2^e = x$, si potrebbe supporre che $e = 0$ la risolva quando $x = -1$. Lasciando stare il fatto che la prima ipotesi è più naturale, occorre considerare senza dubbio per vero che 1° nel secondo caso succede che il logaritmo di una quantità positiva, negativa ed impossibile è sempre lo stesso. Infatti, siccome il doppio e la metà di 0 è 0, 0 sarà il logaritmo tanto di -1 che del suo quadrato +1 e della sua radice quadrata $\sqrt{-1}$. 2°. Da ciò seguirebbe a maggior ragione che 2^0 non sarebbe una quantità assegnata, ma che avrebbe infiniti significati visto che non sarebbe solo $2^0 = -1$, come si è supposto, ma anche $2^0 = +1$ ed $= \sqrt[2]{-1}$ ed $= \sqrt[4]{-1}$ e $+\sqrt[8]{-1}$ e così via all'infinito. E dunque, a meno di non concludere che 2^0 è una quantità ambigua, tutti questi numeri dovrebbero coincidere. Se però poniamo fin dall'inizio $2^0 = 1$, non succederà nulla di tutto ciò perché ogni potenza o radice di 1 è 1 mentre non è vero che ogni potenza o radice di -1 è -1.

3°. Grazie all'ipotesi che i numeri negativi abbiano un logaritmo succede anche il passaggio da numeri positivi a numeri negativi e viceversa. Infatti, raddoppiando il logaritmo di un numero negativo otterrai il logaritmo del quadrato da un numero positivo: ad esempio, se $x^e = -2$ sarà $x^{2e} = +4$; ma tu stesso rifiuti questo passaggio, dalla natura della curva.

Inoltre 4°. Accettati i logaritmi dei numeri negativi avrai anche logaritmi possibili di numeri impossibili, che sono poi le metà dei logaritmi di numeri negativi; se però ammetti logaritmi solo per numeri positivi non succederà mai di avere logaritmi possibili (reali) di numeri impossibili (immaginari).

Infine 5°. Accettata l'esistenza dei logaritmi per numeri negativi si avrà una conseguenza che avevi ammesso essere falsa. Infatti, hai ammesso fin dall'inizio che $2^e = 1$ e $2^e = -1$ sono incompatibili, per quanto riguarda l'assegnazione di e. Se però ammetti per ipotesi che $2^0 = -1$ si avrà anche $2^0 = 1$. Dunque $2^e = 1$ e $2^e = -1$ sono compatibili prendendo $e = 0$ contro l'ipotesi.

Vedi da tutto questo che l'esistenza dei logaritmi di numeri negativi non solo è poco naturale ed inutile ma anche inammissibile. Ciò segue anche, come dissi altrove, dal fatto che non sono ammissibili proporzioni tra quantità negative e che non si può affermare che -1 sta ad +1 come +1 sta a -1, anche se il prodotto degli estremi uguaglia quello dei medi, perché la base dell'uguaglianza di due rapporti sta nella similitudine, che qui non c'è. Infatti non so come possa +1 stare a -1 come -1 sta a +1 quando nel primo rapporto il magggiore sta al minore mentre nel secondo il minore sta al maggiore. Dunque, anche se è vero che le due frazioni $\frac{+1}{-1}$ *e* $\frac{-1}{+1}$ *sono uguali, queste frazioni non sono veri rapporti, anche se possiamo indicarli per il loro tramite. Da questo si capisce che sono stati dimenticati alcuni dei fondamenti dell'analisi.*

Con la risposta di Bernoulli del 7 giugno 1713, la controversia si avvia al suo epilogo. Qui Bernoulli risponde punto per punto alle cinque obiezioni di Leibniz, contestando l'impianto dimostrativo che fa ricorso alle proprietà algebriche dei logaritmi che sono valide solo per argomenti positivi. Nel dettaglio, egli afferma che, preso un numero a, $\frac{1}{2}\log(a)$ è il logaritmo di un numero b che è medio proporzionale tra l'unità (positiva o negativa) ed a, cioè del numero tale che $\pm 1 : b = b : a$ che è $b = \pm\sqrt{a}$ o $b = \pm\sqrt{-a}$ a seconda che la proporzione parta da $+1$ o da -1. Inoltre, $2\log a$ è il logaritmo di un numero c che è terzo proporzionale tra l'unità (positiva o negativa) ed a e dunque soddisfa la proporzione $\pm 1 : a = a : c$. Solo se si parte da $+1$ si ha $c = a^2$ mentre partendo da -1 si arriva a $c = -a^2$. Pertanto, poiché -1 è terzo proporzionale tra -1 e -1, segue che $\log -1 = 2\log 1 = 0$; d'altra parte il medio proporzionale tra -1 e -1 è $\sqrt{-1 \times -1} = \pm\sqrt{+1}$, da cui non segue alcun assurdo. La presunta ambiguità di 2^0 viene negata osservando che, per quanto detto prima $2^0 = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt[4]{-1 \times -1 \times -1 \times -1} = ... = \pm 1$ che non è per nulla assurdo. Grazie a queste distinzioni cadono, secondo Bernoulli, gli altri argomenti di Leibniz. Ad esempio, da $x^e = -2$, cioè $e = \log(-2)$, egli ricava che il logaritmo doppio $2e$ spetta al terzo proporzionale tra -2 e -1, cioè $\frac{-2\times-2}{-1} = -4$ e dunque non c'è transito tra numeri positivi e negativi. Infine da $2^0 = -1$ non segue anche $2^0 = 1$ ma $2^{2\cdot 0}$ è dato da $-1 \times (-1) : -1 = -1$.

Testo 7.4 (J. Bernoulli I) *(pp. 907-909 di [2]).* Originale 7.12

La falsità dello stesso principio (che tu tacitamente presupponi) risiede nel fatto che tu vorresti applicare ai logaritmi dei numeri negativi proprietà che sono vere soltanto per i logaritmi di numeri positivi senza considerare il fondamento da cui sono dedotte per renderti conto subito del motivo per cui l'applicazione ai logaritmi dei numeri negativi non valga. Ma risponderò punto per punto alle tue cinque obiezioni.

Tu dici (1) che l'esistenza di logaritmi di numeri negativi ha per conseguenza che il logaritmo di una quantità positiva, negativa od impossibile è il medesimo, ciò che certamente vale per i logaritmi di numeri positivi e negativi; ammetto infatti che questi abbiano logaritmi in comune ma consideriamo il ragionamento grazie al quale tu concludi che anche una quantità impossibile ha lo stesso logaritmo; tu dici infatti che, dal momento che il doppio e la metà di 0 è 0,

il logaritmo tanto di -1 che del suo quadrato +1 che della sua radice quadrata $\sqrt{-1}$ *sono uguali. Qui non ti accorgi che non è per nulla essenziale per i logaritmi che il doppio di qualche logaritmo sia il logaritmo del quadrato del numero e che metà del logaritmo sia metà del logaritmo del numero; è importante comprendere che il doppio di un logaritmo deve dare il logaritmo di quel numero che è terzo proporzionale geometrico con il primo numero (cioè l'unità, positiva o negativa) e col numero proposto, questo terzo proporzionale coincide con il quadrato del numero proposto solo tra i numeri positivi ma non così tra i negativi. Devi poi considerare che la metà di un certo logaritmo non è assolutamente il logaritmo della radice quadrata, ma piuttosto il logaritmo del medio proporzionale tra il primo numero (cioè l'unità, positiva o negativa) ed il numero proposto che coincide con la radice quadrata tra i numeri positivi, non tra i negativi. Il tuo ragionamento va corretto dicendo che, siccome il doppio e la metà di zero è 0, sarà 0 sia il logaritmo di -1 che quello del terzo proporzionale rispetto a -1 e -1 cioè* $\frac{-1\times-1}{-1} = -1$ *e del medio proporzionale tra -1 e -1, cioè* $\sqrt{-1\times-1} = +\sqrt{+1}$ *o* $-\sqrt{+1}$*; certamente non vi è alcuna conseguenza assurda in questo.*

Tu sostieni 2°. che seguirebbe a maggior ragione che 2^0 *non sarebbe una quantità fissa ma avrebbe infiniti significati, infatti non sarebbe solo* 2^0 *=-1 come ipotizzato, ma anche* $2^0 = +1$ *e* $= \sqrt[2]{-1}$ *e* $= \sqrt[4]{-1}$ *e* $= \sqrt[8]{-1}$*, così via all'infinito per cui se* 2^0 *non fosse una quantità ambigua, tutte queste quantità avrebbero lo stesso valore. Questa seconda obiezione è solo un Corollario della precedente, rimossa la quale cesserà anch'essa. Io nego che si abbia* $2^0 = \sqrt[2]{-1}$*, e* $= \sqrt[4]{-1}$*, e* $= \sqrt[8]{-1}$ *ecc. infatti, si ha solo che* 2^0 *è* $= \sqrt[2]{-1\times-1}$ *e* $\sqrt[4]{-1\times-1\times-1\times-1}$*, e* $\sqrt[8]{-1}$ *ecc. tutte quantità che valgono* $\pm\sqrt{+1}$*, cioè +1, o ciò che qui è ammesso, -1, che non è affatto insolito.*

Veniamo ora al 3° punto. Dall'esistenza di logaritmi per numeri negativi seguirebbe il passaggio da numeri positivi a negativi e viceversa: infatti tu affermi che otterrei dal raddoppio del logaritmo di un numero negativo il logaritmo del quadrato da un numero positivo: ad esempio, da $x^e = -2$ *si avrebbe* $x^{2e} = +4$*; io stesso avrei negato questo passaggio, data la natura della curva logaritmica. In realtà vale sempre la stessa risposta: nego evidentemente che raddoppiando un logaritmo si ottenga il logaritmo del quadrato. Infatti hai visto che da quella moltiplicazione scaturisce il logaritmo del terzo proporzionale rispetto all'unità (positiva o negativa) ed al numero proposto. Dunque, se* $x^e = -2$*, si dovrà concludere che* $x^{2e} = \frac{-2\times-2}{-1} = -4$*, senza alcun transito tra numeri negativi e positivi.*

La medesima risposta vale per la quarta obiezione, quando dici che, ammessi i logaritmi di numeri negativi si avrebbero logaritmi possibili di quantità impossibili, che sono la metà dei logaritmi dei numeri negativi; senza dubbio hai visto nella risposta alla prima obiezione che la divisione per due di un logaritmo non produce (se non per caso) il logaritmo della radice ma quello del medio proporzionale tra l'unità (positiva o negativa) ed il numero proposto, e questo medio proporzionale non è mai impossibile.

Giungiamo finalmente alla 5° obiezione. Ammessa l'esistenza di logaritmi

per i numeri negativi, risulterebbe falso ciò che avevo ammesso esser vero: che $2^e = 1$ *e* $2^e = -1$ *erano incompatibili, mentre lo sarebbero per* $e = 0$. *Ripeti sempre la stessa cantilena che ti ho mostrato essere falsa. Infatti, dall'ammettere che* $2^0 = -1$ *non segue anche che* $2^0 = 1$, *ma solo che* $\frac{-1\times-1}{-1} = -1$. *Dunque ecco superate tutte le tue difficoltà. Sono certo che, se vorrai considerare con un po' di attenzione la cosa, sarai d'accordo con me. Ho voluto risponderti punto per punto perché evitiamo un giorno di litigare su qualcosa di futile.*

Lo scambio epistolare tra Leibniz e Johann Bernoulli sull'argomento volge al termine. I due non sono riusciti a trovare un accordo sul significato da attribuire al medio proporzionale ed al terzo proporzionale quando compaiono numeri negativi [1]. Nelle ultime due lettere da esaminare sentiremo dapprima Leibniz troncare la discussione affermando il proprio disinteresse verso un sistema di logaritmi che non abbia le proprietà algebriche dei logaritmi di numeri positivi. Egli si accontenta di aver convinto l'amico del fatto che, accettata $e = 0$ come soluzione di $2^e = +1$, non sia possibile trovare soluzione (reale) a $2^e = -1$. Egli ritiene logaritmi compatibili con tale conclusione quelli più naturali, non tanto nel senso di consueti, quanto di più semplici. Ecco l'estratto della lettera di Leibniz, datata 28 giugno 1713.

Mi astengo dal discutere le tue nuove obiezioni alla mia teoria circa l'impossibilità dei logaritmi di numeri negativi; mi sembra che la controversia dipenda dal modo in cui ci si esprime. Una cosa è abbastanza chiara, che i logaritmi di quantità impossibili sono impossibili; il doppio di una quantità impossibile è impossibile; infine il logaritmo di un numero è il doppio di quello della sua radice. Non ritengo di dover aggiungere altro. Se tu consideri un altro logaritmo dove queste proprietà non valgono, a me non interessa. Hai ammesso che se da $2^e = x$, *posto* $e = 0$ *segue che* $x = 1$ *non si può poi assegnare un valore ad* e *che renda* $x = -1$. *Questo mi basta, né intendo dire altro quando affermo che non sono ammissibili i logaritmi di numeri negativi e nella mia definizione di logaritmo è compreso il fatto che il logaritmo di un numero è il doppio di quello della sua radice quadrata. Esaminerò le altre tue note. Ritengo non doversi chiamare più naturale qualcosa cui siamo più abituati ma ciò che superiore e più semplice di natura.*[11] (pp. 912-913 di [2])

In risposta, Bernoulli il 29 luglio accondiscende a chiudere la controversia accontentandosi di aver strappato a Leibniz l'affermazione che la scelta di far partire le progressioni geometriche su cui costruire un sistema di logaritmi da

[11] Non vacat nunc discutere, quae meae doctrinae de impossibilitate logarithmorum numeris negativis assignatorum iterum opponis; si quid enim judico, non potest facile hic controversia esse, nisi in modo loquendi. Res ipsa vero satis clara est, impossibilium quantitatum impossibiles esse Logarithmos; et duplum impossibilis impossibile esse; Logarithmum denique numeri esse duplum Logarithmi radicis; plura addi ad sententiam meam necesse non putabam. Si aliter Logarithmum sumes, ut haec locum non habeant, nihil hoc ad me. Concessisti, si sit $2^e = x$, et posito $e = 0$, sit $x = 1$, non posse dari e, posito $x = -1$. Hoc mihi sufficit, nec aliud intelligo, cum dico, non dari Logarithmum negativorum, et in hac mea Logarithmi definitione utique continetur, Logarithmum numeri esse duplum Logarithmi radicis quadraticae. Alias tamen Tuas Annotationes examinabo. Magis naturalem putem appellandum non id, cum magis assueti sumus, sed quod natura prius est et simplicius.

$+1$ è arbitraria e che, scelto -1 come origine delle progressioni, i logaritmi dei numeri negativi sono ammissibili, come egli ritiene aver mostrato con gli argomenti geometrici addotti in precedenza.

Mi sta bene definire i logaritmi come ti pare purché tu non neghi ciò che fin dall'inizio hai concesso, cioè che l'ipotesi di partire dall'unità positiva è del tutto arbitraria e soprattutto che è lecito partire dall'unità negativa, ovvero supporre che $\log -1 = 0$ *da cui segue che tutto ciò che ho scritto sui logaritmi dei numeri negativi nelle mie lettere precedenti procede bene senza che succeda quanto temi, che i logaritmi di quantità impossibili sono possibili. Hai anche visto in qual senso si può affermare che il logaritmo di un numero è doppio di quello della sua radice e come sia poco sconvolgente l'esistenza di due rami di curva logaritmica sullo stesso asse, da te negata all'inizio e da me dimostrata essere vera a partire dalla stessa natura dell'iperbole. Questo solo è quel che volevo. Se tu me lo concedi, acconsento volentieri che tutto il resto è questione di pura definizione.*[12] (pp. 915 di [2])

Il carteggio si chiude senza significativi passi in avanti. I due studiosi restano fermi sulle loro posizioni e ciascuno non è riuscito a trovare argomenti abbastanza forti per convincere l'altro. Leibniz non si occupò più della questione e morì tre anni dopo la fine della controversia. L'intero carteggio fu pubblicato solo nel 1745 e dunque non esercitò un'influenza immediata. Vedremo tra poco come, dall'analisi critica del carteggio tra Leibniz e Johann Bernoulli, Eulero saprà trarre spunti per una innovativa e soddisfacente teoria dei logaritmi in campo complesso. Johann Bernoulli I entrò ancora sull'argomento quindici anni dopo proprio con il giovane Eulero che era stato suo allievo in Svizzera e ne aveva seguito i figli Daniel e Nicolaus a San Pietroburgo.

7.2 Il carteggio tra Johann Bernoulli I ed Eulero (1727-1729)

Lo scambio epistolare cui ci riferiamo in questa sezione ebbe luogo tra il novembre 1727 ed il maggio del 1729. All'epoca Bernoulli ha sessanta anni, mentre Eulero è appena ventenne. Anche questo carteggio non ebbe una eco immediata ed anzi venne pubblicato dallo storico della matematica Gustav Eneström soltanto nel 1902, sulla base degli originali in possesso dell'Accademia delle Scienze di Stoccolma.

[12] Per me licet definire logarithmum pro arbitrio Tuo, modo non neges (quod ab initio concessisti) assumtionem unitatis affirmativae pro primo numero esse mere arbitrariam, adeoque licere unitatem negativam pro primo numero adhibere, ut scilicet supponatur $\log -1 = 0$ quo fit ut omnia, quae de logarithmis numerorum negativorum in anterioribus meis literis scripsi, bene procedant, nec tamen inde, quod metuis, sequatur, impossibilium quantitatum fore possibiles logarithmos. Vidisti quoque, quo sensu verum sit, logarithmum numeri esse duplum logarithmi radicis, et quam parum evertat existentiam duorum Logarithmicorum super eodem axe, a te primo negatam, a me vero ex ipsa Hyperbolae natura postea demonstratam. Hoc autem unicum erat, quod volebam. Id, si mihi nunc concedas, patiar libenter, ut reliqua sint merae definitiones.

Il carteggio sui logaritmi di numeri negativi ebbe inizio da una domanda rivolta da EULERO a BERNOULLI in una lettera datata 5 novembre 1727 in cui riporta di essersi imbattuto per caso nello studio della funzione $y = (-1)^x$ e di avere trovato difficoltà nel tracciarne il grafico in quanto y è ora positiva, ora negativa ed ora immaginaria. Tutto ciò suggerisce ad EULERO che tale grafico non sia rappresentabile da alcuna curva continua.

Mi sono per caso imbattuto in questa equazione $y = (-1)^x$ e mi è sembrato difficile tracciarne la figura in quanto y è ora positivo, ora negativo, ora immaginario; mi sembra che non sia possibile tradurla in una linea continua ma con una serie infinita di punti posti a distanza $= 1$ da ambo le parti dell'asse che tuttavia, messi insieme, coincidono con l'asse.[13] ([4], p. 348)

Nella risposta del 9 gennaio 1728, BERNOULLI ripresenta l'argomento per l'uguaglianza $\log(n) = \log(-n)$ basato sui differenziali tale e quale lo aveva proposto a LEIBNIZ quindici anni prima. Per lui, partendo da $y = (-n)^x$ si ha $\log(y) = x\log(-n)$ e, passando ai differenziali,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \log(-n)\mathrm{d}x = \log(+n)\mathrm{d}x$$

che fornisce $\log(y) = x\log(n)$ da cui, per passaggio agli esponenziali, $y = n^x$. Preso $n = \pm 1$, egli può concludere che $y = (\pm 1)^x = 1$.

Tu chiedi che cosa è $y = (-1)^x$. Ecco la mia risposta: sia

$$y = (-n)^x\,,$$

sarà

$$ly = xl(-n)\,,$$

e dunque

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}\,x\,l(-n)\,.$$

Tuttavia è

$$l(-n) = l(+n),$$

infatti, in generale

$$\mathrm{d}\,l(-z) = \frac{-\mathrm{d}z}{-z} = \frac{+\mathrm{d}z}{+z} = \mathrm{d}\,l(z), \quad \textit{e da qui} \quad l(-z) = l(z);$$

pertanto

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x\,l(+n),$$

ed integrando

$$ly = x\,ln\,,$$

[13] Incidi forsan in hanc aequationem $y = (-1)^x$, qualem ea figuram exhibeat, difficile determinatu videtur, cum y nunc affirmativum, nunc negativum, nunc imaginarium existat, mihi ea videtur non lineam continuam exprimere, sed infinita puncta discretim posita ad distantiam $= 1$ ex utraque axis parte, quae autem simul sumpta aequentur axi.

da cui

$$y = n^x = (quando\ n = \pm 1) \quad 1^x = 1. Dunque\ y = 1.$$

[14] ([4], pp.351-352)

La risposta di EULERO giunge il 10 dicembre del 1728 ed è interessante per molti aspetti. Pur dichiarando di avere argomenti sia a favore che contro l'esistenza di logaritmi per numeri negativi egli comunque affossa l'argomento di BERNOULLI, evidenziando l'impossibilità di dedurre un'uguaglianza tra funzioni a partire da una uguaglianza tra differenziali. Il controesempio è semplicissimo: x ed $x + a$, con a costante, hanno ugual differenziale ma sono funzioni diverse. Pertanto, non è lecito concludere che $l(-x) = l(x) + l(-1)$ se non *dopo* aver dimostrato per altra via che $l(-1) = 0$. Tuttavia l'argomento a favore di $l(-x) = l(x)$ è originale e presenta *in nuce* il germe delle future ricerche di EULERO sui logaritmi di numeri immaginari. Ponendo $z := \log x^2$ si ha $\frac{1}{2}z = \log\sqrt{x^2}$ e siccome $\sqrt{x^2} = \pm x$ sembra che $\frac{1}{2}z$ coincida con $\log x$ e con $\log(-x)$. E procede EULERO: *Si potrebbe obiettare che xx ha due logaritmi, ma chi affermasse questo dovrebbe concludere che ne ha infiniti*[15]. Non vi è nessun altro commento all'affermazione veritiera per cui ad ogni numero vengono associati infiniti logaritmi: EULERO vi ritornerà vent'anni dopo. Nell'argomento di EULERO vi è un altro punto degno di nota [1]: se a è la base del sistema logaritmico adottato egli asserisce che $a^{\frac{1}{2}z} = \pm x$ per cui si stanno assegnando due funzioni: $\frac{z}{2} = \log x$ e $\frac{z}{2} = \log(-x)$. Il problema da risolvere, che non è affrontato a questo stadio, è se le due definizioni possano coesistere per dare luogo ad una teoria non contraddittoria dei logaritmi.

Gli argomenti contrari all'uguaglianza $\log(x) = \log(-x)$ sono due. Se fosse $l(-x) = l(x)$ si avrebbe $-x = x$ ed anche $\sqrt{-1} = 1$, chiaramente assurdo. In via

[14] Quaeris de $y = (-1)^x$, quid illa sit ? Ego sit statuo: sit

$$y = (-n)^x\,,$$

erit

$$ly = xl(-n)\,,$$

adeoque

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}\,x\,l(-n)\,.$$

Est vero

$$l(-n) = l(+n),$$

nam in genere

$$\mathrm{d}\,l(-z) = \frac{-\mathrm{d}z}{-z} = \frac{+\mathrm{d}z}{+z} = \mathrm{d}\,l(z), \quad \text{hinc} \quad l(-z) = l(z);$$

adeoque

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x\,l(+n),$$

et integrando

$$ly = x\,ln\,,$$

unde

$$y = n^x = (\text{in casu quo } n = \pm 1) \quad 1^x = 1. \quad \text{Ergo } y = 1.$$

[15] Posset quidem objici, xx habere duos logarithmos, sed hoc qui asser[ere vult] infinitos adjudicare deberet

cautelativa, egli asserisce che si potrebbe forse obiettare, anche se forse senza successo, che dall'uguaglianza dei logaritmi non segue quella degli argomenti, in linea con quanto appena detto sugli infiniti valori di $\log x$. La contraddizione successiva messa in luce da EULERO è molto più seria e, ironicamente, poggia su un risultato ottenuto dallo stesso BERNULLI nel 1702, quando aveva messo in evidenza il legame tra logaritmi (anche di argomento complesso) e la quadratura di archi di cerchio di raggio a dimostrando che, se x ed y sono il coseno ed il seno dell'angolo al centro sotteso dall'arco, allora

$$\text{area (settore)} = \frac{a^2}{4i} \log \frac{x+iy}{x-iy}\,. \tag{7.1}$$

Ora, assumendo per vera l'uguaglianza $\log(x) = \log(-x)$ ed applicando la formula 7.1 nel caso $x = 0$, si ricava

$$\text{area (quadrante)} = \frac{a^2}{4i} \log(-1)$$

e dunque, per avere $\log(-1) = \log(+1) = 0$ occorrerebbe anche avere $\sqrt{-1} = 0$, altrimenti si otterrebbe l'uguaglianza $1 = 0$. Dunque, l'ipotesi $\log(+x) = \log(-x)$ porta ancora ad un assurdo.

Testo 7.5 (EULERO) (p. 353 di [4]). Originale 7.13

Quanto mi hai da poco scritto sulle potenze di quantità negative risolve certamente il dubbio proposto e mi sono nel frattempo imbattuto in qualche argomento con cui mi sembra di poter dimostrare che $lx = l - x$. Mi si sono presentati anche argomenti che mi portano a concludere l'opposto e non so assolutamente quale seguire. Oltre agli argomenti che tu hai proposto vi è forse anche questo. Sia $lxx = z$, sarà

$$\frac{1}{2}z = l\sqrt{xx}\,,$$

ma $\sqrt{xx}$ è sia $-x$ che $+x$ per cui $\frac{1}{2}z$ è lx e $l-x$. Si potrebbe obiettare che xx ha due logaritmi, ma chi lo volesse sostenere dovrebbe concludere che ve ne sono infiniti. La motivazione però che i differenziali lx ed [$l-x$ sono] uguali, mi sembra dimostri meno l'uguaglianza di lx e $l-x$ dal momento che dall'uguaglianza di due differenziali non è permesso di concludere l'uguaglianza degli integrali, come $a+x$ non è uguale ad x, benché i loro differenziali lo siano. Questo caso è simile al nostro dove infatti $l-x = lx + l - 1$ che mostra come non sia lecito concludere che lx ed $l-x$ sono uguali se non dopo aver dimostrato che $l-1$ è 0. Vi sono poi questi argomenti contrari che portano all'assurdo. Se infatti fosse $lx = l - x$ si avrebbe $x = -x$ e $\sqrt{-1} = 1$. Si potrebbe obiettare, ma non so con quale esito, che dall'uguaglianza dei logaritmi non si può passare a quella dei numeri. Ed ancora valgono i miei dubbi sulla curva $y = (-1)^x$. Ammesso allora che non si ha $x = -x$ anche se $lx = l - x$, temo però che un simile principio applicato al calcolo tragga in errore. Sia infatti a il raggio di un cerchio a, y un seno, x un coseno; grazie al tuo metodo che riduce la quadratura del cerchio a

logaritmi, l'area del settore è

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} ,$$

e posto $x = 0$ *si otterrà che il quadrante di un cerchio è*

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l - 1 .$$

Se fosse $l - 1 = 0$, *dovrebbe anche essere* $\sqrt{-1} = 0$ *e dunque* $1 = 0$. *Non ho alcuna idea di come liberarmi da queste contraddizioni per cui, illustre signore, vorrei sapere che cosa ne pensi tu.*

Lo scambio epistolare sull'argomento ha così toccato il punto saliente. La risposta di Bernoulli del 18 aprile 1729 e la successiva replica di Eulero del 16 maggio non aggiungono molto. Bernoulli pensa che Eulero abbia inteso $l(-x)$ invece di $l - (x)$ che a suo dire vanno tenuti distinti in quanto $l - (x)^{\frac{1}{2}}$ è reale, mentre $l(-x^{\frac{1}{2}})$ è immaginario. Che cosa Bernoulli intendesse non fu chiaro ad Eulero, né a commentatori successivi quali Cajori [1]. Anche la difesa dall'attacco di Eulero sul fronte dell'espressione logaritmica di un settore circolare non è troppo chiara. Bernoulli afferma che ogni volta in cui l'espressione

$$\frac{a^2}{4i} \log \frac{x + iy}{x - iy}$$

si annulla, occorre aggiungere una quantità costante nQ, con Q area di un quadrante ed n un numero intero. In questo caso, Bernoulli confonde ancora integrali definiti ed indefiniti.

Testo 7.6 (J. Bernoulli I) (pp.359-361 di [4]). Originale 7.14

(...) Ho già in parte risposto nelle lettere consegnate a mio figlio dove gli ho mostrato che i vostri dubbi (infatti anche lui ha simili dubbi sui logaritmi immaginari) sorgono soltanto per un concetto inadatto alla natura dei logaritmi di quantità negative e ho detto che, nel porre (e davvero correttamente)

$$lx = l - x ,$$

bisogna intendere

$$l - (x) ,$$

e non

$$l(-x) ,$$

mentre voi confondete entrambe le cose che sono molto diverse tra di loro perché, ad esempio,

$$l - (x)^{\frac{1}{2}}$$

è reale ma

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

è immaginario. Tenendo ben presente questo tutte le vostre difficoltà e singolari deduzioni svaniscono. Per quanto poi riguarda la piccola obiezione mossa a partire dall'area di un settore circolare espressa tramite i logaritmi, laddove si ponga il seno $= y$ *ed il coseno* $= x$ *si trova con il mio metodo di riduzione ai logaritmi della quadratura del cerchio che l'area del settore è*

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} ,$$

e come ho già similmente ricordato a mio figlio, nel caso in cui

$$x = 0$$

quest'area veramente è soltanto $= 0$ *mentre dovrebbe essere uguale al quadrante; da ciò non si deve concludere altro se non che occorre aggiungere all'espressione*

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

la quantità costante nQ*, cioè un multiplo del quadrante poiché è evidente che il seno ed il coseno si scambiano tra loro e non in un modo solo, ma in infiniti modi può succedere che*

$$x = 0 \quad \text{ed} \quad y = 1 ,$$

o viceversa

$$x = 1 \quad \text{ed} \quad y = 0 ;$$

e succede che, preso questo settore pari a $1Q$ *o* $2Q$ *o* $3Q$ *ecc. o anche* $= 0Q$*, non vi sia pertanto alcun motivo per cui*

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

possa esprimere uno piuttosto che l'altro; preferisco dunque dire che l'area del settore in generale va presa come

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ ,$$

cosicché ogni volta in cui il primo termine parte da zero ciò che manca possa essere rimpiazzato da nQ*, cioè da un multiplo od un sottomultiplo del quadrante a seconda delle necessità; tu sempre troverai differenziando il differenziale del tuo settore che è*

$$\frac{aa\mathrm{d}x}{2\sqrt{aa - xx}} ,$$

come deve. Nel caso del semiquadrante, dove

$$x = y = \sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

avrai ancora che il primo termine è =0 ma, se preferisci,

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}\,,$$

per cui occorre aggiungere $\frac{1}{2}Q$*; ma un uso migliore di queste espressioni immaginarie si ottiene da sviluppi in serie nei quali senza dubbio i termini immaginari si elidono. Basta così.*

Con la risposta di Eulero del 16 maggio 1729 si chiude lo scambio epistolare per quel che riguarda i logaritmi immaginari. Altre lettere seguiranno in cui però saranno solo trattati la soluzione generale delle equazioni differenziali di secondo ordine e la determinazione della geodetica tra due punti posti su una assegnata superficie. Eulero glissa sulla distinzione tra $l-(x)$ ed $l(-x)$, dichiarando solo di non averla compresa. Quanto all'aggiunta del termine nQ per salvare la formula della quadratura del cerchio tramite logaritmi, egli si dichiara sorpreso perché pensava di aver già usato la costante nel momento in cui l'area viene espressa dalla formula (7.1). Il termine nQ pare non aver alcun senso se n eccede quattro, visto che dopo aver percorso quattro quadranti si è descritto l'intero cerchio. Se però n può assumere, come intende Bernoulli, anche il valore $1/2$ allora perché non prendere $n = 1/4$ o qualunque altro numero; così facendo però il termine $\frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ diverrebbe inessenziale visto che, aggiustando n, il solo termine nQ può bastare ad esprimere l'area di un qualsiasi settore circolare. Visto il numero di contraddizioni, meglio fermarsi prima di incorrere in un paralogismo, ragionamento all'apparenza rigoroso che in realtà presenta un difetto logico di fondo.

Ciò che scrivi in principio sui logaritmi immaginari, non mi è del tutto chiaro, soprattutto non capisco la differenza che fai tra $l-(x)$ *et* $l(-x)$*, né quale calcolo occorra per giungere ad uno o all'altro di questi logaritmi. Inoltre credevo che la costante di integrazione fosse già inserita nell'espressione del settore circolare* $\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ *dal momento che per* $x = 0$ *si ha un'area nulla. Quindi, se bastasse solo aggiungere* nQ*, cosa che non capisco ancora, mi sembra però che* n *non possa indicare alcunché, se non è un multiplo di quattro. Se infatti* n *potesse essere* $\frac{1}{2}$*, potrebbe essere anche* $\frac{1}{4}$ *e rappresentare ogni numero per cui sarebbe superfluo impiegare anche* $\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ *per esprimere il settore dal momento che il solo* nQ *sarebbe sufficiente a rappresentare qualunque settore. Sia come sia, mi sembra bene fermarci per non cadere, tu con le tue idee, noi con le nostre, in qualche paralogismo.*[16] ([4], p.365)

[16] Quod primo scribis de logarithmis imaginariis, id mihi nondum satis est perspicuum, praecipue discrimen, quod ponis inter $l-(x)$ et $l(-x)$ nondum perspicere possum, neque quo calculo ductum ad unum potius horum logarithmorum, quam ad alterum pervenire oporteat. Praeterea expressio sectoris circularis $\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ debita constante jam mihi videtur esse aucta, cum facto $x = 0$ exhibeat sectorem evanescentem. Deinde si modo, nQ adjici deberet, id quod vero nondum perspicio, n mihi praeter multiplum quaternarii nihil denotare posse videtur. Sin vero n, $\frac{1}{2}$ esse potest, poterit quoque $\frac{1}{4}$ et onmnes numeros significare, unde

7.3 EULERO legge il carteggio LEIBNIZ-BERNOULLI

Il carteggio contenente la controversia tra LEIBNIZ e Johann BERNOULLI sui logaritmi dei numeri negativi fu pubblicato solo nel 1745 e infiammò il mondo matematico che si divise in opposte fazioni. EULERO fu un attento lettore del carteggio e riportò gli argomenti addotti dai due matematici a sostegno delle proprie tesi, facendo seguire all'esposizione una critica serrata. Il suo commento è contenuto in due lavori datati 1747 e 1749. Il primo di questi lavori apparve postumo solo nel 1862 mentre il secondo, su cui concentriamo l'attenzione, venne pubblicato nel 1751 [5].

La prima parte di quest'ultimo lavoro è dedicata all'esposizione critica della controversia e la seconda alla definizione dei logaritmi per numeri negativi ed immaginari, sviluppando l'idea già abbozzata nel suo carteggio con BERNOULLI vent'anni prima. Nell'introduzione EULERO descrive l'imbarazzo che la controversia genera tra i matematici i quali sono abituati a dispute nell'ambito della matematica *applicata* ma non nel campo della matematica pura, dove la verità o la falsità di una proposizione dovrebbe essere sempre dimostrabile.

Benché la teoria dei logaritmi poggi su basi tanto solide che le verità che essa racchiude sembrano dimostrate con lo stesso rigore di quelle della geometria, ciononostante i matematici sono ancora molto divisi sulla natura dei logaritmi dei numeri negativi ed immaginari: e la ragione apparente per cui questa controversia non è molto agitata è che non si è voluto rendere sospetto tutto ciò che deriva dalle parti pure della matematica, mettendo sotto gli occhi di tutti le difficoltà e le stesse contraddizioni che affliggono le opinioni dei matematici sui logaritmi dei numeri negativi ed immaginari. Infatti, benché sia naturale che le loro opinioni possano essere molto diverse sugli argomenti che riguardano la matematica applicata dove i modi diversi di descrivere gli oggetti e di ricondurli ad idee precise possono dar luogo a vere controversie, si è finora preteso che le parti pure della matematica fossero del tutto scevre di argomenti di disputa, non essendoci null'altro che dimostrarne la verità o la falsità.

Siccome la teoria del logaritmi appartiene senza dubbio alla matematica pura, si rimarrà molto sorpresi nel sapere che è stata sinora terreno di controversie tanto confuse che, qualunque partito uno prenda, cade sempre in contraddizioni da cui sembra impossibile risollevarsi. Tuttavia, se la verità deve stare in piedi ovunque, non c'è dubbio che per quanto conclamate possano apparire, queste contraddizioni non possono che essere apparenti e che non dovrebbero mancare gli strumenti per salvare la verità, anche se non sappiamo affatto dove procurarceli.[17] ([5], pp.139-140)

---

superfluum est etiam $\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ adhibere, ad sectorem exprimendum, cum solum nQ sufficiat ad sectorem quemvis repraesentandum. Quicquid autem sit, res ita mihi se habere videtur, ut neque tu ex tuo conceptu, neque nos nostro hac in re in paralogismum incursuri simus.

[17] Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie, que les vérités, qu'elle renferme, semblent aussi rigorousement demontrées que celles de la Geometrie; les Mathematiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs & imaginaires: & quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, la raison en est ap-

Eulero passa in rassegna l'opinione di Bernoulli e le obiezioni di Leibniz cui ne aggiunge di proprie. In particolare, all'argomento

$$\mathrm{d}l\,x = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{-\mathrm{d}x}{-x} = \mathrm{d}l\,-x$$

da cui Bernoulli deduce l'uguaglianza $l\,x = l\,-x$ Eulero contrappone la stessa critica che gli aveva mosso vent'anni prima: non è lecito concludere l'uguaglianza di due funzioni dalla uguaglianza dei loro differenziali.

Senza cambiare il ragionamento con cui il Sig. Bernoulli voleva dimostrare che $l\,x = l\,-x$ a partire dall'uguaglianza dei differenziali, si dimostrerebbe anche che $l\,2x = l\,x$; infatti, il differenziale di $l\,2x$ è $\frac{2\mathrm{d}x}{2x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, proprio come quello di $l\,x$. E dunque, se il ragionamento del Sig. Bernoulli fosse corretto ne conseguirebbe che non solo $l\,x = l\,-x$ ma anche che $l\,2x = l\,x$ ed in generale che $l\,nx = l\,x$, per qualunque numero n; conseguenza questa che lo stesso Sig. Bernoulli non accetterebbe mai. Ora, si sa che, quand'anche i differenziali di due quantità sono uguali, non segue altro che queste quantità variabili differiscono tra loro per una costante; e non sarebbe lecito concluderne l'uguaglianza. Così anche se il differenziale di $x+a$ è $= \mathrm{d}x$ come quello di x, la conseguenza sarà certamente falsa, a meno di voler concludere che $x+a = x$. È perciò chiaro che i differenziali di $l\,-x$ e di $l\,+x$ sono entrambi $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, le quantità $l\,-x$ ed $l\,+x$ non potranno differire che per una costante, come segue anche in modo altrettanto evidente dal fatto che $l\,-x = l\,-1+l\,x$. E si comprende dunque facilmente che, siccome $l\,nx = l\,x + l\,n$, il differenziale di $l\,nx$ deve essere uguale al differenziale di $l\,x$. È vero che il Sig. Bernoulli suppone $l\,-1 = 0$, così come è $l\,1 = 0$, cosicché seguirà che $l\,-x = l\,x + l\,-1 = l\,x$. Ma siccome ciò è proprio quanto il Sig. Bernoulli vuole dimostrare con questo ragionamento, si vede bene che questa ipotesi è inammissibile.[18] ([5], pp. 143-144)

---

paremment, qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce, qu'on avances dans les parties pures de la Mathematique, en developant devant les yeux de tout le monde les difficultés, & meme les contradictions, auxquelles les sentiments des Mathematiciens sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentiments puissent étre fort differens sur les questions, qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverses manieres d'envisager les objets & de les ramener à des idées precises, peuvent donner lieu à des controverses réélles; on a toutjours prétendu, que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout sujet de dispute, & qu'il ne s'y trouvoit rien, dont on ne fut en état de démontrer, ou la vérité ou la fausseté.

Commes la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathematique pure, on sera bien surpris d'apprendre, qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellements embarrassées, que de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions, qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependent si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent etre qu'apparentes, & qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la verité, quoique nous ne fachions point, de quel endroit nous puissons tirer ces moyens.

[18] Mr. Bernoulli voulant prouver par l'egalité des differentiels, qu'il etoit $l\,x = l\,-x$, prouveroit par le méme raisonnement que $l\,2x = l\,x$; car le differentiel de $l\,2x$ est $\frac{2\mathrm{d}x}{2x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, tout comme celui de $l\,x$. Et partant, si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l\,x = l\,-x$, mais aussi que $l\,2x = l\,x$ & en général que $l\,nx = l\,x$, quelque nombre que marque n; conséquence, que M. Bernoulli lui méme n'accorderoit jamais. Or on sait que, lorsque les differentiels de deux quantités variable sont égaux, il n'en suit pas

Questa critica comporta che la curva logaritmica non dovrebbe avere solo due rami, ma infiniti rami, uno per ogni possibile valore di n. BERNOULLI aveva sostenuto che, siccome tutte le curve definite da $\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,y}{y^n}$ per n dispari hanno un centro di simmetria, ciò deve valere anche per la curva logaritmica, corrispondente al caso $n = 1$. EULERO contesta l'argomento perché $n = 1$ è eccezione al comportamento generale in quanto dà luogo ad una curva trascendente e non algebrica e non vi è alcun motivo per cui l'argomento di simmetria valido per n dispari ma diverso da 1 valga anche in questo caso singolare. Per corroborare questo argomento EULERO considera la famiglia a due parametri a e b di curve di equazione

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$$

che con razionalizzazioni si mostra ammettere un diametro in quanto si giunge ad un'equazione di ottavo grado dove y compare solo a potenze pari. Quando però $b = 0$ l'argomento cade in quanto ora la curva si riduce a

$$y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$$

il cui termine a^2xy riduce la simmetria della curva. L'ultima obiezione a BERNOULLI riguarda l'argomento che EULERO ritiene il più forte in favore dell'esistenza dei logaritmi dei numeri negativi, cioè il fatto che, essendo $(-a)^2 = (+a)^2$ si arriva a concludere che $2l\,(-a) = 2l(+a)$ e da qui a dire che $l\,(-a) = l(+a)$. Tuttavia, se ciò fosse vero, poiché $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$ ed $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$ si deve anche concludere che $l\,a = l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right) = l(a\sqrt{-1})$, scuotendo l'edificio della teoria dei logaritmi alle fondamenta: senza contare l'incongruenza già discussa da EULERO con BERNOULLI vent'anni prima circa la formula di quadratura del cerchio con l'uso dei logaritmi. Il fatto grave è che ammettendo $l - 1 = \omega \neq 0$ si cade pure in contraddizione, dal momento che $2l - 1 = 2\omega \neq 0$ mentre $2l\,(-1) = l(-1)^2 = 0$. Presentando le contraddizioni cui si va incontro sia rifiutando che accettando l'opzione di BERNOULLI si chiude la parte del lavoro dedicata all'esposizione delle idee (*sentiments*) di BERNOULLI sull'argomento.

Testo 7.7 (EULERO) (pp. 146-148 di [5]). Originale 7.15 *Passo al quarto argomento del sig. Bernoulli, senza dubbio il più forte dal momento che non si dovrebbe metterne in dubbio alcuna parte che ne sta a fondamento senza sovvertire i principi più solidi dell'analisi e della teoria dei logaritmi. Non si può infatti negare che* $(-a)^2 = (+a)^2$ *per cui non c'è alcun dubbio che anche i loro*

---

davantage, que ce, que ces quantités variables different entr'elles d'une quantité constante; & on n'en sauroit conclure, qu'elles fussent égales. Ainsi quoique le differentiel de $x + a$ soit $= \mathrm{d}x$ aussi bien que celui de x, la conséquence seroit bien fausse, si l'on en voloit conclure que $x + a = x$. Par cette raison il est donc clair, que puisque le differentiel de $l - x$ & de $l + x$ est le méme $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, les quantités $l - x$ & $l + x$ ne different entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est egalement évident, vuque $l - x = l - 1 + l\,x$. Et de là on comprend aussi aisément, que puisque $l\,nx = l\,x + l\,n$, le differentiel de $l\,nx$ doit être égal au differentiel de $l\,x$. Il est vrai que M. Bernoulli suppose $l - 1 = 0$, de mème qu'il est $l\,1 = 0$, de sorte qu'il seroit $l - x = l\,x + l - 1 = l\,x$. Mais comme c'est précisément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

logaritmi sono uguali, cioè a dire che $l(-a)^2 = l(+a)^2$. *È poi altrettanto certo che in generale* $lp^2 = 2lp$ *da cui segue che* $l(-a)^2 = 2l - a$ *e* $l(+a)^2 = 2l + a$: *pertanto senza contraddizione si avrà* $2l - a = 2l + a$. *Le metà di queste quantità saranno indubbiamente uguali tra loro e di conseguenza* $l - a = l + a$, *proprio come sostenuto dal sig. Bernoulli. Ma se questo ragionamento fosse corretto, se ne potrebbero trarre conclusioni che nessuno, tantomeno il sig. Bernoulli, oserebbe sostenere; allo stesso modo infatti si dimostrerebbe che i logaritmi di quantità immaginarie sarebbero reali, tanto quanto quelli dei numeri negativi. È infatti sicuro che* $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$ *e dunque anche* $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, *ed inoltre* $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$ *e per conseguenza* $l(a\sqrt{-1}) = la$. *Inoltre, poiché* $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, *si avrà* $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$ *e dunque* $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$ *come anche* $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, *che non si potrebbe ammettere senza sovvertire l'intera teoria dei logaritmi.*

Secondo il sistema del Sig. Bernoulli, non solo si avrebbe $l - 1 = l\,1 = 0$, *ma anche* $l\sqrt{-1} = 0$; $l - \sqrt{-1} = 0$; *ed* $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. *Ora la bella scoperta del sig. Bernoulli, che ridusse felicemente la quadratura del cerchio ai logaritmi di numeri immaginari, sarebbe falsa, se il logaritmo di* $\sqrt{-1}$ *fosse =0; infatti grazie a quella riduzione egli ha mostrato che il raggio sta alla quarta parte di una circonferenza come* $\sqrt{-1}$ *sta a* $l\sqrt{-1}$. *Dunque, posto il rapporto del diametro alla circonferenza* $= 1 : \pi$ *si avrà* $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ *e dunque* $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$ *che sarebbe assurdo se fosse* $l\sqrt{-1} = 0$. *Dunque non è vero che* $l\sqrt{-1} = 0$ *per cui bisogna concludere che, per quanto sembrasse solida, la quarta motivazione è da prendere con cautela visto che ne seguirebbe sia* $l\sqrt{-1} = 0$ *che* $l - 1 = 0$. *Non è possibile dunque dire che l'opinione del Sig. Bernoulli sia sufficientemente fondata.*

È certo molto sorprendente che sia aderendo all'opinione del Sig. Bernoulli sia rifiutandola, si cade in ogni caso in difficoltà insormontabili ed anche in contraddizioni. Se infatti si sostiene che $l - a = l + a$ *o* $l - 1 = l + 1 = 0$ *si è anche obbligati ad ammettere che* $l\sqrt{-1} = 0$, *dato che* $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l - 1$. *Ora sarebbe assurdo non solo sostenere che i logaritmi di quantità immaginarie non sono immaginari, ma sarebbe anche falso che* $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, *cosa che però è rigorosamente dimostrata. Dunque, dichiarandosi a favore dell'opinione del sig. Bernoulli si cade in contraddizione con delle verità ben fondate.*

Supponiamo che l'opinione del sig. Bernoulli sia falsa e che non si ha affatto $l - 1 = 0$, *visto che a questo si riduce l'opinione del sig. Bernoulli; si resta vincolati ad ammettere la falsità di qualche operazione su cui si fonda il ragionamento della quarta motivazione: ciò però non si può fare senza cadere in contraddizione con altre verità dimostrate. Per rendere tutto più evidente, sia* $l - 1 = \omega$, *e se non fosse* $\omega = 0$, *neanche il suo doppio* 2ω *sarà =0; ora,* 2ω *è il logaritmo del quadrato di -1, cioè di +1, per cui il logaritmo di +1 non sarebbe più =0, una nuova contradizione. Inoltre,* $-x$ *è sia* $= -1 \cdot x$ *che* $= \frac{x}{-1}$ *e dunque* $l - x = l\,x + l - 1$: *si avrebbbe dunque* $l - 1 = -l - 1$, *senza che sia* $l - 1 = 0$ *che è una contraddizione, come a dire che è* $+a = -a$ *senza che sia* $a = 0$.

Arrivato a questo punto di stallo, EULERO enuncia le idee di LEIBNIZ in materia e non sembra aver dubbio che, quando LEIBNIZ afferma che il logaritmo di un numero negativo è *impossibilis*, egli intenda con ciò dire immaginario. Anziché esplorare il pensiero di LEIBNIZ, EULERO presenta tre ragioni che sembrano negare la realtà dei logaritmi di numeri negativi, sottoponendole a critiche che riproducono lo stallo con cui si era concluso l'esame della posizione di BERNOULLI. Due degli argomenti *pro* LEIBNIZ sono basati su sviluppi in serie, divergenti o convergenti, mentre il terzo è basato sulla definizione di logaritmo a noi familiare. Il primo argomento poggia sulla serie di MERCATOR

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \&c.$$

che, quando si pone $x = -2$, (fuori dal raggio di convergenza della serie) fornisce lo sviluppo divergente

$$l - 1 = -2 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 - \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 - \&c.$$

che è incompatibile con $l - 1 = 0$. Tuttavia nella successiva obiezione EULERO riconosce lo scarso valore persuasivo di questo primo argomento, dal momento che il comportamento di una serie fuori dall'insieme di convergenza può dare origine a contraddizioni. Ad esempio, posto $x = -2$ nella serie geometrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \&c.$$

si ottiene un'uguaglianza priva di senso

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \&c.$$

Il secondo motivo a favore della tesi di LEIBNIZ poggia sull'equivalenza $y = l\,x \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y$ dimostrata dall'osservazione che, poiché $l\,e = 1$, da $y = l\,x$ segue $yl\,\mathrm{e} = 1l\,x$ e dunque $l\,\mathrm{e}^y = l\,x$ che equivale all'asserto. A questo punto è chiaro che è impossibile che si ottenga un valore negativo per x quando y assume un qualunque valore reale. Tuttavia, osserva EULERO, questo argomento può anche condurre a conclusioni di segno opposto in quanto, se $y = \frac{m}{2n}$, con m ed n interi, allora $x = \mathrm{e}^{m:2n} = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{m:n}}$ il che porterebbe a concludere che i numeri x e $-x$ hanno lo stesso logaritmo. La motivazione più forte addotta da EULERO fa leva sullo sviluppo *convergente*

$$x = \mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + ...$$

che, insistendo a porre come BERNOULLI $x = -1$ ed $y = 0$, fornisce il risultato assurdo $-1 = +1$. Tuttavia, lo sviluppo di $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ fornisce solo radicali positivi e mai il valore negativo per cui, l'assenza di logaritmi di numeri negativi dallo sviluppo in serie di e^y sembra imputabile più ad una limitazione degli sviluppi in serie che ad una impossibilità concettuale.

Testo 7.8 (EULERO) ([5], pp. 149-152) Originale 7.16

Avendo mostrato che il logaritmo del numero $1+x$ *è uguale alla somma della serie*

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + ecc.$$

si vede subito che se $x = 1$[19]*, deve essere* $l\,1 = 0$*. Per avere ora il logaritmo di* -1 *occorre inserire* $x = -2$ *da cui si ottiene*

$$l - 1 = -2 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 - \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 - \&c.$$

Non c'è alcun dubbio che la somma di questa serie divergente non potrà essere =0: è dunque certo che $l - 1$ *non è* $= 0$*. Il logaritmo di* -1 *sarà dunque immaginario dal momento che è chiaro che non potrà essere reale, cioè positivo o negativo.*

2. Motivo. Sia $y = l\,x$*, e detto* e *il numero il cui logaritmo è* $= 1$*, il cui valore approssimato è, come è noto,* $e = 2,718281828459$*; poiché sarà* $yl\,\mathrm{e} = 1l\,x$*, si concluderà che* $x = \mathrm{e}^y$*. Così siccome il logaritmo di un numero* x *è l'esponente di una potenza di* e *che uguaglia il numero* x*, è chiaro che nessun esponente reale di una potenza di* e *potrà produrre un numero negativo e dunque, non vi è alcun numero, né* $y = 0$*, né un altro numero reale che, messo al posto di* y*, faccia diventare* $\mathrm{e}^y = -1$*. Preso in generale un numero negativo* $-a$ *come* x *tale che il logaritmo sia* $= y$*, l'equazione* $\mathrm{e}^y = -a$ *sarà sempre impossibile, ovvero il valore di* y *sarà immaginario.*

3. Motivo. Poiché in generale il valore di e^y *si esprime con la serie infinita*

$$\mathrm{e}^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ecc.,$$

che è sempre convergente per quanto grande sia il numero messo come y*, le obiezioni rivolte alla natura divergente delle serie, come nel primo motivo, non sono valide ora. Dunque posto come* y *il logaritmo di un numero* x *si avrà*

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ecc.$$

e dunque se y *indica il logaritmo di* -1*, ovvero se* $x = -1$ *si avrà l'uguaglianza*

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

che, come è subito chiaro non sarà soddisfatta dal valore $y = 0$*, visto che ne risulterebbe* $-1 = +1$*. Dunque è sicuro che il logaritmo di* -1 *non è* $= 0$*.*

Mi basta aver addotto queste tre ragioni in quanto gli altri argomenti con cui si potrebbe confermare l'opinione del sig. Leibniz, sono già contenuti nelle obiezioni rivolte al sistema del sig. Bernoulli. Ciononostante, i tre motivi che ho appena esposto sono soggetti alle seguenti obiezioni.

[19] Si legga $x = 0$.

1. Obiezione. Contro il primo motivo si dirà subito che la crescita continua dei termini, tutti negativi, della serie

$$-2-\frac{1}{2}4-\frac{1}{3}8-\frac{1}{4}16-\frac{1}{5}32-\frac{1}{6}64-\&c.$$

non è un segno certo del fatto che la somma della serie non possa essere $=0$. *Infatti la serie geometrica*

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-\&c.$$

quando $x=-2$ *dà*

$$-1=1+2+4+8+16+32+64+\&c.$$

e quando $x=-3$

$$-\frac{1}{2}=1+3+9+27+81+343+\&c.$$

perché, si dirà allora, non è possibile che la somma di una serie i cui termini crescono conservando sempre lo stesso segno, non sia $=0$. *Per fornire un esempio non c'è che da sommare termine a termine l'ultima serie con la seguente:*

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1+\&c.$$

e si avrà, effettivamente

$$0=2+2+10+26+82+242+730+\&c.$$

Dunque, se la somma di questa serie è $=0$, *dove sta l'assurdo nel sostenere che possa anche essere*

$$0=-2-\frac{1}{2}4-\frac{1}{3}8-\frac{1}{4}16-\frac{1}{5}32-\frac{1}{6}64-ecc.?$$

E dunque il primo motivo non è affatto convincente.

2. Obiezione. Il secondo motivo è tale da potersene anche servire per mostrare l'opinione contraria. Poiché si ha $x=\mathrm{e}^y$ *quando si suppone* y *uguale al logaritmo del numero* x, *ogni volta che* y *è una frazione con denominatore un numero pari, bisogna allora ammettere che il valore di* e^y *e dunque anche quello di* x *sia positivo come negativo. Così se* $\frac{m}{2n}$ *è un logaritmo, il numero* x *corrispondente, cioè* $\mathrm{e}^{m:2n}=\sqrt{\mathrm{e}^{m:n}}$, *sarà tanto positivo quanto negativo cosicché in questo caso sia* x *che* $-x$ *avranno lo stesso logaritmo* $\frac{m}{2n}$. *Dunque, siccome i logaritmi non sono numeri razionali e di conseguenza equivalenti a delle frazioni aventi numeratori e denominatori infinitamente grandi, sarà sempre possibile immaginare i denominatori come numeri pari; di conseguenza lo stesso logaritmo che corrisponde al numero positivo* $+x$, *corrisponderà anche al numero negativo* $-x$.

3. Obiezione. Il terzo motivo è senza dubbio il più forte e sembra escludere categoricamente i numeri negativi dal novero di quelli a cui corrispondono logaritmi reali. È infatti chiaro che, qualunque valore reale si inserisca per y, il valore della serie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

non potrà mai esssere negativo, cosicché nessun logaritmo reale corrisponderà ad un numero negativo. Tuttavia, anche se la serie non è vera, se dalla formula finita e^y *può discendere un numero negativo, è importante se la serie che lo uguaglia fornisce o meno un valore negativo? Per comprendere ciò, basta considerare un radicale come, ad esempio,* $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ *che è uguale tanto a* $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ *che* $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$*, benché la serie uguale ad essa*

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + ecc.$$

non fornisca che il valore positivo, qualunque numero si metta al posto di x.

Queste obiezioni rendono le idee di Leibniz più plausibili. Tuttavia, l'inconveniente che, se $l - 1$ è un numero immaginario, lo sarà anche $2l - 1 = l + 1$, rimane ed è necessario un radicale cambio di prospettiva per restituire solido fondamento alla teoria dei logaritmi. È questo l'obiettivo della seconda parte della memoria [5] e che sarà sviluppato anche in altre opere di Eulero cui dedicheremo il prossimo capitolo.

7.4 Testi originali

Testo 7.9 *[*Leibniz*]* (pp.895–896 di [2]).

Series Logarithmorum est series numerorum progressionis Arithmeticae respondens seriei numerorum progressionis Geometricae, quorum unus assumi potest unitas, et alter numerus aliquis positivus, verbi gratia 2. Ubi pro Logarithmo unitatis assignari potest 0, pro logarithmo vero ipsius 2 numerus quicunque, sed ponamus, unitatem esse Logarithmum ipsius 2.

Porro manifestum est, in serie hac Geometricae progressionis numquam, assumtis quotcunque tertiis proportionalibus, perveniri ad numerum negativum. Videtur quidem ad eum perveniri posse assumtis mediis proportionalibus, nam in nostra hac serie datur 1,2,4; jam medium, quod sumi potest inter 1 et 4, videur esse tam +2 quam -2, quia tam +2 quam -2 in se ductum dat +4. Verum incommodum hic oritur, quod -2 non potest esse in progressione Geometrica, in qua est +2, qualis nempe (ex hypothesi) est nostra; cum -2 non sit potentia ipsius 2 secundum exponentem quemcunque, seu non sit 2^e, quod tamen de quovis numero logarithmum recipiente dici potest, qui proinde in hanc seriem 1,2,4 etc. quantum opus ultro citroque continuatam vel interpolatam cadit saltem aequivalenter. Nempe si fiat $x = 2^e$, erit $e = \log x$, posito scilicet log 1 esse 0, et log 2 esse 1. Cum ergo non dari possit e in aequatione $-2 = 2^e$,

consequens erit logarithmum -2 esse nullum. Atque hinc etiam fit, ut -2 non possit esse ordinata ad Asymptoton Logarithmicae in eadem serie consistens cum 1 et 2, seu non possit esse x in aequatione ad Logarithmicam, quae est $x = 2^e$.

Sed idem ostenditur adhuc facilius ex natura quantitatum imaginariarum. Si -2 habet logarithmum, utique hujus logarithmi dabitur dimidium. Is autem est logarithmus numeri, qui ductus in se ipsum dat -2, seu est logarithmus ipsius $\sqrt{-2}$. Sed $\sqrt{-2}$ est numerus impossibilis et numeri impossibilis Logarithmus est impossibilis; ergo dimidium logarithmi ipsius -2 est impossibile; sed cujus dimidium est impossibile, debet esse ipsum impossibile. Itaque impossibilis est Logarithmus ipsius -2.

Caeterum ipsa harmonia Logarithmorum et numerorum haec illustrat. Ductio in se ipsum in numeris representatur per multiplicationem in Logarithmis; Multiplicatio in numeris representatur per additionem in Logarithmis; Positio in numeris representatur per ipsum Logarithmum.

Ipsi	n^e	respondet	$e \cdot \log n$
	$n \cdot n$		$\log n + \log n$
	n		$\log n\,.$

Contra extractio in numeris representatur per divisionem in Logarithmis; Divisio in numeris representatur per subtractionem in Logarithmis. Sed per quid representatur Negatio in numeris? Respondo, id non posse inveniri, quia in descendendo ab extractione per divisionem et subtractionem, non potest aliquid inveniri, quod est per subtractione inferius.

Ipsi	$\sqrt[e]{n}$	respondet	$\log n : e$
	$\frac{n}{n}$		$\log n - \log n$
	-n		quid?

Ex his etiam intelligitur, etsi possit dici -2 in se ductum dare 4, non tamen apte dici, -2 esse medium proportionale inter 1 et 4, et in universum numeri negativi non intrant in rationes, etsi quodammodo in calculum intrent, quod etiam nuper in Actis Eruditorum aliunde comprobavi. Unde confirmatur, non dare Logarithmos negativorum, uti vicissim exclusio Logarithmorum a negativis confirmat, negativos non ingredi rationes vel proportionalitates.

Si quis defendat, Logarithmum *τοῦ* $\sqrt{-2}$ non esse dimidium Logarithmi *τοῦ* -2, etsi logarithmus *τοῦ* $\sqrt{2}$ sit dimidium logarithmi *τοῦ* 2, et pro ratione discriminis alleget, quod $\sqrt{2}$ sit media proportionalis inter -1 et -2: responsio est facilis, utrique esse commune, ut radix sit media proportionalis inter 1 et id, cujus est radix, nempe ut $\sqrt{2}$ sit media proportionalis inter 1 et 2, et ut $\sqrt{-2}$ sit (vel certe fingatur) media proportionalis inter 1 et -2. Sed hinc utrobique sequitur, logarithmum mediae fore dimidium posterioris, nam log mediae proportionalis inter 1 et 2 (id est ipsius $\sqrt{2}$) est $\log 1 + \log 2 : 2$. Sed log 1 est 0; ergo log. mediae inter 1 et 2 est $\log 2 : 2$. Similiter log. mediae proportionalis inter 1 et -2 (id est ipsius $\sqrt{-2}$) est $\log 1 + \log -2 : 2$, id est (ob $\log 1 = 0$) $\log -2 : 2$. Res etiam sic patet: cum -2 sit $= \sqrt{-2}$ in $\sqrt{-2}$, erit $\log -2 = \log \sqrt{-2} + \log \sqrt{-2}$. Ergo $\log \sqrt{-2}$ est dimidius $\log -2$.

Testo 7.10 [J. Bernoulli I](pp.898–900 di [2]).

Schedam Tuam de Logarithmis numerorum negativorum perlegi quidem, sed quod pace Tua dixerim, nihil inveni quod eorum impossibilitatem probet. Hoc unum efficis omnibus tuis argomentis, ut ostendas, non dari transitum ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum, hoc est assumta unitate (nempe +1) pro initio seriei numerorum, nullum numerum negativum in illa serie inveniri posse, adeoque nullos eorum logarithmos hoc casu existere; quod quidem non nego. Sed hoc non impedit, quominus numeri negativi suam peculiarem constituant seriem, assumta per eorum inizio unitate negativa (nempe-1) et ita quidquid de Logarithmis affirmativorum probaveris, idem et in Logarithmos negativorum quadrabit. Ut verbo dicam, quilibet numerus affirmativus idemque negativus habent communem logarithmum, seu Log. $\tau o\tilde{\upsilon}$ +n=log.$\tau o\tilde{\upsilon}$-n: quod ut demonstrem ulterius Tibi, ut spero, deinceps non dissensuro, hoc tantum faciam, ut probem Logarithmicam ABC habere alteram oppositam $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 7.6) pro conjugata super communi asymptoto LMN, quae duae partes sunt habendae ejusdem curvae, sicuti duae Hyperbolae oppositae nonnisi unam efficiunt curvam: unde constabit (assumtis AL pro +1 et αL pro -1) LM, LN etc. fore logarithmos numerorum tam affirmativorum MB, NC etc. quam negativorum Mβ, Nγ etc.

Hoc vero commode ostendi potest, si inspiciamus modum aliquem generandi Logarithmicam, ex cujus generationis continuatione patebit duplicitas hujus curvae super communi asymptoto. Consideremus hunc in finem Hyperbolam PQG cum opposita pqg super asymptotis orthogonalibus Rr, OX, se mutuo secantibus in T: assumta ad arbitrium applicata PR pro prima et invariabili ex singulis punctis S, E, s, e etc. tam supra quam infra asymptoton OX eductae intelligantur applicatae SQ, EG, sq, eg, etc. et in illis sumantur partes SF, EH, proportionales areis hyperbolicis RSPQ, REGP, hoc est ut $SF \times C$=areae SP et $EH \times C$= areae EP, unde manifestum est, curvam exinde generatam RFH fore Logarithmicam. (Fig. 7.7)

Attendamus nunc ad ejus generationem eamque continuemus quousque possumus. Primo clarum est, quo major sumitur RS, tanto majorem fore SF, donec tandem S attingente T, areaque per consequens hyperbolica Tp evadente infinita, etiam applicata TO, in quam abit SF, fiat infinita, adeoque Logarithmicae asymptotos. Sed pergat nunc punctum S progredi (quid enim hoc impedit?) atque jam pervenerit in e; vides nunc area hyperbolicam ipsi Re competentem esse partim affirmativam infinitam TP, partim negativam infinitam Tg, adeoque $= TP - Tg$=(facta TE=Te) EP; et ipsam applicatam $EH = eh$; et similiter, ubi punctum mobile progrediendo pervenerit ad s, ita ut $TS = Ts$ fiet applicata $sf = SF$; unde nova Logarithmica hfr oritur, quae cum priori HFR unam tantum curvam constituit, nempe $RFXOhfr$, sicuti duae Hyperbolae oppositae PQG et pqg unam tantum efficiunt curvam, nempe $PQGOXgpq$. Nam uterque ramus RFH et hfr generantur eadem lege ejusque continuatione, ita ut quemadmodum primo crescunt applicatae SF, EH in infinitam TO, postea eodem ritu ab infinita TO iterum decrescant in eh, sf etc. Cum itaque sumtis TR pro unitate affirmativa, et Tr pro unitate negativa, EH, SF exprimant logarithmos numerorum affirmativorum, expriment eadem vel ipsis aequales eh, sf

logarithmos numerorum Te, Ts, qui respectu alterorum TE, TS sunt negativi. Verum igitur est, unum eundemque logarithmum respondere duobus numeris aequalibus, uni affirmativo, alteri negativo, hoc est log. $\tau o\tilde{\upsilon}$ +n=log.$\tau o\tilde{\upsilon}$-n. Q.E.D.

Testo 7.11 *[*Leibniz*]*(p. 902 di [2]).

Concedis mihi, ut video: si sit aequatio generalis $2^e = x$, ponaturque in casu $x = 1$ esse $e = 0$, et in casu $x = 2$ [si placet] esse $e = 1$, tunc sequi, non posse assignari e, cum $x = -1$. Sed addis, hanc suppositionem logarithmorum pro numeris positivis esse arbitrariam, nam retenta aequatione generali $2^e = x$, posse assumi ut e sit 0, cum $x = -1$. Verum enimvero, ut taceam priorem suppositionem esse magis naturalem, considerandum est 1° in posteriore effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem. Nam cum duplum et dimidium ipsius 0 sit 0, erit 0 logarithmus tam ipsius -1, quam quadrati ejus +1, et radicis quadraticae ejus $\sqrt{-1}$. Et 2°. sequetur hoc amplius, 2^0 non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum 2^0 erit =-1, ut supponebatur, sed erit $2^0 = +1$ et $= \sqrt[2]{-1}$ et $= \sqrt[4]{-1}$ et $+\sqrt[8]{-1}$ et sic in infinitum. Et ita nisi 2^0 sit quantitas ambigua, haec omnia concident inter se. Sed si initio tantum ponamus $2^0 = 1$, nihil tale occurrit, quia, quaecunque potentia aut suppotentia ipsius 1 est 1, non vero quaevis potentia aut suppotentia ipsius -1 est -1.

Fit etiam 3°. per hypothesin Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numeris ad positivos, et contra. Nam si duplices Logarithmum numeri negativi, habebis Logarithmum quadrati a numero positivo, ex. gr. si $x^e = -2$, erit $x^{2e} = +4$; sed hunc transitum Tu ipse improbas, vel ex spectata natura curvae.

Praetera 4°. Logarithmis negativorum admissis, habentur et logarithmi possibiles impossibilium, qui erunt dimidiati Logarithmi negativorum; sed sumtis Logarithmis nonnisi positivorum, nunquam venietur ad logarithmos possibiles impossibilium.

Denique 5°. admissa hypothesi Logarithmorum pro negativis, fiet falsum, quod concessisti. Nam concessisti ab initio, incompatibilia esse $2^e = 1$ et $2^e = -1$, ita ut e possit assignari. Sed si admittas hypothesin $2^0 = -1$, fiet etiam $2^0 = 1$. Ergo compatibilia sunt $2^e = 1$ et $2^e = -1$, posito $e = 0$ contra concessa.

Ex his omnibus vides hypothesin de Logarithmis numerorum negativorum non tantum esse parum naturalem et inutilem, sed etiam non admittendam. Hinc etiam et aliunde quoque statui, proportiones non habere locum in quantitatibus negativis, nec dicendum esse -1 ad +1 ut +1 ad -1, licet productum ex extremis hic faciat aequale producto ex mediis, quia identitas rationum fundamentum est in similitudine, quae hic nulla est. Nam quomodo potest +1 esse ad -1, ut est -1 ad +1, cum prior ratio sit majoris ad minus, posterior minoris ad majus. Etsi ergo verum sit, esse aequales has duas fractiones $\frac{+1}{-1}$ et $\frac{-1}{+1}$, non tamen fractiones idem sunt ac rationes, licet hae per illas indicentur. Ex quibus intellegitur, in ipsis rei Analyticae fundamentis aliqua adhuc neglecta fuisse.

Testo 7.12 *[*J. Bernoulli I*] (pp. 907-909 di [2]).* Quod vero attinet ad ipsius Principii (quod tacite supponis) falsitatem haec in eo consistit, quod

quae vera sunt tantum pro logarithmis numerorum affirmativorum, ea quoque ad logarithmos numerorum negativorum applicare velis, non considerans, ex quo fundamento illa sunt deducta, alias statim vidisse causam, ob quam applicatio ad logarithmos negativorum non valeat. Sed respondebo *κατὰ πόδας* ad quinque tuas objectiones.

Dicis (1) in suppositione logarithmorum numerorum negativorum effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem, quod quidem de affirmativis et negativis verum est; concedo enim habere communes Logarithmos, sed consideremus rationem, ex qua concludis etiam quantitatis impossibilis logarithmum esse eundem; nam cum duplum, ais, et dimidium ipsius 0 sit 0, erit Logarithmus tam ipsius -1 quam quadrati ejus +1 et radicis quadraticae ejus $\sqrt{-1}$. Hic non animadvertis, quod non absolute essentiale sit logarithmis, ut duplum alicujus logarithmi sit logarithmus numeri, quadrati, et dimidium logarithmi sit logarithmus radicis; oportet ut attendas, duplum logarithmi dare proprie logarithmum ejus numeri, qui est tertius geometrice proportionalis ad primum numerum (hoc est ad unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et ad numerum propositum, qui tertius proportionalis in affirmativis tantum est numeri propositi quadratus, in negativis non item. Deinde attendere debes, dimidium alicujus logarithmi non absolute esse logarithmum radicis quadraticae, sed potius esse logarithmum medii proportionalis inter primum numerum (hoc est unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et numerum propositum, qui medius proportionalis in affirmativis tantum est radix quadratica numeri propositi, non vero in negativis. Quod si itaque ratiocinium Tuum recte instituas dicendo: Nam cum duplum et dimidium ipsius 0 sit 0, erit 0 logarithmus tam ipsius -1, quam tertii proportionalis ad -1 et -1, qui est $\frac{-1\times-1}{-1} = -1$, et medii proportionalis inter -1 et -1, qui est $\sqrt{-1\times-1} = +\sqrt{+1}$ vel $-\sqrt{+1}$; nihil certe absurdi inde sequitur.

Dicis 2°. sequetur hoc amplius 2^0 non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum 2^0 erit=-1, ut supponebatur, sed erit $2^0 = +1$ et $= \sqrt[2]{-1}$ et $= \sqrt[4]{-1}$ et $= \sqrt[8]{-1}$, et sic in infinitum, et ita nisi 2^0 sit quantitas ambigua, haec omnia coincident inter se. Haec secunda objectio est tantum Corollarium prioris; illa itaque sublata et haec cessat: nego enim 2^0 fore $= \sqrt[2]{-1}$, et $= \sqrt[4]{-1}$, et $= \sqrt[8]{-1}$ etc. sequitur enim nihil aliud quam quod 2^0 sit $= \sqrt[2]{-1\times-1}$ et $\sqrt[4]{-1\times-1\times-1\times-1}$, et $\sqrt[8]{-1}$ etc. quae omnia faciunt $\pm\sqrt{+1}$, hoc est +1, vel, quod hic valet, -1, id quod nilhil absoni est.

Urges 3°. fieri per hypothesin Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numeris ad positivos et contra: nam si duplicem Logarithmum numeri negativi, me habere asseris, Logarithmum quadrati a numero positivo ex. gr. si $x^e = -2$, fore $x^{2e} = +4$; sed hunc transitum me ipsum negare, vel ex spectata natura curvae. Verum pristina recurrit responsio: nego scilicet duplicando logarithmum haberi logarithmum numeri quadrati. Vidisti enim ex duplicatione illa oriri Logarithmum tertii proportionalis ad unitatem (affirmativam aut negativam) et ad numerum propositum. Sic itaque, si $x^e = -2$, concludendum fore $x^{2e} = \frac{-2\times-2}{-1} = -4$, quod nullum transitum arguit a negativis ad positivos.

Eadem est responsio ad Objectionem quartam, quando dicis: Logarithmis

negativorum admissis, haberi et Logarithmos possibiles impossibilium, qui sunt dimidiati Logarithmi negativorum; supra quippe in responsione ad objectionem primam vidisti dimidiationem logarithmi non dare (nisi per accidens) logarithmum radicis, sed medii proportionalis inter unitatem (affirmativam aut negativam) et numerum propositum, hic autem medius proportionalis umquam est impossibilis.

Quod denique obijcis 5°. admissa hypothesi Logarithmorum pro negativis, fieri falsum quod concesserim; nam me concessisse ab initio incompatibilia esse $2^e = 1$ et $2^e = -1$, posito $e = 0$, contra concessa. Eandem repetis sequelam, quam falsam ostendi. Ex eo enim, quod admittam hypothesin $2^0 = -1$, non sequitur fieri etiam $2^0 = 1$, sed tantum $\frac{-1\times-1}{-1} = -1$. Ita vides difficultates tuas omnes dilutas. Non dubito quin, cum aliqua attentione rem perpendere velis, mihi sis assensurus. Volui hac vice distincte ad puncta singula respondere, ut in posterum lites serere circa rem leviculam abstineamus.

Testo 7.13 [Eulero] (p. 353 di [4]). Quae mihi nuper de potentiis quantitatum negativarum perscripsisti, solvunt quidem dubium propositum, et ipse interim in aliquot argumenta incidi, quibus mihi probare posse video, esse $lx = l - x$. Alia autem quoque sese obtulerunt, contrarium asserentia, et quibus assentiar prorsus nescio. Pro affirmativa praeter argumenta tua mihi perscripta, est hoc forte quoque argumentum. Sit $lxx = z$, erit

$$\frac{1}{2}z = l\sqrt{xx}\,,$$

sed $\sqrt{xx}$ est tam $-x$ quam $+x$, quare $\frac{1}{2}z$ est lx et $l-x$. Posset quidem obijci, xx habere duos logarithmos, sed hoc qui asser[ere vult] infinitos adjudicare deberet. Haec autem ratio, quod differentialia lx et [$l - x$ sunt] aequalia, mihi minus probare videtur aequalitatem lx et $l - x$, cum ab aequalitate differentialium ad aequalitatem integralium concludere non liceat, ut $a+x$ non aequatur x, eo quod differentialia aequantur. Similis autem est casus noster, est enim $l-x = lx+l-1$, unde ad aequalitatem lx et $l-x$ prius concludere non licet, quam demonstratum sit, $l - 1$ esse 0. Contraria argumenta sunt haec absurdum deducentia. Si enim esset $lx = l - x$ foret $x = -x$ et $\sqrt{-1} = 1$. Posse autem hic obijci, sed nescio an felici successu, ab aequalitate logarithmorum ad aequalitatem numerorum conclusionem fieri non posse. Et tum adhuc dubium meum concernens curvam $y = (-1)^x$ valent. Concesso autem non esse $x = -x$, etiam si sit $lx = l - x$, vereor tamen ne hoc principium in calculo applicatum in errorem deducat. Uti sit radius circuli a, sinus y, cosinus x, exit ex methodo Tua quadraturam circuli ad logarithmos reducendi, area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}\,,$$

et posito $x = 0$ habebitur quadrans circuli

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l - 1\,.$$

Si ergo fuerit $l - 1 = 0$, oportet ut sit quoque $\sqrt{-1} = 0$, et tandem $1 = 0$. Quomodo me ex his contradictionibus explicam, plane ignoro, ideoque, Vir Celeberrime, abs te intelligere desidero quid de iisdem sentias.

Testo 7.14 /J. Bernoulli I/(pp.359-361 di [4]).

(...) Partim jam respondi in litteris meis ad filium datis, ubi ei ostendi dubia vestra (nam et ipse similes formavit difficultates circa logarithmos imaginarios) inde tantum oriri, quod conceptus quem habuistis de logarithmis quantitatum negativarum cui rei natura non satis bene congruebat, dixitque si statuatur (& recte quidem)

$$lx = l - x\,,$$

intelligendum esse

$$l - (x)\,,$$

non vero

$$l(-x)\,,$$

vos autem utrumque confudisse, etiamsi magna sit inter utrumque differentia sic. e. gr.

$$l - (x)^{\frac{1}{2}}$$

est reale quid, sed

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

imaginarium. Hoc bene observato, cessant omnes vestrae difficultates & monstruosae inde deductae consequentiae. Quod attinet ad scrupulum quem porro moves desumtum ex area sectoris circularis per logarithmum expressa, ubi posito sinu $= y$ et cosinu $= x$ invenitur per methodum meam quadraturam circuli ad logarithmum reducendi, area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}\,,$$

de eo pariter jam monui filium meum in casu quo

$$x = 0$$

hanc aream revera exhiberi tanquam $= 0$, quamvis deberet esse $=$ quadranti; hinc autem nihil aliud concludi debere, quam quod expressio ista

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

augeri debeat quantitate constante nQ, seu multiplo quadrantis, quod vel ideo patet, quia sinus et cosinus in se convertuntur, atque non uno tantum modo sed infinitis modis fieri potest ut sit

$$x = 0 \quad \& \quad y = 1\,,$$

vel vice versa

$$x = 1 \quad \& \quad y = 0\,;$$

nam hoc fit assumto sectore = vel $1Q$, vel $2Q$, vel $3Q$, etc. vel etiam quando vis = $0Q$, adeoque nulla ratio est cur

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

unus potius exprimat quam alterum; malo itaque dicere quod area sectoris statuenda sit generaliter

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ\,,$$

adeo ut quotiescunque pars prior in nihilum abit, id, quod deest, suppleri possit per nQ, hoc est per multiplum, submultiplumve quadrantis, prout necessitas id exigit; semper enim invenies differentiando sectoris tui differentiale quod est

$$\frac{aa\mathrm{d}x}{2\sqrt{aa - xx}}\,,$$

sicuti decet. In casu semiquadrantis, ubi

$$x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$

habebis etiam partem priorem =0, aut si mavis

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}\,,$$

quocirca adjiciendum $\frac{1}{2}Q$; sed hujusmodi expressiones imaginariae usum potius habent, si in series expendantur in quibus quippe termini imaginarij se destruunt. De his satis.

Testo 7.15 (Eulero) (pp. 146-148 di [5]). Je passe à la quatrieme raison de M. Bernoulli, qui est sans doute la plus forte; car on ne fauroit revoquer et doute aucun article, qui y fert de fondement, sans renverser les principer les mieux établis de l'analyse & de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute, que leurs logarithmes ne soient égaux c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l - a$ & $l(+a)^2 = 2l + a$: pârtant il sera sans contredit $2l - a = 2l + a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles, & par conséquent il sera $l - a = l + a$, tout comme M. Bernoulli le soutient. Ma si ce raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences, que personne, & encore moins M. Bernoulli, ne dauroit accorder; car on prouvera de la méme façon, que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels, que ceux des nombres negatifs.

Car il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, & de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, & partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le systeme de M. Bernoulli, non seulement $l-1 = l\,1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$; $l - \sqrt{-1} = 0$; & $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or, M. Bernoulli, ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ etoit =0, toute cette belle découverte seroit fausse; par laquelle il a fait voir, que le rayon est à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc, posant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ & partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui serait absurde s'il etoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vray que $l\sqrt{-1} = 0$, d'ou il faut conclure que quelle solide que paroisse la 4me raison, elle doit étre sujette à caution, quisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent on ne peut pas dire, que le sentiment de M. Bernoulli soit suffisament prouvé.

Il est ici fort étonnant, que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras insurmontables, & méme en des contracidtions. Car si l'on soutient que $l - a = l + a$ ou $l - 1 = l + 1 = 0$, on est obligé d'avouër qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l - 1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir, que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi en se declarant pour le sentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des verités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. Bernoulli est faux, & qu'il n'y ait point $l-1 = 0$; car c'est à quoi se réduit le sentiment de M. Bernoulli; & on sera obligé d'accuser de fausseté quelcune des opérations sur lesquelles le raisonnement de la 4me raison est fondé: ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités demontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l - 1 = \omega$, & s'il n'est pas $\omega = 0$, son double 2ω ne sera non plus =0, or 2ω est le logarithme du quarré de -1, lequel étant =+1, le logarithme de +1 ne seroit plus =0, ce qui est une nouvelle contradiction. Deplus, $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l - x = l\,x + l - 1$: il seroit donc $l - 1 = -l - 1$, sans qu'il fut $l - 1 = 0$; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Testo 7.16 (Eulero) ([5], pp. 149-152). Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1 + x$ est égal à la somme de cette serie:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \&c.$$

d'ou l'on voit dabord que si $x = 1$[20], il doit être $l\,1 = 0$. Maintenant pour avoir

[20] Si legga $x = 0$.

le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'ou l'on obtien

$$l - 1 = -2 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 - \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 - \&c.$$

Or il n'y a aucun doute, que la somme de cette serie divergente ne sauroit être =0: donc il est certain que $l - 1$ n'est pas $= 0$. Le log. de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair, qu'il ne sauroit être réel, c.à d. ou positif, ou negatif.

2. Raison. Soit $y = l\,x$, & posant e pour le nombre dont le logarithme est $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2,718281828459$; puisqu'il sera $yl\,\mathrm{e} = 1l\,x$, on en tirera $x = \mathrm{e}^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e que est égale au nombre x, il est clair, qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre negatif: & partant pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y sauroit remplir cette condition. Et posant en général pour x un nombre negatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $\mathrm{e}^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de y imaginaire.

3. Raison. Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette serie infinie:

$$\mathrm{e}^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

qui est toutjours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de sorte que les objections tirées de la nature des suites divergentes, comme dans la premiere raison, ne trouvent pas lieu ici. Ainsi le logarithme du nombre x étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

& partant si y marque le logarithme de -1, ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

à laquelle, comme il estd'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent il est certain que le logarithme de -1 n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres arguments, par lesquels on peut confirmer le sentiment de Mr. Leibniz, sont déja contenus dans les objections faites contre le systheme de Mr. Bernoulli. Cependant ces trois raisons que je viens d'exposer sont sujettes aux objections suivantes.

1. Objection. Contre la premiere raison on dira d'abord, que l'accroissement continuel des termes, qui sont tous negatifs, de cette suite:

$$-2 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 - \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 - \&c.$$

n'est pas une marque seure que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si la serie geometrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \&c.$$

donne pour le cas $x = -2$, celle-cy

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \&c.$$

& pur les cas $x = -3$ celle-cy.

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 343 + \&c.$$

pourquoi, dira-t-on, ne seroit il pas possible, que la somme d'une serie, dont les terms croissent ayant par tout le mem signe, ne fut $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'a ajouter à la derniere serie termes pour termes, celle-cy:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

& on aura effectivement:

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \&c.$$

Donc si la somme de cette serie, est $= 0$, quelle absurdité seroit il donc de soutenir, qu'il fut aussi

$$0 = -2 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3}8 - \frac{1}{4}16 - \frac{1}{5}32 - \frac{1}{6}64 - \&c.$$

& partant la premiere raison n'est pas convainquante.

2. Objection. La seconde raison est telle, qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car puisqu'il y a $x = \mathrm{e}^y$ supposant y le logarithme de nombre x, toutes les fois que y est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de e^y & partant aussi de x, est aussi bien negative qu'affirmative. Ainsi si $\frac{m}{2n}$, est un logarithme, le nombre x qui lui répond étant $\mathrm{e}^{m:2n} = \sqrt{\mathrm{e}^{m:n}}$, sera tant affirmatif que negatif; de sorte que dans ce cas tant x que $-x$ aura le mème logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne sont pas des nombres rationels, & par conséquent équivalens à des fractions, dont les numérateurs & dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs commes des nombres pairs; il s'ensuit que le meme logarithme, qui convient au nombre positiv $+x$, conviendra aussi au nombre negatif $-x$.

3. Objection. La troisieme raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux, à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette serie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

ne sauroit jamais devenir negative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne sauroit repondre à un nombre negatif. Cependant cette serie n'etant vraïe, qu'entant qu'elle decoule de la formule finie e^y peut donner un nombre negatif, il importe fort peu, si la serie qui lui est égale en donne aussi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'a considerer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui est aussi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique le serie égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \&c.$$

ne donne que sa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

Bibliografia

[1] F. Cajori: History of the exponential and logarithmic concepts II. From Leibniz and John Bernoulli I to Euler. 1712-1747 *Amer. Math. Monthly* **20**, (1913), 38–47.

[2] C.I. Gerhardt (curatore): *Leibnizens Mathematische Schriften* vol. III. *Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.* H.W. Schmidt Verlag, Halle, 1856.

[3] G.W. Leibniz: Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero sensu methodi infinitesimalis. *Acta Erudit. Lips.* pp. 167-169 (1712). In C.I. Gerhardt (curatore) *Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend* vol. I. H.W. Schmidt Verlag, Halle, 1858, pp.387-389.

[4] G. Eneström: Der briefwechsel zwischen Leonhardt Euler und Johann I Bernoulli. *Bibl. Math.* **4**, (1902), 344-388.

[5] L. Euler: De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatives et imaginaires. *Mém. Acad. Sc. Berlin* **5**, (1751), 139-179.

Capitolo 8

La teoria di EULERO sui logaritmi dei numeri complessi

8.1 Quanti logaritmi ha un numero?

La lettura critica del carteggio tra BERNOULLI e LEIBNIZ sui logaritmi dei numeri negativi ha portato EULERO ad uno stallo in cui appaiono flagranti contraddizioni. Egli sente il bisogno di un'idea completamente nuova ed il lavoro del 1749 [1] la presenta all'improvviso, come materializzata dal nulla. La realtà è diversa, come si comprende dall'analisi del lavoro [2] *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, inviato all'Accademia di Berlino prima del 19 agosto del 1747, data in cui EULERO scrive a D'ALEMBERT comunicandogli di avere da poco inviato un lavoro all'Accademia un lavoro in cui tutte le difficoltà sorte a riguardo dei logaritmi dei numeri negativi erano state rimosse [3]. In realtà l'articolo citato apparirà oltre cent'anni più tardi nell'*Opera Posthuma* pubblicata a S. Pietroburgo nel 1862 ed è verosimile che la mancata pubblicazione sia legata ai ripensamenti occorsi ad EULERO sull'argomento, forse in seguito ad uno scambio epistolare con D'ALEMBERT che si trovava su una posizione vicina a quella di BERNOULLI e le cui obiezioni potrebbero aver fatto vacillare le certezze di EULERO circa la teoria elaborata nel lavoro del 1747 [3]. Il lavoro del 1749, già analizzato nella prima parte al capitolo precedente, approda agli stessi risultati ottenuti due anni prima, ma il teorema centrale viene dimostrato per altra via, con il ricorso ad uno sviluppo in serie, senza basarsi sull'identità $i\varphi = \log(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, come fatto nel 1747. Anche nel lavoro del 1747 si trova un'esposizione critica del carteggio LEIBNIZ-BERNOULLI in cui però le motivazioni di LEIBNIZ sono riportate in modo più fedeli ai suoi argomenti. Nella parte originale, per giustificare gli infiniti logaritmi attribuiti ad un dato numero, EULERO prende spunto dall'esistenza di più radici corrispondenti

ad un numero assegnato:

È già da molto tempo che queste difficoltà mi tormentano e mi sono fatto già molte illusioni per riuscire a sodisfarmi in qualche maniera senza essere costretto a sovvertire del tutto la teoria dei logaritmi. Mi sono immaginato che, così come una quantità ammette due radici quadrate, tre radici cubiche, quattro radici biquadratiche, ecc. una quantità potrebbe anche avere due metà, tre terze parti, quattro quarte parti, ecc. una sola delle quali sarebbe reali mentre le altre sarebbero immaginarie. Posto dunque $ly = x$*, immaginavo che*

$$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}x \quad \text{ed} \quad l(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x'$$

e che $\frac{1}{2}x$ *et* $\frac{1}{2}x'$ *potessero essere diversi, benché il doppio dell'uno come dell'altro fosse sempre* $= x$*. Allo stesso modo, per le tre radici cubiche di* y *sarebbe*

$$l\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x; \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x' \quad \text{et} \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x''$$

dove $\frac{1}{3}x$*,* $\frac{1}{3}x'$ *et* $\frac{1}{3}x''$ *sono numeri diversi il primo dei quali,* $\frac{1}{3}x$ *reale e gli altri due* $\frac{1}{3}x'$ *ed* $\frac{1}{3}x''$ *immaginari, benché il triplo di ognuno sia* $=x$*. Una simile spiegazione mi sembrava alquanto paradossale ed insostenibile ma comunque meno assurda rispetto alle contraddizioni che ero stato costretto ad ammettere nella teoria dei logaritmi dei numeri negativi ed immaginari.*[1] ([2], pp. 275-276)

Nonostante la ricerca delle tre terze parti, ecc.—distinte tra loro ma con la proprietà che, moltiplicate per tre, diano lo stesso risultato—non sopisca le perplessità di EULERO, egli prosegue con audace ostinazione e chiarisce le sue intenzioni in questi termini

Testo 8.1 (EULERO) ([2], pp. 276-277). Originale 8.6 *Affermo dunque che, benché sia determinato il numero il cui logaritmo è* $= 1$*, ogni numero ha un'infinità di logaritmi tutti immaginari fuorché uno, se il numero è positivo; se*

[1] Aussi y a-t-il long-temps que ces difficultés m'ont tourmenté, et je me suis fait pluiseurs illusions là-dessus, pour me satisfaire en quelque manière, sans être obligé de renverser tout à fait la théorie des logarithmes. Je me suis imaginé, que de même qu'une quantité admet toujours deux racines carrées, trois racines cubiques, quatre racines biquadratiques etc. ainsi une quantité pourrait avoir une double moitié, un triple tiers, un quadruple quart etc. dont l'un seulement serait réel, les autres imaginaires. Ainsi posant $ly = x$, je concevais que

$$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad l(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}x'$$

et que $\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}x'$ puissent être differents, quoique le double de l'un et de l'autre soit le même $= x$. De la même manière, pour les trois racines cubiques de y il serait

$$l\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x; \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x' \quad \text{et} \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3}x''$$

ou x, $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ soient des nombres differents, le premier $\frac{1}{3}x$ réel, et les deux autres $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ imaginaires, bien que le triple de chacun soit =x. Cette explication me paraissait bien extrêmement paradoxe et insuotenable, mais pourtant moins absurde que les contradictions que j'aurais été obligé d'admettre dans la théorie des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

però il numero è negativo od immaginario, tutti i logaritmi saranno parimenti immaginari. Come conseguenza, il logaritmo dell'unità non sarà solo $= 0$ *ma ci saranno ancora una infinità di quantità immaginarie, ciascuna delle quali rappresenta il logaritmo dell'unità bene tanto quanto* 0. *Siano dunque*

$$0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \vartheta,\ \text{ecc.}$$

tutti i logaritmi dell'unità e, dal momento che il logaritmo della radice quadrata è la metà del logaritmo della potenza, poiché $\sqrt{1}$ *vale tanto* $+1$ *quanto* -1, *i logaritmi del primo valore* $+1$ *saranno*

$$0,\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta,\ \frac{1}{2}\zeta,\ \frac{1}{2}\vartheta,\ \text{ecc.}$$

ed i logaritmi dell'altro valore -1 *saranno:*

$$\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}\gamma,\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \frac{1}{2}\eta,\ \text{etc.}$$

che sono diversi dai precedenti benché moltiplicati per due diano i logaritmi dell'unità. Similmente, se si prendono le radici cubiche si avrà

$$l1 = 0,\ \frac{1}{3}\gamma,\ \frac{1}{3}\zeta,\ \frac{1}{3}\iota,\ \text{ecc.}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}\delta,\ \frac{1}{3}\eta,\ \text{ecc.}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta,\ \frac{1}{3}\varepsilon,\ \frac{1}{3}\vartheta,\ \text{ecc.}$$

e questa considerazione ha già eliminato la maggior parte delle difficoltà che ci hanno ostacolato in precedenza.

Dunque questo è il radicale cambiamento di prospettiva operato da Eulero, la rimozione dell'ipotesi, tacitamente ammessa da Nepero in poi, che ad ogni numero competesse un unico logaritmo: *Dopo aver ben soppesato tutte le difficoltà appena esposte, ritengo che esse provengano dal fatto che noi supponiamo che ogni numero non ha che un logaritmo.*[2] ([2], p. 276)

Il punto cruciale del lavoro [2] inizia col § 24 dove Eulero dà sostanza al suo progetto di associare infiniti logaritmi ad un numero. L'analogia che lo guida è il legame esistente tra archi di circonferenze e logaritmi che è alla base anche della quadratura di Bernoulli del 1702. Eulero considera la circonferenza più adatta, perché meglio studiata, della curva logaritmica per risolvere in tutta generalità il problema. Così come l'assegnazione del seno e del coseno di un arco individua un'infinità di archi, lo stesso deve accadere per i logaritmi.

[2] Après avoir bien pesé toutes les difficultés que je viens d'étaler, j'ai trouvé qu'elles ne viennent que de ce que nous supposons que chaque nombre n'a qu'un seul logarithme.

Testo 8.2 (EULERO) , ([2], pp. 277-278). Originale 8.7

Per dimostrare questa pluralità infinita di logaritmi corrispondenti ad ogni numero non occorre altro che considerare lo stretto rapporto esistente tra i logaritmi e gli archi di circonferenza: è noto infatti che gli archi di circonferenza si possono esprimere tramite logaritmi immaginari e, viceversa, i logaritmi sono esprimibili tramite archi immaginari di circonferenza. Dunque, siccome il seno od il coseno corrispondono ai numeri e gli archi ai logaritmi, così come ad uno stesso seno corrisponde ad un'infinità di archi distinti, allo stesso modo ad uno stesso numero deve corrispondere un'infinità di logaritmi distinti. Noi abbiamo una miglior conoscenza della circonferenza che non della curva logaritmica e pertanto sarà l'esame della circonferenza piuttosto che della curva logaritmica a condurci verso una più completa conoscenza dei logaritmi; inoltre, possiamo determinare tutti gli archi che corrispondono ad un valore del seno o del coseno e anche se questi archi diventano immaginari nel passaggio ai logaritmi, non ci abbandoneranno e ci convinceranno circa l'infinità dei logaritmi, ci consentiranno di conoscerne le espressioni ed il tipo di non-realtà entro cui sono compresi; ciò è tutto quanto uno possa desiderare per la comprensione di una quantità immaginaria.

§25. Sia φ un arco qualsiasi di una circonferenza che supporrò avere raggio $= 1$. Sia x il seno di questo arco ed y il coseno, cosicché $y = \sqrt{(1-x^2)}$; dunque, detta $= 2\pi$ la lunghezza di tale circonfenza, cioè posto l'arco di $180° = \pi$, è chiaro che tutti gli archi compresi nell'espressione generale $= 2n\pi + \varphi$ avranno non solo lo stesso seno $= x$ ma anche lo stesso coseno $= y = \sqrt{(1-x^2)}$, a patto che n indichi un numero intero arbitrario. Poiché $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, se si pone $x = z\sqrt{-1}$, si avrà $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}$. È però noto che $\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1+z^2)}} = l(\sqrt{(1+z^2)}+z)+C$. Di conseguenza avremo $\varphi = \sqrt{-1}l(\sqrt{(1-x^2)}+\frac{x}{\sqrt{-1}})+C$, da cui è chiaro che la costante C è $= 0$, poiché posto $x = 0$, anche l'arco φ deve annullarsi. Poiché allora $\varphi = \sqrt{-1}l(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1})$, avremo $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1})$ ovvero

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(y + x\sqrt{-1}).$$

§26. L'equazione appena trovata, che esprime il rapporto tra l'arco φ ed il suo seno e coseno, sarà valida anche per tutti gli altri archi che hanno lo stesso seno x e lo stesso coseno y; di conseguenza avremo

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(y + x\sqrt{-1}) \quad \textit{e dunque} \quad l(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}\,,$$

da cui è chiaro che lo stesso numero $y + x\sqrt{-1}$ corrisponde ad una infinità di di logaritmi, tutti racchiusi entro la formula generale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$ in cui come n si può prendere un numero intero a piacere. Siccome x è il seno ed y il coseno dell'arco φ, posti $x = \sin\varphi$ ed $y = \cos\varphi$, noi avremo l'uguaglianza

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}\,. \tag{8.1}$$

Osserviamo che il passaggio da $\varphi = \sqrt{-1}l(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1})$ a $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1})$ si ottiene moltiplicando e dividendo la prima espressione per $\sqrt{-1}$ per ottenere a $\varphi = -\frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}-x\sqrt{-1}})$, in virtù delle proprietà dei logaritmi, da cui si ottiene $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1})$ grazie ad una razionalizzazione.

La parte teorica di [2] è terminata con la formula (8.1), analoga alla celebre rappresentazione

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{8.2}$$

che era già comparsa nel 1724 nella *Logometria* [4], opera postuma di Roger Cotes (1682-1716), dove era stata ottenuta come risultato collaterale alla determinazione dell'area di un ellissoide di rivoluzione: complice tuttavia lo stile un po' oscuro della presentazione, la formula (8.2) era passata inosservata. Eulero chiude il lavoro [2] con una serie di esempi che si trovano sostanzialmente anche nella seconda parte di [1] che ora esaminiamo. Anzitutto in quest'opera non traspare il travaglio presente in [2].

Bisogna anzitutto riconoscere che se il concetto che i Sigg. Leibnitz e Bernoulli, come tutti i matematici sinora, hanno legato al termine logaritmo fosse del tutto corretto, sarebbe assolutamente impossibile liberare la teoria dei logaritmi dalle contraddizioni che mi accingo ad esporre. Come è possibile che il concetto di logaritmo, tratto dalla sua origine di cui abbiamo una perfetta conoscenza, sia imperfetto? Non sembra che manchi nulla alla correttezza di tale concetto, quando si dice che il logaritmo di un numero assegnato è l'esponente della potenza di un certo numero preso a piacere che è uguale al numero assegnato. Questo è senz'altro vero, ma lo si abbina ad una circostanza che non gli compete affatto: cioè a dire che, quasi senza accorgersene, si fa solitamente l'ipotesi che a ciascun numero non possa corrispondere che un solo logaritmo; non appena si rifletta un poco, si vedrà che tutte le difficoltà e le contraddizioni in cui la teoria dei logaritmi pareva bloccata sussistono solo finché si suppone che ad ogni numero non corrisponda che un logaritmo soltanto. Affermo dunque, per far sparire tutte queste difficoltà e contraddizioni, che in forza della stessa definizione, a ciascun numero corrisponde un'infinità di logaritmi, come dimostrerò nel teorema seguente.[3] ([1], pp.155-156)

[3] Il faut d'abord avoüer, que l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attaché au terme de logarithme, & que tous les Mathematiciens ont jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de proposer. Or l'idée des logarithmwes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fut défecteuse? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exponant de la puissance d'un certain nombre pris a volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance, qui ne lui convient point: c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme: & pour peu qu'on y réflêchisse, on trouvera que toutes les difficulté & contradictions, dont la doctrine des logarithme sembloit embarassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose, qu'à chaque nombre nu répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu de mème de la définition donnée il répond ḫaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

Siamo così giunti al cuore del lavoro del 1749 dove EULERO dimostra ancora come ad ogni numero corrisponda un'infinità di logaritmi. Senza ledere la generalità, la dimostrazione è condotta per i logaritmi naturali e poggia su un argomento che riecheggia di lontano quello usato da HALLEY in [5]. EULERO osserva che dato un numero ω *infiniment petit*, vale l'uguaglianza (approssimata, diremmo oggi) $\ln(1+\omega) = \omega$ da cui segue, per un numero n arbitrario, che $y := \ln(1+\omega)^n = n\omega$. Perché $x := (1+\omega)^n$ possa descrivere un numero arbitrario occorre prendere $n \gg 1$ (*un nombre infini*), visto che $\omega \ll 1$. Ora, siccome $\omega = x^{1/n} - 1$ si vede che $y = nx^{1/n} - n$ che tende a $\ln x$ quanto più grande è n. Ma poiché $x^{1/2}$ ha due valori distinti, $x^{1/3}$ tre, $x^{1/4}$ quattro, si vede che, al crescere di n i valori possibili per y aumentano all'infinito. L'argomento di EULERO fu attaccato ripetutamente perché, scegliendo $\omega \ll 1$, il numero $1+\omega$ non cambia segno e dunque non si può mai ottenere un numero negativo ad argomento del logaritmo, anche facendo tendere n all'infinito [3]. Al contrario, EULERO applica il risultato del teorema a logaritmi di numeri negativi ed immaginari. In realtà, i rilievi mossi riguardano la tecnica dimostrativa adottata nel lavoro del 1751 ma non si applicano alla dimostrazione di [2] che però apparve solo nel 1862. Resta il fatto che la dimostrazione di EULERO basata sulle serie non fu sempre accettata e per questo la sua teoria dei logaritmi dei numeri complessi non trovò unanime consenso. Bisogna osservare peraltro che nella *Introductio in Analysin Infinitesimorum* [6] EULERO ripete questo argomento osservando che, preso un numero infinito n l'espressione $(1+\omega)^n$ può diventare uguale a qualunque numero reale *maggiore* dell'unità, evidenziando indirettamente la debolezza di questo argomento (*cfr.* §8.3).

Testo 8.3 (EULER) , ([1], pp. 156-157). Originale 8.8

Teorema. Esiste sempre una infinità di logaritmi che corrispondono ad ogni numero assegnato: in altre parole, se y indica il logaritmo del numero x, dico che y racchiude un'infinità di valori diversi.

Dimostrazione. Mi limiterò qui ai logaritmi iperbolici, dal momento che è noto come i logaritmi di tutte le altre specie stanno ai primi in un rapporto costante; così, quando si indica con y il logaritmo iperbolico del numero x, il logaritmo tabulare dello stesso numero sarà $= 0.4342944819.y$. Ora, il fondamento dei logaritmi iperbolici è che se ω ha il significato di numero infinitamente piccolo, il logaritmo del numero $1+\omega$ sarà $= \omega$ ovvero $l\,(1+\omega). = \omega$. Da questo segue che $l\,(1+\omega)^2. = 2\omega$; $l\,(1+\omega)^3 = 3\omega$ e, in generale $l\,(1+\omega)^n = n\omega$. Poiché però ω è un numero infinitamente piccolo, è evidente che il numero $(1+\omega)$ non potrà uguagliare un certo numero x assegnato, a meno che l'esponente n non sia un numero infinito. Sia dunque n un numero infinitamente grande e, posto $x = (1+\omega)^n$, il logaritmo di x, che è stato chiamato $= y$, sarà $y = n\omega$. Dunque esprimendo con x, la prima formula fornisce $1+\omega = x^{\frac{1}{n}}$ ed $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$ valore che, sostituito al posto di ω nell'altra formula, darà $y = nx^{\frac{1}{n}} - n = l\,x$. È allora chiaro che il valore della formula $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$ approssimerà tanto meglio il logaritmo di x quanto più il numero n sarà preso grande; e se si prende per n un numero infinito, questa formula darà il vero valore del logaritmo di x. Ora, siccome è vero che $x^{\frac{1}{2}}$ ha due valori diversi, $x^{\frac{1}{3}}$ ne ha tre, $x^{\frac{1}{4}}$ quattro e così via,

sarà altrettanto certo che $x^{\frac{1}{n}}$ *deve avere un'infinità di valori diversi per* $l\,x$*, visto che* n *è un numero infinito. Di conseguenza, questa infinità di valori distinti di* $x^{\frac{1}{n}}$ *darà luogo ad un'infinità di valori distinti per* $l\,x$ *per cui il numero* x *deve possedere un'infinità di logaritmi. C.D.D.*

Ecco come EULERO conclude ancora che ci sono un infinità di numeri distinti da $+1$, con logaritmo 0 dei quali solo $+1$ è un numero reale, alla stessa stregua in cui $+1$, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ sono tutte radici cubiche dell'unità, ma la sola reale è $+1$.
Da ciò segue che 0 *non è il solo valore del logaritmo di +1, ma che esiste un'infinità di altre quantità, ciascuna delle quali è il logaritmo di* $+1$*. Tuttavia si comprende facilmente che tutti questi altri logaritmi, tranne il primo che è* 0*, saranno quantità immaginarie; si ha dunque il diritto nei calcoli di non considerare che* 0 *come logaritmo di +1, come quando si tratta della radice cubica di 1, dove non si considera che 1, benché le quantità immaginarie* $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ *e* $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ *siano anch'esse radici cubiche di 1. Ma quando si vuole confrontare il logaritmo di 1 con i logaritmi di* -1 *o di* $\sqrt{-1}$ *che, come mostrerò in seguito, sono tutti immaginari, occorre considerare il logaritmo di 1 in tutta la sua portata: allora tutte le difficoltà e contraddizioni riportate qui sopra spariranno da sole. Infatti, detti* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ *ecc. i logaritmi immaginari dell'unità che le corrispondono bene quanto lo 0, si comprenderà facilmente come si possa avere* $2l-1=l+1$*, anche se tutti i logaritmi di* -1 *sono immaginari: infatti, per sodisfare l'equazione* $2l-1=l+1$ *è sufficiente che il doppio di ciascun logaritmo di* -1 *si trovi tra i logaritmi immaginari di* $+1$*. Allo stesso modo, affinché* $4l\sqrt{-1}=l+1$*, occorre incontrare ogni logaritmo di* $\sqrt{-1}$ *moltiplicato per 4 nella serie* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ *ecc. Le uguaglianze* $2l-1=l+1$ *&* $4l\sqrt{-1}=l+1$ *possono sussistere senza essere costretti a sostenere che* $l-1=0$ *oppure* $l\sqrt{-1}=0$*, come ha preteso il sig. Bernoulli.*[4] ([1], pp.157-158)

Per sostanziare questa affermazione, EULERO risolve quattro problemi:

- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero positivo $+a$.
- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero negativo $-a$.

[4] De là il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $=0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autre quantités, dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 seront des quantités imaginaires; de sorte que dans le calcul on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de méme que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ soient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1, ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son etenduë; et alors toutes les difficultés & contradictions rapportés cy-dessus disparoitront d'elles memes. Car soient $\alpha, \beta, \gamma\,\delta, \varepsilon, \zeta$ &c. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0 & on comprendra aisément qu'il peut être $2l-1=l+1$, qouique tous les logarithmes de -1 soient imaginaires: car pour satisfaire à l'equation $2l-1=l+1$, il suffit que le double de tous les logaerithmes de -1, se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De méme, puisque $4l\sqrt{-1}=l+1$, chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans le serie $\alpha, \beta, \gamma\,\delta, \varepsilon, \zeta$ &c. Ainsi les égalités $2l-1=l+1$ & $4l\sqrt{-1}=l+1$, se peuvent mantenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l-1=0$ ou $l\sqrt{-1}=0$, comme M. Bernoulli a prétendu.

- Determinare *tutti* i logaritmi di un assegnato numero immaginario.
- Trovare il numero che corrisponde ad un assegnato logaritmo:

i primi tre problemi erano già stati affrontati nel lavoro del 1747 (pp. 278-280 di [2]). La strategia è la stessa in tutti e tre i problemi diretti. Quando si tratta di ottenere i logaritmi di un numero reale positivo a, EULERO parte dal suo logaritmo reale A ottenuto dalle tavole, per osservare che, siccome $a = 1 \cdot a$, si deve avere $l\,a = l\,1 + A$ cosicché il problema si riduce a trovare tutti i logaritmi di $+1$. Posto $x = 1$ nel teorema dimostrato in precedenza, si tratta di risolvere in y l'equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$$

dove n è un numero intero arbitrariamente grande. Ora, poiché i fattori del binomio $p^n - q^n$ si trovano risolvendo in p l'equazione

$$p^2 - 2pq\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + q^2 = 0$$

dove il numero intero λ può assumere tutti i valori possibili da 0 a ± 1, ± 2,...,$\pm n$ si avrà in generale

$$p = q\left[\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right)\right]$$

che, posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q = 1$ consente di ottenere, per un generico n

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right).$$

Inoltre, siccome n è grande a piacere, si possono utilizzare le espressioni approssimate $\cos\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = 1$ e $\sin\left(\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = \frac{2\lambda\pi}{n}$ per concludere che

$$y = \ln(1) = \pm 2\lambda\sqrt{-1} \quad \lambda\,\text{numero pari:}$$

esiste dunque un solo logaritmo reale di $+1$, che vale 0, mentre tutti gli altri sono numeri complessi. Osserviamo che l'argomento di EULERO è valido a patto di fissare λ e poi mandare n all'infinito. Ottenuti i logaritmi dell'unità, EULERO convince il lettore che le proprietà di trasformare prodotti in logaritmi persistono inalterate in seguito all'estensione dei logaritmi così operata. Detti A e B i logaritmi reali di a e b, si ha

$$l\,a = A + 2\lambda\pi\sqrt{-1}\,, \quad l\,b = B + 2\lambda\pi\sqrt{-1}$$

per cui dalla somma dei primi due si ricava

$$l\,a + l\,b = A + B + 2\zeta\pi\sqrt{-1}\,,$$

dove ζ è ancora un intero per cui il membro di destra comprende tutti i logaritmi di ab.

Il problema successivo, in cui occorre calcolare il logaritmo di un numero negativo $-a$ chiarisce la soluzione della controversia sui logaritmi dei numeri negativi. Scritto $-a = -1 \cdot a$, il problema si riduce a trovare i logaritmi di -1. Con lo stesso procedimento di prima, tale logaritmo y risolve l'equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$$

che ha la forma $p^n + q^n = 0$ ed i cui fattori sono le radici dell'equazione

$$p^2 - 2pq\cos\left(\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right) + q^2 = 0$$

dove λ è un intero arbitrario. Trasponendo il procedimento seguito prima si conclude che

$$y = \pm(2\lambda - 1)i\pi$$

e pertanto $l(-a) = A \pm (2\lambda - 1)\pi i$ che non è mai un numero reale. Eulero dà ragione a Leibniz per aver sostenuto contro Bernoulli che i logaritmi dei numeri negativi fossero immaginari e mostra anche come vengano meno tutte le contraddizioni con cui si era chiusa la controversia. Infatti $l\,(-1)^2 = \pm 2(2\lambda - 1)\pi i$ rappresenta un logaritmo di $+1$ cosicché resta vero che $2l\,(-1) = 2l\,(+1)$ senza che si abbia $l\,(-1) = l\,(+1)$. L'uguaglianza viene interpretata nel senso che tutti i logaritmi di -1 moltiplicati per 2 si ritrovano tra i logaritmi di $+1$. Similmente, si può concludere che $2l\,(-a) = 2l\,(+a)$ senza per questo concludere che $l\,(-a) = l(+a)$.

Il terzo ed ultimo problema diretto consiste nel determinare tutti i logaritmi di un numero immaginario. Partendo dalla rappresentazione rettangolare di un numero complesso $a + ib$ e posto $c := \sqrt{a^2 + b^2}$, Eulero introduce un angolo φ tale che

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e che permetta di scrivere $a + ib = c(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Per utilizzare lo stesso procedimento adoperato in precedenza, Eulero mostra che

$$x := (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$$

semplicemente considerando gli sviluppi in serie di Mac Laurin di $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$ e $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots$ e confrontandone la somma termine a termine con lo sviluppo binomiale

$$\left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \ldots.$$

Posto $p = 1 + \frac{y}{n}$ e $q := \frac{1+i\varphi}{n}$, il problema si riduce a risolvere in y l'equazione

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0,$$

che è ancora della forma $p^n - q^n = 0$ ma questa volta ha soluzione

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

da cui segue, al primo ordine in n,

$$1 + \frac{y}{n} = 1 + \frac{i\varphi}{n} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}$$

cioè $y = i(\varphi \pm 2\lambda\pi)$,

In generale, osserva EULERO, i logaritmi di numeri complessi sono complessi a loro volta e, detto $C := \log c = \log\sqrt{a^2+b^2}$, i logaritmi di $a+ib$ si esprimono come $C + (\varphi \pm p\pi)\sqrt{-1}$, dove p è un arbitrario numero pari. EULERO nota da questa formula che, qualora $\varphi\pi$ sia un numero razionale μ/ν la potenza $(a+ib)^\nu$ è un numero reale in quanto

$$l\,(a+ib)^\nu = \nu C + (\mu + \nu p)\pi i$$

che, se μ —e dunque $(\mu + \nu p)$— è un numero pari mostra per esponenziazione che $(a+ib)^\nu = c^\nu$, mentre se μ è dispari, $(a+ib)^\nu = -c^\nu$. Dopo aver esaminato i logaritmi di numeri complessi in cui $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, ...3)$, $k\frac{\pi}{3}$ e $k\frac{\pi}{4}$, EULERO mostra l'accordo della teoria con i risultati di BERNOULLI sulla quadratura del cerchio perché ora il rapporto $l + 1/\sqrt{-1}$ ha valore $\pm p\pi$, mentre $l - 1/\sqrt{-1} = \pm q$.

Per concludere, EULERO studia il problema di trovare il numero x cui corrisponda un dato logaritmo, anche qui distinguendo tre casi, a seconda che il logaritmo proposto f sia reale, immaginario puro o complesso. Nel primo caso, se f è reale, allora $x = e^f$. Quando il logaritmo è un numero del tipo ig, posto $g = m\pi$, se m è un intero pari o dispari allora x è ± 1 altrimenti, se m non è un intero, l'antilogaritmo è un numero immaginario; preso su un cerchio di raggio unitario un arco di ampiezza g, deve essere $x = \cos g + \sqrt{-1}\sin g$. Infine, se il logaritmo è della forma $f + ig$, allora l'antilogaritmo è $x = \mathrm{e}^f(\cos g + i\sin g)$.

Riportiamo l'originale della soluzione del secondo problema anche per la sua rilevanza circa la soluzione della controversia LEIBNIZ-BERNOULLI.

Testo 8.4 (EULERO) ([1], pp.161-163). Originale 8.9

Problema II.

Determinare tutti i logaritmi corrispondenti ad un numero negativo qualsiasi $-a$.

SOLUZIONE.

Siccome $-a = -1 \cdot a$, si avrà $l\ -a = l\,a + l - 1$ e, preso il logaritmo reale di a come $l\,a$, tutti i logaritmi del numero negativo $-a$ si troveranno cercando tutti i logaritmi di -1. Poiché però si è visto in generale che, chiamato y come logaritmo di un x, si ha $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, ne segue che $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ e dunque

$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. *Pertanto* y *esprimerà tutti i logaritmi di* -1 *se si pone* $x = -1$ *cosicché tutti i logaritmi di* -1 *saranno le radici dell'equazione* $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, *prendendo il numero* n *infinitamente grande.*

È noto che tutte le radici dell'equazione generale $p^n + q^n = 0$ *si ottengono dalla risoluzione della formula* $p^2 - 2pq\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, *in cui* λ *assume successivamente tutti i valori interi, positivi e negativi cosicché si avrà* $p = q\left(cos\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. *Pertanto, le radici dell'equazione proposta:*

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0\,,$$

sono abbracciate tutte dalla formula generale

$$1+\frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin.\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\,,$$

che diventa, siccome $n = \infty$,

$$y = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}\,.$$

Di conseguenza, inserendo al posto di λ *successivamente tutti i valori che gli competono, si otterranno tutti i logaritmi di* -1:

$$\pm\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm3\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm5\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm7\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm9\pi\sqrt{-1}\,;\ ecc.$$

il cui numero è infinito. C.D.T.

È allora chiaro che tutti i logaritmi di un numero negativo qualsiasi sono immaginari e che non esiste alcun numero negativo con logaritmo reale. Aveva dunque ragione il sig. Leibniz a sostenere che i logaritmi dei numeri negativi fossero immaginari. Tuttavia, poiché anche i numeri positivi posseggono una infinità di logaritmi immaginari, tutte le obiezioni del sig. Bernoulli contro questa opinione perdono vigore. Infatti, siccome è $l - 1 = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, *il logaritmo del suo quadrato sarà* $l(-1)^2 = \pm2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, *espressione compresa tra i logaritmi di* $+1$, *cosicché resta vero che* $2l - 1 = l + 1$ *benché non si trovi alcuno dei logaritmi di* -1 *tra quelli di* $+1$. *Sia* A *il logaritmo reale del numero positivo* $+a$, *indichiamo con* p *un generico numero pari e con* q *un generico numero dispari: poiché in generale:*

$$l + 1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad l - 1 = \pm q\pi\sqrt{-1}\,.$$

$$\text{e} \quad l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}\,,$$

si vede che $l(-a)^2 = 2l - a = 2A + 2q\pi\sqrt{-1}$. *O, siccome* $2q$ *è* $= p$ *e* $2A$ *è il logaritmo reale di* a^2, *si vede che* $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ *è la formula generale per i logaritmi di* a^2; *così è* $l(-a)^2 = l\,a^2$ *o anche* $2l - a = 2l + a$, *benché non si abbia* $l - a = l + a$: *conclusione che sarebbe senza dubbio contraddittoria se i numeri* $+a$ *e* $-a$ *non avessero avuto che un solo logaritmo; in quel caso sarebbe corretto concludere che* $l - a = l + a$ *quando* $2l - a = 2l + a$. *Se però siamo d'accordo che sia* $-a$ *che* $+a$ *hanno un'infinità di logaritmi questa conseguenza,*

necessaria in precedenza, non è più corretta; infatti, perché sia $2l - a = 2l + a$ *basta che il doppio dei logaritmi di* $-a$ *si ritrovino tra i logaritmi di* $+aa$*, ciò che si può ottenere, come abbiamo visto, senza che ci sia l'uguaglianza di un qualche logaritmo di* $-a$ *con qualche logaritmo di* $+a$*.*

8.2 La relazione $i^i = e^{-\pi/2}$

Se la teoria dei logaritmi dei numeri complessi ha segnato una svolta fondamentale, EULERO ha lasciato anche altri contributi degni di nota in materia. Il primo è contenuto in una corposa memoria pubblicata nel 1751 dal titolo *Recherches sur les racines imaginaires des equations* [1] dedicata alla risolubilità in campo complesso delle equazioni algebriche. Si tratta di un'opera di ampio respiro che ha molti aspetti interessanti per la storia della matematica ma la cui rilevanza nella storia dei logaritmi fu apprezzata da CAJORI nel 1913 [3]. In effetti il problema oggetto del lavoro sembra lontano dai logaritmi che a ben vedere vengono trattati solo in alcune sezioni (§§85-105) verso la fine del lavoro. Qual è dunque lo scopo principale perseguito da EULERO in questo lavoro e come entrano i logaritmi? Affermato che un'equazione algebrica di grado n ammette n radici, reali o complesse, EULERO si pone il problema di scomporre un polinomio di grado n a coefficienti *reali* in fattori ancora a coefficienti reali, di grado il più basso possibile. Ciò sembrava non essere in generale possibile. EULERO riporta un'equazione propostagli da un *très savant Géometre* in cui il compito appare difficile. Si tratta dell'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

che ha solo radici immaginarie e che può essere riscritta nella forma

$$(x^2 + px + 1)(x^2 + qx + 1) = 0$$

con $p = 1 + i$ e $q = 1 - i$ e sembra dunque non ammettere una scomposizione in fattori quadratici a coefficienti reali. EULERO non si arrende di fronte alle apparenze e cerca i fattori lineari in cui scomporre l'equazione di partenza e si imbatte in radicali doppi, precisamente i fattori lineari sono

$$x + \frac{1}{2}[(1+i) \pm \sqrt{2i-4}] = 0 \qquad \text{e} \qquad x + \frac{1}{2}[(1-i) \pm \sqrt{-2i-4}] = 0\,.$$

Nel ridurre i radicali doppi alla forma $x + iy$, con x ed y numeri reali, EULERO riconosce che i fattori sono a due a due complessi coniugati e dunque, ricombinati opportunamente, permettono di fattorizzare il polinomio di quarto grado nel prodotto di due polinomi di grado due a coefficienti reali. Non possiamo addentrarci in un'analisi dettagliata di questa parte del lavoro di EULERO ma ci limitiamo a riassumere i principali risultati e gli aspetti più salienti per la storia dei logaritmi. Dopo aver trattato polinomi di grado 4, 8, 16, EULERO mostra (Teorema VII, §45 di [1]) che ogni polinomio di grado 2^n si può scomporre in due fattori di grado 2^{n-1} a coefficienti reali e dunque, per iterazione del procedimento, ad una scomposizione in 2^{n-1} fattori di grado due, a coefficienti reali.

In seguito, egli mostra che un'equazione di grado $4n+2$, $8n+4$, $16n+8$,... $2^k n + 2^{k-1}$ ammette sempre almeno un fattore reale di grado, rispettivamente 2, 4, 8,...2^{k-1}, a coefficienti reali e dunque, riconducendosi al caso precedente, si ottiene la scomposizione in fattori reali di grado due. Il caso degli esponenti dispari, in cui si conosce l'esistenza di almeno una radice reale, viene ricondotto a quelli studiati prima per moltiplicazione del polinomio per un opportuno fattore x^m. Raccolto poi x^m, resta la scomposizione del polinomio di partenza in fattori a coefficienti reali di grado uno o due. Per Eulero, come già per Leibniz,

Una quantità è detta immaginaria quando non è né maggiore di zero, né minore di zero, né uguale a zero; sarà allora qualcosa di impossibile come, ad esempio $\sqrt{-1}$ *o, in generale,* $a + b\sqrt{-1}$.[5] (p.223 di [1])

Si può essere certi che le radici immaginarie (nel senso di questa definizione) di un'equazione algebrica sono esprimibili nella forma $M + iN$, con M ed N numeri reali? A questa domanda si può rispondere affermativamente in virtù del risultato ottenuto in precedenza, che consente di scomporre in fattori di grado uno o due a coefficienti reali un polinomio di grado arbitrario e, per questa classe di fattori è noto che le radici, quando non sono reali, sono della forma $M + iN$. Acclarato questo, Eulero si pone il problema di mostrare la chiusura dei numeri immaginari della forma $M + iN$ sotto le operazioni di somma, sottrazione, prodotto, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice con potenza (indice, rispettivamente) reale: si tratta di un risultato in parte mostrato da D'Alembert nel volume II delle *Mémoires* dell'Accademia di Berlino, ricorrendo all'uso di discusse quantità infinitesime.

Eulero attacca due problemi che ci porteranno alla relazione che ha dato il titolo a questa sezione. Nel Problema II, egli cerca il valore immaginario (*valeur imaginaire*) di una potenza di base reale ed esponente immaginario ed ottiene l'uguaglianza

$$a^{m+in} = x + iy \quad \text{con } x = a^m \cos(\, n \ln\, a) \text{ e } x = a^m \sin(\, n \ln\, a)\,.$$

Applicando il risultato ottenuto al caso $m = 0$ egli scrive

$$a^{in} = \cos(\, n \ln\, a) + i \sin(\, n \ln\, a)$$

ed

$$a^{-in} = \cos(\, n \ln\, a) - i \sin(\, n \ln\, a)$$

da cui ottiene

$$\cos(\, n \ln\, a) = \frac{a^{in} + a^{-in}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\, n \ln\, a) = \frac{a^{in} - a^{-in}}{2i} \ :$$

posto $a = 1$ segue allora che $(1)^{\pm in} = 1$. Il problema che più ci interessa è il successivo (Problema III) in cui anche la base è un numero complesso del tipo

[5] On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zero, ni plus petite que zero, ni égale à zero; ce sara donc quelque chose d'impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a + b\sqrt{-1}$.

$(a+ib)$ ed occorre determinare i numeri reali x ed y tali che

$$(a+ib)^{m+in} = x + iy\,. \tag{8.3}$$

La tecnica di dimostrazione, applicata a tappeto da EULERO in questo lavoro, consiste nel prendere il logaritmo dei due membri dell'equazione (8.3) e passare ai differenziali per poi separare parte reale da parte immaginaria ottenendo

$$x = c^m \mathrm{e}^{-n\phi}\cos(m\phi + n\ln c) \quad \text{e} \quad y = c^m \mathrm{e}^{-n\phi}\sin(m\phi + n\ln c)\,,$$

dove $c := \sqrt{a^2+b^2}$ e ϕ è un angolo definito, in modo non univoco, dalla relazione $\phi = \arctan\frac{b}{a}$. In particolare, preso $b = 0$, ϕ potrà assumere uno degli infiniti valori $\phi = 2\lambda\pi$, con λ intero arbitrario, col che resta mostrata l'identità

$$(a)^{m+in} = a^m \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi}\left[\cos(2\lambda m\pi + n\ln a) + i\sin(2\lambda m\pi + n\ln a)\right]$$

che mostra come potenze ad esponenti complessi abbiano un'infinità di valori distinti. Più in generale, se anche $b \neq 0$ si ha

$$(a+ib)^{m+in} = c^m \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi - n\phi}\left[\cos(2\lambda m\pi + m\phi + n\ln c) + i\sin(2\lambda m\pi + m\phi + n\ln c)\right]$$

che, quando $a = 0$, $m = 0$ e $b = 1$, di modo che $\phi = \frac{\pi}{2}$, diventa

$$(i)^{(in)} = \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi - \frac{1}{2}n\pi} \tag{8.4}$$

che per $n = 1$ fornisce la relazione $i^i = \mathrm{e}^{-2\lambda\pi - \frac{1}{2}\pi}$: i^i è dunque reale e tra i suoi valori spicca $i^i = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

Testo 8.5 (EULERO) ([1], pp. 272–275). Originale 8.10

Problema III

Trovare il valore immaginario di una potenza ottenuta elevando una quantità immaginaria ad una potenza il cui esponente è pure immaginario.

SOLUZIONE

Sia $a + b\sqrt{-1}$ la quantità immaginaria ed $m + n\sqrt{-1}$ l'esponente della potenza, così che occorre trovare il valore dell'espressione $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$. A questo scopo poniamo dunque:

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

e, presi i logaritmi si avrà:

$$(m + n\sqrt{-1})\, l(a + b\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1}).$$

Passiamo ai differenziali e, come abbiamo già visto, poiché

$$d.l(x + y\sqrt{-1}) = \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{xdy - ydx}{xx + yy}\sqrt{-1}$$

avremo:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb}+\frac{n(ada+bdb)\sqrt{-1}}{aa+bb}\\ +\frac{m(adb-bda)\sqrt{-1}}{aa+bb}-\frac{n(adb-bda)}{aa+bb}\end{array}\right\}=\frac{xdx+ydy}{xx+yy}+\frac{(xdy-ydx)\sqrt{-1}}{xx+yy}$$

Uguagliando adesso separatamente le parti reali e quelle immaginarie, otterremo le uguaglianze:

$$\begin{array}{l}\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb}-\frac{n(adb-bda)}{aa+bb}=\frac{xdx+ydy}{xx+yy}\\ +\frac{m(adb-bda)}{aa+bb}+\frac{n(ada+bdb)}{aa+bb}=\frac{(xdy-ydx)}{xx+yy}\end{array}$$

Per ottenerne gli integrali sia

$$\sqrt{(aa+bb)}=c \quad \text{e} \quad \text{Atang}\frac{b}{a}=\phi\,;$$

ovvero $\sin\phi=\frac{b}{c}$ *e* $\cos\phi=\frac{a}{c}$, *da cui è sempre possibile ricavare l'angolo* ϕ; *supporrò ora che* c *sia una quantità positiva* $=\sqrt{(aa+bb)}$. *Dopo questo richiamo, i nostri integrali saranno:*

$$m\,lc-n\phi=l\sqrt{(xx+yy)}$$

$$m\phi+n\,lc=\text{Atang.}\frac{y}{x}\,.$$

Da ciò segue che sarà $\sqrt{(xx+yy)}=c^m\mathrm{e}^{-n\phi}$, *chiamato* e *il numero il cui logaritmo iperbolico è* $=1$. *Dunque, per trovare i valori di* x *ed* y *dall'equazione:*

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}\,,$$

posto $c=\sqrt{(aa+bb)}$ *e preso l'angolo* ϕ *in modo che sia* $\cos\phi=\frac{a}{c}$ *e* $\sin\phi=\frac{b}{c}$, *si avrà:*

$$x=c^m\mathrm{e}^{-n\phi}\cos(m\phi+nl\,c) \quad e \quad y=c^m\mathrm{e}^{-n\phi}\sin(m\phi+nl\,c).$$

(...)

COROLL. III.

In generale, pertanto, prese delle quantità qualsiasi a *e* b, *attribuito a* c *il valore positivo di* $\sqrt{aa+bb}$ *e preso un angolo* ϕ *tale che* $\sin\phi=\frac{b}{c}$ *e* $\cos\phi=\frac{a}{c}$, *siccome in generale si può anche prendere come angolo* ϕ *l'angolo* $2\lambda\pi+\phi$, *dove* λ *indica un numero intero qualsiasi, positivo o negativo, si avrà*

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=c^m\mathrm{e}^{-2\lambda n\pi-n\phi}\left(\begin{array}{l}+\cos(2\lambda m\pi+m\phi+nl\,c)\\ +\sqrt{-1}.\sin(2\lambda m\pi+m\phi+nl\,c)\end{array}\right)$$

da cui si otterranno tutti i possibili valori racchiusi dalla formula $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ *attribuendo successivamente a* λ *tutti i valori* $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$ *ecc. dove basta prendere come* c^m *il suo solo valore reale e positivo.*

COROLL. IV.

Se $a = 0$; $m = 0$, e $b = 1$, si avrà $c = 1$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ da cui si trae la trasformazione:

$$(\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi - \frac{1}{2}n\pi}$$

ovvero $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \mathrm{e}^{-2\lambda\pi - \frac{1}{2}\pi}$, che è tanto più notevole perché è un numero reale e comprende un infinità di valori reali. Ponendo $\lambda = 0$ si avrà, in cifre

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0,2078795763507\,.$$

8.3 I logaritmi nei manuali di Eulero

Abbiamo sin qui esplorato parte della letteratura specialistica che Eulero dedicò alla teoria dei logaritmi ed abbiamo visto come questa si sia trasformata in un edificio coerente, privo delle contraddizioni in cui si dibatteva all'epoca della controversia tra Leibniz e Bernoulli. Esaminiamo qui alcuni passi tratti da uno dei manuali di analisi matematica redatti da Eulero, che esercitò grande influenza sui matematici contemporanei come su quelli di generazioni successive: la *Introductio in Analysin infinitesimorum* pubblicata nel 1748. Si tratta di un'opera in due volumi dove vengono affrontati tutti gli sviluppi significativi dell'analisi: dal calcolo integrale alle serie, dai prodotti infiniti alle frazioni continue, dalla risoluzione di equazioni differenziali ed algebriche alla teoria dei logaritmi. In quest'opera di divulgazione di alto livello, i logaritmi sono ormai saldati alla funzione esponenziale, come mostrato nel passo seguente, tratto dal I Libro, Capitolo VI *De Quantitatibus exponentialibus ac Logarithmis*

Allo stesso modo poi, assegnato un numero a, da qualsiasi valore dello stesso z è possibile risalire al valore di y e, viceversa, dato anche un qualsiasi valore positivo di y è possibile assegnare un conveniente valore di z in modo che $a^z = y$; inoltre questo valore di z, finché è considerato funzione dello stesso y, viene detto LOGARITMO di y. La dottrina dei logaritmi infatti suppone di mettere al posto di a, che per questo è detto base dei logaritmi, un certo numero fisso; fatto questo, il logaritmo di un qualsiasi numero y è quell'esponente della potenza a^z tale che a^z è uguale ad y; si è soliti indicare il logaritmo del numero y in questo modo: ly. Pertanto se è $a^z = y$, sarà $z = ly$.[6] (p.73 di [6])

Sentiamo familiare questa definizione che in realtà era già apparsa in qualche testo precedente come in un in un lavoro apparso però postumo solo nel 1771 del matematico gallese William Jones [7], cui dobbiamo la notazione di π

[6] Quemadmodum autem, dato numero a, ex quovis valore ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim, dato valore quoque quocunque affirmativo ipsius y, conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam Functio ipsius y spectatur, vocari solet LOGARITHMUS ipsius y. Supponit ergo doctrina Logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocabitur basis Logarithmorum; qua assumta erit Logarithmus cujusvis numeri y Exponens Potestatis a^z, ita ut ipsa Potestas a^z aequalis sit numero illi y; indicari autem Logarithmus numeri y solet hoc modo ly. Quod si ergo fuerit $a^z = y$, erit $z = ly$.

per indicare il rapporto tra lunghezza della circonferenza e diametro, apparso postumo:

1. Ogni numero è esprimibile da un'unica potenza di un medesimo numero radicale.

Infatti un numero qualsiasi si trova da qualche parte nella scala delle diverse potenze del numero radicale r i cui indici sono $m-1$, $m-2$, $m-3$, ecc. dove non solo vengono espressi i numeri r^{m-1}, r^{m-2}, ecc. ma anche ogni numero intermedio x è rappresentato da r con un appropriato indice z.

L'indice z è detto il logaritmo del numero x.

2. Dunque, per trovare il logaritmo z di un numero qualsiasi x, bisogna solo trovare la potenza del numero radicale r che è uguale al numero x; ovvero, trovare l'indice z della potenza nell'equazione $x = r^z$.[7](JONES, pp.455-456 di [7])

Della presentazione della teoria dei logaritmi contenuta nella *Introductio* prendiamo due passi che espongono la determinazione del logaritmo decimale di 5 e la dimostrazione dell'invarianza della sottotangente alla curva logaritmica. Si tratta di argomenti non originali ma che è utile leggere in parallelo ad analoghi passi di BRIGGS, KEPLERO e MERCATOR, nel primo caso, ed alle dimostrazioni di TORRICELLI ed HUYGENS nel secondo. Si apprezza comunque il fatto che l'uso di un formalismo più snello, sintetico, ed una maturità nell'utilizzo di strumenti ormai collaudati influisca sulla presentazione che è leggibile senza grandi problemi da un lettore *moderno*.

Vediamo ora come, in una tabella scarna e senza molti commenti, EULERO ottenga $\log 5$ partendo dall'osservazione che la carattteristica di $\log 5$ è 0 in quanto 5 è compreso tra 1 e 10 e procedendo, come già visto più volte, con la costruzione di una progressione geometrica basata su 1 e 10 e che contenga 5, almeno al grado di approssimazione richiesto.

Si ponga $a = 10$ come base logaritmica, come è d'abitudine trovare nelle tavole e si cerchi l'approssimazione migliore possibile del logaritmo di 5; poiché questo numero si trova nell'intervallo tra 1 e 10, i cui logaritmi sono 0 ed 1, si proceda nella successiva estrazione di radici nel modo che segue, finché non si giunga ad una distanza dal numero 5 sufficientemente piccola.

Occorre così prendere tanti medi proporzionali finché non si raggiunge $Z = 5,000000$ da cui si ricava che il logaritmo richiesto di 5 è $0,696870$, preso 10 come base logaritmica. Infatti $10^{\frac{69897}{100000}}$ approssima molto bene 5. In questo modo BRIGGS *&* VLACQ *ottennero il Canone dei logaritmi comuni benché in seguito*

[7] 1. Any number may be expressed by some single power of the same radical number.

For every number whatever is placed somewhere in a scale of the several powers of some radical number r, whose indices are $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c. where not only the numbers r^m, r^{m-1}, r^{m-2}, &c. are expressed; but also any intermediate number x is represented by r with a proper index z.

The index z is called the Logarithm of the number x.

2. Hence, to find the logatithm z of any number x, is only to find what power of the radical number r, in that scale, is equal to the number x; or to find the index z of the power, in the equation $x = r^z$.

$A = 1,000000;$	$lA = 0,0000000$	sia
$B = 10,000000;$	$lB = 1,0000000;$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277;$	$lC = 0,5000000;$	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413;$	$lD = 0,7500000;$	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964;$	$lE = 6250000;$	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674;$	$lF = 0,6875000;$	$G = \sqrt{EF}$
$G = 5,232991;$	$lG = 0,7187500;$	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065;$	$lH = 0,7031250;$	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069;$	$lI = 0,6953125;$	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865;$	$lK = 0,6992187;$	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416;$	$lL = 0,6972656;$	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627;$	$lM = 0,6982421;$	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4,997242;$	$lN = 0,6987304;$	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5,000052;$	$lO = 0.6989745;$	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4,998647;$	$lP = 0.6988525;$	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4,999350;$	$lQ = 0.6989135;$	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4,999701;$	$lR = 0.6989440;$	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4,999876;$	$lS = 0.6989592;$	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4,999963;$	$lT = 0.6989668;$	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5,000008;$	$lV = 0.6989707;$	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4,999984;$	$lW = 0.6989687;$	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4,999997;$	$lX = 0.6989697;$	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5,000003;$	$lY = 0.6989702;$	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5,000000;$	$lZ = 0.6989700;$	

Tabella 8.1: Il calcolo di $\log 5$ eseguito da EULERO

siano stati trovati altri metodi più semplici, grazie ai quali è possibile calcolare i logaritmi.[8] (pp. 75-76 di [6])

Osserviamo che un elemento della successione numerica $A, B, ..., Z$ non viene sempre ottenuto come radice quadrata dei due elementi immediatamente precedenti. In alcuni casi—G I N, O, R, S, T, V ed Y—gli elementi sono radice quadrate di elementi che non li precedono immediatamente. La scelta di tali elementi è basata sulla prossimità al numero 5, di cui si vuole calcolare il logaritmo. Così quando si deve formare I, non si considera $I = \sqrt{GH}$ ma piuttosto $I = \sqrt{FH}$ in quanto $5 - F < G - 5$.

Il Capitolo VII del Libro I di [6], *De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione* (§§114-125) è dedicato agli sviluppi in serie di esponenziali e logaritmi. Buona parte del capitolo verte su una classificazione dei logaritmi sulla base della relazione $a^\omega = 1 + \psi$ in cui ω e ψ sono quantità infinitesime (*infinite parvi*). Assumendo che ω e ψ siano infinitesimi dello stesso ordine egli pone $\psi = k\omega$ osservando che k dipende dalla scelta della base a. Se l è il logaritmo in base a, allora $\omega = l(1 + k\omega)$.

Poiché è $a^0 = 1$ ed il valore della potenza cresce al quello dell'esponente di a, purché a sia un numero maggiore dell'unità, ne segue che se l'esponente supera di pochissimo lo zero, anche la potenza supererà di pochissimo l'unità. Sia ω una quantità infinitamente piccola, ovvero una frazione tanto piccola che per poco non si annulla; sarà $a^\omega = 1 + \psi$, dove ψ è anch'esso un numero infinitamente piccolo. Da quanto visto in precedenza si ricava che se ψ non fosse un numero infinitamente piccolo, neppure ω potrebbe esserlo. Sarà allora o $\psi = \omega$ o $\psi > \omega$ o $\psi < \omega$ ed il rapporto tra le due quantità dipenderà dal valore di a ed, essendo sinora questa incognita, si porrà $\psi = k\omega$, cosicché sia $a^\omega = 1 + \psi$ e presa a come base logaritmica, sarà $\omega = l(1 + k\omega)$.[9](§114, Cap. VII, Libro I di [6])

Con un calcolo esplicito egli trova che $k = 2.30258$ quando $a = 10$.

Per rendere evidente questo legame, preso un numero reale i EULERO sviluppa $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$ con la formula del binomio di NEWTON ottenendo

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + ecc.$$

[8]Ponatur basis Logarithmica $a = 10$, quod in tabulis usu receptis fieri solet; & quaeratur vero tantum proxime Logarithmus numeri 5; quia hic continetur intra limites 1 & 10 quorum Logarithmi sunt 0 & 1; sequenti modo radicum extractio continua instituatur, quoad ad limites a numero proposito 5 non amplius discrepantes perveniatur. Sic ergo mediis proportionalibus sumendis tandem perventum est ad $Z = 5,000000$, ex quo Logarithmus numeri 5 quaesitus est $0,696870$, posita basi Logarithmica $= 10$. Quare id proxime $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Hoc autem modo computatus est canon Logarithmorum vulgaris a BRIGGIO & VLACQUIO, quamquam postea eximia inventa sunt compendia, quorum ope multo expeditius Logarithmi supputari possunt.

[9]Quia est $a^0 = 1$, atque crescente Exponente ipsius a simul valor Potestatis augetur, si quidem a est numerus unitate major; sequitur si Exponens infinite parum cyphram excedat, Potestatem ipsam quoque infinite parum unitatem esse superaturam. Sit ω infinite parvus, seu Fractio tam exigua, ut tantum non nihilo sit aequalis, erit $a^\omega = 1 + \psi$, existente ψ quoque numero infinite parvo. Ex praecedente enim capite constat nisi ψ esset numerus infinite parvus, neque ω talem esse posse. Erit ergo vel $\psi = \omega$, vel $\psi > \omega$, vel $\psi < \omega$, quae ratio utique a quantitate litterae a pendebit, quae cum adhuc sit incognita, ponatur $\psi = k\omega$, ita ut sit $a^\omega = 1 + \psi$; & sumta a pro basi Logarithmica, erit $\omega = l(1 + k\omega)$.

Preso un numero finito z e posto $i = \frac{z}{\omega}$, i diventa un numero molto grande e sostituendolo nella formula prcedente si ottiene

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + ecc.$$

che già mostra in modo più evidente il legame tra a e k. Se ora si fa tendere i all'infinito e poi si pone $z = 1$ si ricava

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... = \mathrm{e}^k$$

da cui segue ancora $k = 2.30258$, se $a = 10$.

§115 *Poiché* $a^\omega = (1+k\omega)$ *sarà* $a^{i\omega} = (1+k\omega)^i$, *qualunque numero venga messo al posto di* i. *Pertanto sarà* $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + ecc.$ *Se si pone* $i = \frac{z}{\omega}$, *dove* z *indica un numero finito qualsiasi, poiché* ω *è un numero infinitamente piccolo,* i *diverrà infinitamente grande e così che* $\omega = \frac{z}{i}$ *sia una frazione il cui denominatore è infinito e pertanto infinitamente piccola, come si era assunta per ipotesi. Si sostituisca* $\frac{z}{i}$ *al posto di* ω *e si avrà* $a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 ecc.$, *equazione che sarà vera se si sostituisce* i *con un numero infinitamente grande. Allora* k *è un numero definito, che dipende da* a *nel modo che abbiamo visto.*

§*116 Siccome* i *è un numero infinitamente grande, sarà* $\frac{i-1}{i} = 1$; *è quindi evidente che, quanto più grande viene preso il numero da sostituire al posto di* i, *tanto più vicino all'unità è il valore della frazione* $\frac{i-1}{i}$, *risultato che si otterrebbe se* i *fosse un numero maggiore di ogni altro assegnabile. Dunque la frazione* $\frac{i-1}{i}$ *sarà uguale all'unità. Con un simile ragionamento sarà anche* $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ *e così via; segue da qui che* $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; *e così via. Sostituiti pertanto questi valori, sarà* $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ecc.$ *all'infinito. Tuttavia questa relazione mostra allo stesso tempo la relazione tra i numeri* a *e* k *perché, posto* $z = 1$, *sarà* $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ecc.$, *per cui se* $a = 10$, *occorre che* $k = 2,30258$ *circa, come trovato in precedenza.*[10](Cap. VII, Liber I, pp.86-87 di [6])

[10]Cum sit $a^\omega = (1 + k\omega)$, erit $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, quicunque numerus loco i substituatur. Erit ergo $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \&c.$ Quod si statuatur $i = \frac{z}{\omega}$, & z denotet numerum quemcunque finitum, ob ω numerum infinite parvum, fiet i numerus infinite magnus, hincque $\omega = \frac{z}{i}$, ita ut ω fractio denominatorem habens infinitum, adeoque infinite parva, qualis est assumta. Substituatur ergo $\frac{z}{i}$ loco ω, eritque $a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 \&c.$, quae aequatio erit vera si pro i numerus infinite magnus substituatur. Tum vero est k numerus definitus ab a pendens, uti modo vidimus.

§116 Cum autem i sit numerus infinite magnus, erit $\frac{i-1}{i} = 1$; patet enim quo major numerus loco i substituatur, eo propius valorem Fractionis $\frac{i-1}{i}$ ad unitatem esse accessurum, hinc si i sit numerus omni assignabili major. Fractio quoque $\frac{i-1}{i}$ ipsam unitatem adequabit. Ob similem autem rationem erit $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$, & ita porro; hinc sequitur fore $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; & ita porro. His igitur valoribus substitutis, erit $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$ in infinitum. Haec autem aequatio simul relationem inter numeros a & k ostendit, posito enim $z = 1$, erit $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$, atque ita ut a sit 10, necesse est ut sit circiter $k = 2,30258$, uti ante invenimus.

Con lo sviluppo in serie di a^z a disposizione, EULERO mostra come, dal logaritmo $lb = n$ di un numero b in base a si possa risalire allo sviluppo in serie di b^z. Per questo, da $b^z = a^{nz}$ e dallo sviluppo trovato sopra per a^z segue che

$$b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4n^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

ovvero, sostituendo n con lb,

$$b^z = 1 + \frac{kz}{1}lb + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(lb)^4 + \&c.$$

che permette di ricavare b^z noto il logaritmo lb.

Lo sviluppo in serie del logaritmo viene ottenuto dalla posizione $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ da cui si ricava

$$i\omega = l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$$

che, sviluppato con l'ausilio del binomio di NEWTON attraverso passaggi simili a quelli illustrati nel §116, permette di concludere che

$$l(1 + x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\right)$$

§117 *Posto $b = a^n$ e preso a come base logaritmica, sarà, $lb = n$. Quindi, poiché $b^z = a^{nz}$, grazie alla serie infinita $b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4n^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$, posto in verità, lb al posto di n, sarà $b^z = 1 + \frac{kz}{1}lb + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(lb)^4 + \&c.$. Noto dunque il valore della lettera k a partire dal valore a della base, ogni quantità esponenziale come b^z si potrà esprimere tramite una serie infinita i cui termini procedono seguendo le potenze di z. Dopo queste siegazioni torniamo a far vedere come i logaritmi siano esprimibili grazie ad una serie infinita.*

§*118 Quando $a^\omega = 1 + k\omega$, con ω infinitamente piccolo, il rapporto tra a & k è definito dall'equazione $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ecc.$, se si prende a come base logaritmica, sarà $\omega = l(1 + k\omega)$ e $i\omega = l(1 + k\omega)^i$. È poi evidente che quanto maggiore viene preso i, tanto più la potenza $(1 + k\omega)^i$ supererà l'unità; ponendo $i =$ numero infinito, il valore della potenza $(1 + k\omega)^i$ diverrà uguale ad un qualsiasi numero maggiore di uno. Se allora si pone $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, sarà $l(1 + x) = i\omega$ per cui, siccome $i\omega$ è un numero finito, vale a dire il logaritmo di $1 + x$, è evidente che i debba essere un numero infinitamente grande, altrimenti $i\omega$ non potrebbe avere un valore finito.*

§*119 Posto allora $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, sarà $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$ e $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$ da cui segue che $i\omega = \frac{i}{k}((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1)$. Poiché è $i\omega = l(1 + x)$, sarà $l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, dove i è un numero infinitamente grande. Tuttavia è $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + ecc.$ Poiché i è un numero infinito, sarà $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$, ecc. e, di conseguenza*

$l(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ecc.)$, *posta a la base logaritmica ed indicando con* k *il numero adatto a questa base, evidentemente* $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.$[11](Cap. VII, Liber I, pp.87-88 di [6])

Con l'aiuto della serie logaritmica, EULERO intende ancora trovare k in funzione di a e deve constatare che la via in apparenza comoda di porre $1 + x = a$ si scontra con un problema di convergenza perché, essendo $la = 1$, si avrà

$$l(1+x) = la = 1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.\right)$$

ed è chiaro che nel caso $a = 10$ non ha alcun senso dal momento che la serie non converge. Per ovviare a ciò egli prende la via intrapresa, tra gli altri, da GREGORY e sottrae $l(1-x)$ da $l(1+x)$ ottenendo uno sviluppo convergente di k.

Di tutti i sistemi logaritmici, i logaritmi naturali od iperbolici si caratterizzano come quelli per i quali $k = 1$ e dunque la base a assume lo sviluppo

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

che EULERO indica con la lettera e così come lo conosciamo oggi, come aveva fatto per la prima volta nel breve lavoro di balistica [8] pubblicato nell'*Opera Posthuma*.

§120*Siccome abbiamo la serie che coincide con il logaritmo del numero* $1 + x$*, per suo mezzo potremo determinare il valore del numero* k*, a partire dalla base assegnata* a*. Se infatti poniamo* $1 + x = a$*, poiché* $la = 1$ *sarà* $1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + ecc.\right)$ *e da qui seguirà* $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} +$

[11]§117 Ponamus esse $b = a^n$, erit, sumto numero a pro basi Logarithmica, $lb = n$. Hinc, cum sit $b^z = a^{nz}$, erit per Seriem infinitam $b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$, posito vero lb pro n, erit $b^z = 1 + \frac{kz}{1}lb + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(lb)^4 + \&c.$. Cognito ergo valore litterae k ex dato valore basis a, quantitas exponentialis quaecunque b^z per Seriem infinitam exprimi poterit, cujus termini secundum Potestates ipsius z procedant. His expositis ostendamus quoque quomodo Logarithmi per Series infinitas explicari possint.

§118 Cum sit $a^\omega = 1 + k\omega$, existente ω Fractione infinite parva, atque ratio inter a & k definiatur per hanc aequationem $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.$, si a sumatur pro basi Logarithmica, erit $\omega = l(1 + k\omega)$ & $i\omega = l(1 + k\omega)^i$. Manifestum autem est, quo major numerus pro i sumatur, eo magis Potestatem $(1 + k\omega)^i$ unitatem esse superaturam; atque statuendo $i =$ numero infinito, vallorem Potestatis $(1 + k\omega)^i$ ad quemvis numerum unitatem majorem ascendere. Quod si ergo ponatur $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, erit $l(1 + x) = i\omega$, unde, cum sit $i\omega$ numerus finitus, Logarithmus scilicet numeri $1 + x$, perspicuum est, i esse debere numerum infinite magnum, alioquin enim $i\omega$ valorem finitum habere non posset.

§119 Cum autem positum sit $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, erit $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$ & $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, unde fit $i\omega = \frac{i}{k}((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1)$. Quia vero est $i\omega = l(1 + x)$, erit $l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, posito i numero infinite magno. Est autem $(1 + x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4 + \&c.$ Ob i autem numerum infinitum, erit $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$, &c., & consequenter $l(1 + x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.)$, posita basi Logarithmica $= a$ ac denotante k numerum hinc basi convenientem, ut scilicet sit $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.$

$\frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + ecc.$, *ed il valore della serie infinita dovrebbe essere circa* $= 2,30258$, *quando* $a = 10$, *benché sia difficile capire come possa essere* $2,30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + ecc.$, *dal momento che i termini di questa serie crescono continuamente e non si può ottenere una somma prossima al vero prendendo un certo numero di termini: porremo subito rimedio a questo inconveniente.*

§*121 Poiché infatti si ha* $l(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - ecc.)$, *preso* x *negativo si avrà* $l(1-x) = -\frac{1}{k}(\frac{x}{1} + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ecc.)$. *Se si sottrae la seconda serie dalla prima si avrà* $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k} \times \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ecc.\right)$. *Si ponga ora* $\frac{1+x}{1-x} = a$ *cosicché* $x = \frac{a-1}{a+1}$; *poiché* $la = 1$, *sarà* $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + ecc.\right)$, *dalla quale è possibile ricavare il valore del numero* k *da quello della base* a. *Se dunque si prende* $a = 10$ *come base, sarà* $k = 2(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + ecc.)$ *dove i termini della serie diminuiscono sensibilmente e dunque mostrano subito un valore abbastanza vicino a quello vero di* k.

§122 *Poiché la scelta della base* a *nel formare un sistema logaritmico è arbitraria, sarà possibile sceglierla in modo che si abbia* $k = 1$. *Supponiamo allora che sia* $k = 1$ *ed allora, per la serie trovata sopra (116) sarà,* $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ecc.$, *e questi termini, una volta trasformati in frazioni decimali ed effettivamente sommati, daranno per* a *il valore* $a = 2,71828182845904523536028$ *la cui ultima cifra è coerente al vero. I logaritmi costruiti a partire da questa base sono detti naturali od iperbolici in quanto è possibile per il loro tramite esprimere la quadratura dell'iperbole. Poniamo per brevità, al posto di questo numero 2,718281828459 ecc. sempre la lettera* e *che dunque indicherà la base dei logaritmi naturali od iperbolici ai quali corrisponde il valore* $k = 1$; *oppure, la lettera* e *esprime anche la somma della serie* $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$ *in infinitum.* [12] (Cap. VII, Liber I, pp.88-90 di [6])

---

[12] §120 Cum igitur habeamus Seriem Logarithmo numeri $1 + x$ aequalem, ejus ope ex data basi a definire poterimus valorem numeri k. Si enim ponamus $1 + x = a$, ob $la = 1$, erit $1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.\right)$, hincque habebitur $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.$, cujus ideo Seriei infinitae valor, si ponatur $a = 10$, circiter esse debebit $= 2,30258$; quamquam difficulter imtelligi potest esse $2,30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \&c.$, quoniam hujus Seriei termini continuo fiunt majores, neque aliquot terminis sumendis summa vero propinqua haberi potest: cui incommodo mox remedium afferetur.

§121 Quoniam igitur est $l(1 + x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c.)$, erit, posito x negativo, $l(1 - x) = -\frac{1}{k}(\frac{x}{1} + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \&c.)$. Subtrahatur Series posterior a priori, erit $l(1 + x) - l(1 - x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k} \times \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c.\right)$. Nunc ponatur $\frac{1+x}{1-x} = a$, ut sit $x = \frac{a-1}{a+1}$, ob $la = 1$ erit $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \&c.\right)$, ex qua aequatione valor numeri k ex basi a inveniri poterit. Si ergo basis a ponatur $= 10$ erit $k = 2(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \&c.)$ cujus Seriei termini sensibiliter decrescunt, ideoque mox valorem pro k satis propinquum exhibent.

§122 Quoniam ad systema Logarithmorum condendum basin a pro lubitu accipere licet, ea ita assumi poterit ut fiat $k = 1$. Ponamus ergo esse $k = 1$, eritque per Seriem supra (116) inventam, $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$, qui termini, si in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, praebebunt hunc valorem pro $a = 2,71828182845904523536028$, cujus ultima adhuc nota veritati est consentanea. Quod si jam ex hac basi Logarithmi constru-

Dopo un intermezzo dedicato al calcolo dei logaritmi naturali di alcuni numeri alla maniera di NEWTON, cioè basato sulla serie di GREGORY, EULERO dedica il §124 ad illustrare un metodo molto agile con cui determinare k e che equivale nella sostanza alla presentazione del cambio di base logaritmica sui manuali elementari. Se y è il logaritmo naturale di $1+x$ e v il logaritmo in base a dello stesso numero, poiché deve essere

$$y = \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$$

e

$$v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right)$$

si ha $k = \frac{y}{v}$. Scelto $v = 1$ si caratterizza k come logaritmo iperbolico della base a. Nel caso $a = 10$, si ritrova il valore molto accurato $k = 2,302585092994045684017991 4$.

§124 *Si ponga il logaritmo iperbolico di* $1+x$ *pari ad* y*, ovvero* $l(1+x) = y$*; sarà* $y = \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ecc.$*. Preso ora un numero* a *come base logaritmica, sia* v *il logaritmo dello stesso numero* $1+x$*; come abbiamo visto, sarà* $v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right) = \frac{y}{k}$*; e da qui* $k = \frac{y}{v}$ *da cuisi ottiene in modo molto semplice il valore di* k *corrispondente alle base* a*, definito in modo da essere uguale al logaritmo iperbolico di un numero qualsivoglia diviso per il logaritmo dello stesso numero nella base* a*. Preso pertanto* a *come numero, sarà* $v = 1$*, e da qui segue che* $k =$ *al logaritmo iperbolico della base* a*. Nel sistema dei logaritmi comuni in cui è* $a = 10$*,* k *sarà uguale al logaritmo iperbolico di 10 e perciò* $k = 2,302585092994045684017991 4$*, come abbiamo già trovato sopra con buona approssimazione. Se dunque dividiamo ogni logaritmo iperbolico per questo numero* k *oppure, ciò che è lo stesso, li moltiplichiamo per la frazione decimale* $0,434294481903251827651128 9$*, otterremo i logaritmi comuni che convengono alla base* $a = 10$.[13] (Cap. VII, Liber I, p. 92 di [6])

Per concludere esaminiamo l'estratto del Libro II, Capitolo XXI—*De Lineis Curvis Transcendentibus* dedicato alla dimostrazione dell'invarianza della sottotangente di una curva logaritmica. In tale dimostrazione EULERO fa tesoro

antur, ii vocari solent Logarithmi naturales seu hyperbolici, quoniam quadratura hyperbolae per istiusmodi Logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,718281828459 &c. constanter litteram e, quae ergo denotabit basin Logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum, cui respondet valor litterae $k = 1$; sive haec littera e quoque exprimet summam hujus Seriei $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$ in infinitum.

[13] §124 Ponatur Logarithmus hyperbolicus ipsius $1+x$ seu $l(1+x) = y$; erit $y = \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$. Sumto autem numero a pro basi Logarithmica, sit numeri ejusdem $1+x$ Logarithmus $= v$; erit, ut vidimus, $v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right) = \frac{y}{k}$; hinque $k = \frac{y}{v}$; ex quo commodissime valor k basi a respondens ita definitur ut sit aequalis cujusvis numeri Logarithmo hyperbolico diviso per Logarithmum ejusdem numeri ex basi a formati. Posito ergo numero hoc $= a$, erit $v = 1$, hincque fit $k =$ Logarithmo hyperbolico basis a. In systemate ergo Logarithmorum communium, ubi est $a = 10$, erit $k =$Logarithmo hyperbolico ipsius 10, unde fit $k = 2,302585092994045684017991 4$, quem valorem jam supra satis prope collegimus. Si ergo singuli Logarithmi hyperbolici per hunc numerum k dividantur, vel, quod eodem redit, multiplicentur per hanc fractionem decimalem $0,434294481903251827651128 9$, prodibunt Logarithmi vulgares basi $a = 10$ convenientes.

dello evoluzione del calcolo integrale e degli sviluppi in serie intercorso nel secolo che lo separa dai lavori di TORRICELLI ed HUYGENS in cui lo stesso risultato era stato dimostrato. Egli considera (Fig. 8.1) un punto P di ascissa x e chiama M il corrispondente punto sulla curva logaritmica $y_P = a\mathrm{e}^{x/b}$, dove a e b sono costanti. Preso sull'asse delle ascisse un ulteriore punto Q tale che $PQ = u$ sia incremento della variabile indipendente, il punto N sulla curva avrà ordinata $y_Q = a\mathrm{e}^{x/b} \cdot \mathrm{e}^{u/b}$ cosicché l'incremento della variabile indipendente nel passaggio da P a Q è $LN = \Delta y = a\mathrm{e}^{x/b}(\mathrm{e}^{u/b} - 1)$. Tracciata la retta che interseca il grafico

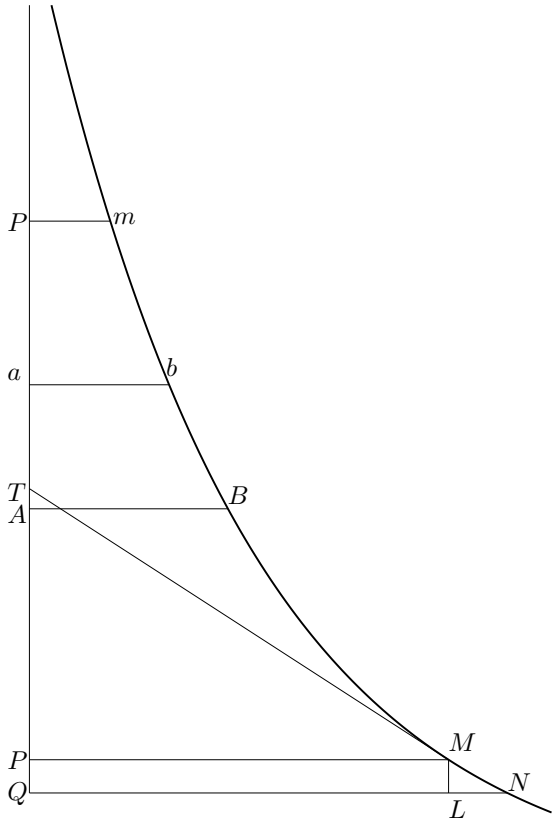

Figura 8.1: Figura ausiliaria per la dimostrazione di EULERO della costanza della sottotangente alla curva logaritmica.

della curva logaritmica in M ed N e l'asse delle ascisse in T, per similitudine si ottiene $PT = (ML)(PM)/LN = u/(\mathrm{e}^{u/b} - 1)$. Se ora si rimpiazza $\mathrm{e}^{u/b}$ con il suo sviluppo in serie e si fa tendere u verso 0, MN tende alla tangente alla curva logaritmica in M e $PT \to b$, valore costante della sottotangente che viene determinato immediatamente.

È anche possibile determinare la tangente a questa curva logaritmica in un suo punto M qualsiasi. Infatti, posto $AP = x$, sia $PM = a\mathrm{e}^{x:b}$ e si conduca un'altra

ordinata QN qualsiasi ortogonale all'intervallo precedente PQ: e si avrà $QN = a\mathrm{e}^{(x+u):b} = a\mathrm{e}^{x:b} \cdot \mathrm{e}^{u:b}$ e, condotto il segmento ML parallelo all'asse, sarà $LN = (QN - PM) = a\mathrm{e}^{x:b}(\mathrm{e}^{u:b} - 1)$. A partire dai punti M ed N si tracci la retta NMT che taglia l'asse nel punto T, cosicché si avrà $LN : ML = PM : PT$ e dunque $PT = u : (\mathrm{e}^{u:b} - 1)$. In verità, come mostrato nella sezione precedente, usando le serie infinite si ha $\mathrm{e}^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} +$ ecc. e perciò $PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{u^2}{6b^3} + \&c}$. Se ora l'intervallo $PQ = u$ sparisce, siccome i punti M ed N coincidono, la retta NMT sarà tangente alla curva e $PT = b$ sarà la sottotangente che avrà pertanto un valore costante, proprietà fondamentale della curva logaritmica. Pertanto, il parametro b della curva logaritmica rappresenta il valore costante della sua sottotangente.[14] (pp. 289–290 di [6])

8.4 Testi originali

Testo 8.6 /EULERO/([2], pp. 276-277). Je dis donc que, quoique le nombre dont on suppose le logarithme = 1, soit determiné, chaque nombre a néanmoins une infinité de logarithmes, dont tous, à l'exception d'un seul sont imaginaires, si le nombre est affirmatif; mais s'il est négatif ou imaginaire, tous ses logarithmes seront également imaginaires. En consequence de cela, le logarithme de l'unité sera non seulement = 0, mais il y aura encore une infinité de quantités imaginaires, dont chacune tient aussi bien lieu du logarithme de l'unité, que 0. Soient donc tous les logarithmes de l'unité

$$0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \vartheta,\ \text{etc.}$$

et puisque le logarithme de la racine carrée est la moitié du log. de la puissance, $\sqrt{1}$ etant tant $+1$ que -1, les logarithmes de la première valeur $+1$ seront

$$0,\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta,\ \frac{1}{2}\zeta,\ \frac{1}{2}\vartheta,\ \text{etc.}$$

et les logarithmes de l'autre valeur -1 seront:

$$\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}\gamma,\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \frac{1}{2}\eta,\ \text{etc.}$$

[14] Tangens hujus Curvae logarithmicae in quovis puncto M etiam facile poterit definiri. Cum enim, posita $AP = x$, sit $PM = a\mathrm{e}^{x:b}$, ducatur alia quaecunque Applicata QN a priori intervallo PQ dissita, eritque $QN = a\mathrm{e}^{(x+u):b} = a\mathrm{e}^{x:b} \cdot \mathrm{e}^{u:b}$; &, ducta ML Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = a\mathrm{e}^{x:b}(\mathrm{e}^{u:b} - 1)$. Per puncta M & N ducatur recta NMT Axi occurrens in puncto T, erit $LN : ML = PM : PT$, hincque $PT = u : (\mathrm{e}^{u:b} - 1)$. Verum, uti in Sectione superiori ostendimus, per Seriem infinitam est $\mathrm{e}^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} +$ &c.: ideoque $PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{u^2}{6b^3} + \&c}$. Evanescat Jam intervallum $PQ = u$; &,ob puncta M & N coincidentia, recta NMT fiet Curva Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque constans; quae est proprietas palmaria Curvae logarithmicae. Parameter ergo Logarithmicae b simul ejusdem est Subtangens constantis ubique magnitudinis.

qui sont différent des précedents, quoique leurs double donnent les logarithmes de l'unité. De même, prenant les racines cubiques, il y aura

$$l1 = 0,\ \frac{1}{3}\gamma,\ \frac{1}{3}\zeta,\ \frac{1}{3}\iota,\ \text{etc.}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}\delta,\ \frac{1}{3}\eta,\ \text{etc.}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta,\ \frac{1}{3}\varepsilon,\ \frac{1}{3}\vartheta,\ \text{etc.}$$

et cette consideration détruit déja la plupart des difficultés qui nous ont embarassé auparavant.

Testo 8.7 *[*Eulero*],* ([2], pp. 277-278).

§24 Pour prover cette pluralité infinie des logarithmes qui répondent à chaque nombre, on n'a qu'à regarder le grand rapport qui se trouve entre les logarithmes et les arcs de cercle: puisqu'on sait que les arcs de cercle se peuvent exprimer par logarithmes imaginaires, et réciproquement, les logarithmes par les arcs imaginaires du cercle. Donc, parce que les sinus ou cosinus répondent aux nombres et les arcs aux logarithmes, comme le même sinus se rapporte à une infinité d'arcs differents, ainsi il s'en suit que le même nombre se doit rapporter à une infinité de logarithmes differents. Nous connaissons mieux le cercle que la courbe logarithmique, et par cette raison, la consideration du cercle nous conduira à une plus parfaïte connaissance des logarithmes, que la logarithmique même; de plus, dans le cercle nous pouvons déterminer tous les arcs qui répondent au même sinus ou cosinus, et quoique ces arcs, dans le passage aux logarithmes deviennent imaginaires, ils ne laisseront pas, en nous convainquant de l'infinité des logarithmes, de nous donner à connaître leurs expressions et les espèces de non-realité, sous lesquelles elles sont comprises; et c'est tout ce qu'on peut souhaier pour l'intelligence d'une quantité imaginaire.

§25. Soit φ un arc quelconque d'un cercle dont je suppose le rayon $= 1$. Soit x le sinus de cet arc, et y son cosinus, de sorte que $y = \sqrt{(1-x^2)}$; donc, nommant la périphérie de ce cercle $= 2\pi$, ou l'arc de $180° = \pi$, il est clair, que tous les arcs compris dans cette expression générale $= 2n\pi+\varphi$ auront non seulement le même sinus $= x$, mais aussi le même cosinus $= y = \sqrt{(1-x^2)}$, pourvu que n signifie un nombre entier queconque. Or, puisque $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qu'on suppose $x = z\sqrt{-1}$, et l'on aura $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Mais on sait que $\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1+z^2)}} = l(\sqrt{(1+z^2)}+z)+C$. Par consequent, nous aurons $\varphi = \sqrt{-1}l(\sqrt{(1-x^2)}+\frac{x}{\sqrt{-1}})+C$, ou il est clair que la constante C est $= 0$, puisqu'en mettent $x = 0$, l'arc φ doit s'evanouir de même. Ayant donc $\varphi = \sqrt{-1}l(\sqrt{(1-x^2)}-x\sqrt{-1})$, nous aurons $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{(1-x^2)}+x\sqrt{-1})$ ou bien

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}}l(y+x\sqrt{-1}).$$

§26. Cette équation que nous venons de trouver, exprimant le rapport entre l'arc φ et les sinus et cosinus, aura aussi lieu pour tous les autres arcs qui ont

le même sinus x et cosinus y; par conséquent nous aurons

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}) \quad \text{et partant} \quad l(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}\,.$$

D'ou il est clair qu'au même nombre $y + x\sqrt{-1}$ repond une infinité de logarithmes, qui sont tous compris dans cette formule générale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$, où à la place de n on peut mettre tel nombre entier qu'on voudra. Puisque x est le sinus et y le cosinus de l'arc φ, posons $x = \sin\varphi$ et $y = \cos\varphi$, et nous aurons cette égalité

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}\,.$$

Testo 8.8 [EULER] ([1], pp. 156-157). Theoreme. Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre proposé: ou, si y maqrue le logarithme du nombre x, je dis che y renferme une infinité de valeurs differentes.

Demonstration. Je me bornarai ici aux logarithmes hyperbolique, puisqu'on sait che les logarithmes de toutes les autres especes sont a ceux-cy dans un rapport constant, ainsi quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé y, le logarithme tabulaire de ce méme nombre sera $= 0.4342944819.y$. Or, le fondement des logarithmes hyperboliques est, que si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l\,(1 + \omega). = \omega$. De là il s'ensuite que $l\,(1+\omega)^2. = 2\omega$; $l\,(1+\omega)^3 = 3\omega$, et en general $l\,(1+\omega)^n = n\omega$. Mais puisque ω est un nombre infiniment petit, il est evident, que le nombre $(1 + \omega)$ ne sauroit pas devenir égal à quelque nombre proposé x à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand, & qu'on pose $x = (1 + \omega)^n$, & le logarithme de x, qui a été nommé $= y$, sera $y = n\omega$. Donc pour exprimer par x, la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ & $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre formule produira $y = nx^{\frac{1}{n}} - n = l\,x$. D'où il est clair que la valeur de la formule $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus le logarithme de x, plus le nombre n sera pris grand; & si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraye valeur du logarithme de x. Or comme il est certain, que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs differentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre, & ainsi de suite, il sera également certain que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differents pour $l\,x$, puisque n est un nombre infini. Par conséquent, cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs differentes pour $l\,x$, de sort que le nombre x doit avoit une infinité de logarithmes. C.Q.F.D.

Testo 8.9 [EULERO] ([1], pp.161-163).

Probleme II.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre negatif quelconque $-a$.

SOLUTION.

Puisque $-a = -1 \cdot a$, il sera $l\ -a = l\,a + l - 1$, & prenant pour $l\,a$ le logarithme réel de a, on aura tous les logarithmes du nombre negatif $-a$, si l'on cherche tous les logarithmes de -1. Mais ayant vu, que mettant y pour le logarithme du nombre x en géméral, il est $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire, $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ & partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc y exprimera tous les logarithmes de -1 si l'on met $x = -1$, de sorte que tous les logarithmes des -1 seront les racines de cette équation $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, posant le nombre n infinitement grand. Or on sait que de cette équation général $p^n + q^n = 0$ toutes les racines se trouvent de la résolution de cette formule $p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} + q^2 = 0$, prenant pour λ successivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que negatifs: & partant on aura $p = q\left(cos \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right)$. Donc les racines de cette équation proposée:

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0\,,$$

seront toutes comprises dans cette formule générale:

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin.\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\,,$$

laquelle à cause de $n = \infty$ se change en

$$y = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}\,.$$

Par conséquent mettant pour λ successivement toutes les valeurs, qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 seront:

$$\pm\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm 3\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm 5\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm 7\pi\sqrt{-1}\,;\ \pm 9\pi\sqrt{-1}\,;\ \&c.$$

dont le nombre est infini. C.Q.F.T.

De là il est clair, que tous les logarithmes d'un nombre negatif quelconque, sont imaginaires, & qu'il n'y a aucun nombre negatif, dont un de ses logarithmes soit réel. Mr. Leibniz a eu donc raison de soutenir, que les logarithmes des nombres negatifs étoient imaginaires. Cependant puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car quoiqu'il soit $l - 1 = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de son quarré sera $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$ expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2l\ -1 = l + 1$, quoique nul des logarithmes de -1 se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$, & que p marque en général tous les nombres pairs, & q tous les nombres impairs entiers: & ayant en général:

$$l + 1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad l - 1 = \pm q\pi\sqrt{-1}\,.$$

$$\& \quad l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}\,.$$

d'où l'on voit que $l(-a^2) = 2l\ - a = 2A + 2q\pi\sqrt{-1}$. Or $2q$ étant $= p$, & $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ est la formule générale des

logarithmes de a^2; ainsi il est $l(-a)^2 = l\,a^2$ ou bien $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$: ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ & $-a$ n'avoient qu;un seul logarithme; car alors on auroit raison de conclure, qu'il fut $l - a = l + a$ s'il etoit $2l - a = 2l + a$. Mais dès qu'on tombe d'accord, que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fut auparavant, n'est plus juste; puisque pour qu'il soit $2l - a = 2l + a$, il suffit, que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Testo 8.10 *[*EULERO*] ([1], pp. 272–275)*

Probleme III

Une quantité imaginaire étant elevée à une puissance dont l'exposant est aussi imaginaire, trouver la valeur imaginaire de cette puissance.

SOLUTION

Soit $a+b\sqrt{-1}$ *la quantité imaginaire, &* $m+n\sqrt{-1}$ *l'exposant de la puissance, de sorte qu'il faille trouver la valeur de cette formule* $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$. *Posons donc pour cet effet:*

$$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

& prenant les logarithmes on aura:

$$(m + n\sqrt{-1})\, l(a + b\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1})$$

Passons aux differentiels, & puisque, comme nous avons déjà vu,

$$d.l(x + y\sqrt{-1}) = \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{xdy - ydx}{xx + yy}\sqrt{-1}$$

nous aurons:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)\sqrt{-1}}{aa+bb} \\ +\frac{m(adb-bda)\sqrt{-1}}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb} \end{array}\right\} = \frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{(xdy - ydx)\sqrt{-1}}{xx + yy}$$

Egalant maintenent séparément les membres réels & imaginaires, nous aurons ces deux égaliés:

$$\begin{array}{l} \frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} \\ +\frac{m(adb-bda)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)}{aa+bb} = \frac{(xdy-ydx)}{xx+yy} \end{array}$$

Pour en prendre les integrales soit:

$$\sqrt{(aa + bb)} = c \quad \& \quad \text{Atang}\frac{b}{a} = \phi\,;$$

ou bien $\sin\phi = \frac{b}{c}$ *&* $\cos\phi = \frac{a}{c}$, *d'òu l'on peut toujours trouver l'angle* ϕ; *or je suppose ici, que* c *est une quantité positive* $= \surd(aa+bb)$. *Cela remarqué, nos integrales seront:*

$$m\,lc - n\phi = l\surd(xx+yy)$$

$$m\phi + n\,lc = \text{Atang.}\frac{y}{x}\,.$$

De là il s'ensuit, qu'il sera $\surd(xx+yy) = c^m \mathrm{e}^{-n\phi}$ *mettant* e *pour le nombre, dont le logarithme hyperbolique est* $= 1$. *Ainsi pour trouver les valeurs de* x *et* y, *de cette équation:*

$$(a+b\surd-1)^{m+n\surd-1} = x + y\surd-1$$

ayant posé $c = \surd(aa+bb)$, *& pris l'angle* ϕ *tel, qu'il soit* $\cos\phi = \frac{a}{c}$ *&* $\sin\phi = \frac{b}{c}$, *on aura:*

$$x = c^m \mathrm{e}^{-n\phi}\cos(m\phi + nl\,c) \quad e \quad y = c^m \mathrm{e}^{-n\phi}\sin(m\phi + nl\,c).$$

(...)

COROLL. III.

En général donc, quelques quantités que soient a, *&* b, *donnant a* c *la valeur positive de* $\surd aa+bb$, *et prenant pour* ϕ *un tel angle que* $\sin\phi = \frac{b}{c}$ *&* $\cos\phi = \frac{a}{c}$, *puisque pour* ϕ *on peut également prendre en général l'angle* $2\lambda\pi + \phi$, *où* λ *marque un nombre entier quelconque affirmatif ou negatif, on aura*

$$(a+b\surd-1)^{m+n\surd-1} = c^m \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi - n\phi}\left(\begin{array}{l} +\cos(2\lambda m\pi + m\phi + nl\,c) \\ +\surd-1.\sin(2\lambda m\pi + m\phi + nl\,c) \end{array}\right)$$

d'où l'on trouvera toutes les valeurs possibles, que cette formule $(a+b\surd-1)^{m+n\surd-1}$ *renferme, en donnat à* λ *successivement toutes les valeurs* $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$ *&c. où il suffit de prendre pour* c^m *la seule valeur réel & positive, qui y est renfermée.*

COROLL. IV.

Si $a = 0$; $m = 0$, *&* $b = 1$, *il sera* $c = 1$ *&* $\phi = \frac{\pi}{2}$ *d'où l'on tirera cette transformation:*

$$(\surd-1)^{n\surd-1} = \mathrm{e}^{-2\lambda n\pi - \frac{1}{2}n\pi}$$

ou bien $(\surd-1)^{\surd-1} = \mathrm{e}^{-2\lambda\pi - \frac{1}{2}\pi}$, *qui est d'autant plus remarquable qu'elle est réelle, & qu'elle renferme méme une infinité de valeurs réelles differentes. Car posent* $\lambda = 0$, *on aura en nombres*

$$(\surd-1)^{\surd-1} = 0,2078795763507\,.$$

Bibliografia

[1] L. Euler: De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatives et imaginaires. *Mém. Acad. Sc. Berlin* **5**, (1751), 139-179.

[2] L. Euler: Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. In *L. Euleri Opera Posthuma, Vol. I* Petropoli (1862), 268-281.

[3] F. Cajori: History of the exponential and logarithmic concepts III. The creation of a theory of logarithms of complex numbers by Euler. 1712-1747 *Amer. Math. Monthly* **20**, (1913), 75–84.

[4] R. Cotes: Logometria. *Phil. Trans. R. Soc. London* 29, (1724), 5–24.

[5] E. Halley: A most compendious and facile method for constructing the logarithms, exemplified and demonstrated from the nature of numbers, without any regard to the hyperbola, with a speedy method for finding the number from the logarithm given. *Phil. Trans.* **19**, (1695-1697), 58–67.

[6] L. Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum.* 2 voll. Lausanne: Bousquet (1748).

[7] W. Jones: Of logarithms. *Phil. Trans. R. Soc. London* **61**, (1771), 455–461.

[8] L. Euler: Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta. In *L. Euleri Opera Posthuma, Vol. II* Petropoli (1862), 800-804.

Capitolo 9

L'irrazionalità di e

9.1 Eulero e l'irrazionalità di e

La base dei logaritmi naturali od iperbolici è stata dietro le quinte della storia dei logaritmi sin dai tempi di Nepero ma il suo ruolo privilegiato si evidenziò quando si colse il legame tra geometria dell'iperbole e logaritmi. Eulero, che per primo indicò la base dei logaritmi neperiani con la lettera e ne studiò l'irrazionalità nel lavoro *De Fractionibus continuis Dissertatio* [1] pubblicata nel 1744 ma che, secondo i registri dell'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo, era stata presentata fin dal 1737. Eulero dimostra l'irrazionalità di e utilizzando le frazioni continue unitamente ad un inatteso collegamento con l'equazione di Riccati. Per comprendere la dimostrazione, occorre ripercorrere per sommi capi la teoria delle frazioni continue come viene sviluppata da Eulero sia in [1] che al Cap. XVIII del I volume della *Introductio* dove però non viene riportato il legame con l'equazione di Riccati ma, laconicamente, Eulero afferma che per dimostrare rigorosamente l'irrazionalità di e occorre ricorrere al calcolo infinitesimale: *cujus fractionis ratio ex calculo infinitesimali dari potest* (p. 319 di [2]).

Iniziamo col dire che Eulero *non* ha introdotto le frazioni continue che erano state introdotte molto tempo prima da Pietro Antonio Cataldi (1548-1626)—professore a Bologna negli anni in cui era anche attivo nell'ateneo felsineo Giovanni Antonio Magini—e immediato predecessore di Bonaventura Cavalieri. L'opera che contiene lo sviluppo in frazioni continue di $\sqrt{a^2+r}$ è il *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, et regole di approssimarsi di continuo al vero nelle radici dei numeri non quadrati, con le cause et inventioni loro* pubblicato del 1613, benché da una annotazione sul manoscritto sembra che questo fosse stato consegnato per la stampa già nel 1597 [3]. Essenzialmente, Cataldi ottiene lo sviluppo

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a+\dots}}$$

precisando la legge di formazione delle ridotte. Rimandiamo chi fosse interessato alla serie di articoli [3, 4, 5] dove lo storico della matematica italiano Ettore BORTOLOTTI analizza le scoperte di CATALDI e traccia, non senza una punta di orgoglio patrio ferito, la tormentata storia dell'attribuzione della scoperta delle frazioni continue, diminuendo il ruolo dei matematici dell'antica Grecia.

Per quanto ci riguarda, uno sviluppo parziale di e in frazione continua si trova per la prima volta nella *Logometria* di Roger COTES ma è con EULERO che lo sviluppo in frazioni continue viene utilizzato per rispondere alla domanda sul carattere razionale od irrazionale di e. Esponiamo per sommi capi le idee fondamentali sulle frazioni continue presenti in [1] ed al Cap. XVIII del I Libro della *Introductio* [2]. Anzitutto cosa è per EULERO una frazione continua?
Chiamo frazione continua una frazione di questo tipo: con il denominatore composto da un numero intero più una frazione il cui denominatore è di nuovo formato da un numero intero e da una frazione che ancora una volta è formata allo stesso modo; questo comportamento può ripetersi all'infinito come arrestarsi ad un certo punto.[1] (p. 295, Lib. I di [2]; *cfr.* pp. 99-100 di [1])

EULERO studia due tipi di frazioni continue: nel primo tipo tutti i numeratori fuorché il primo sono pari ad uno, per cui, detto x il valore, se esiste, della frazione continua, si ha

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}} \tag{9.1}$$

dove a, b, c e d sono numeri interi; il secondo tipo di frazione continua è

$$x = a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \dots}}} \tag{9.2}$$

dove anche i numeratori α, β, γ sono numeri interi. EULERO non affronta problemi di convergenza e in tutti gli esempi trattati le frazioni sono composte da numeri naturali soltanto. Un primo risultato è la legge generale di formazione delle somme parziali che si ottengono troncando la frazione continua dopo un numero finito di passi. Nel caso della frazione (9.2) si verifica con un calcolo diretto che, dopo l'ovvia ridotta iniziale pari ad a, le successive sono

$$a + \frac{\alpha}{b} = \frac{ab + \alpha}{b},$$

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta},$$

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

da cui EULERO trae la seguente regola di formazione delle ridotte, basata su questo schema:

[1] Fractionem autem continuam voco ejusmodi fractionem, cujus denominator constat ex numero integro cum fractione, cujus denominator denuo est aggregatum ex integro & fractione, quae porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum progrediatur sive alicubi sistatur.

Ciascuna di queste frazioni si troverà a partire dalla coppia di frazioni precedenti in questo modo

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0} & \frac{a}{1} & \frac{ab+\alpha}{b} & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta} & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

§*361. Vale a dire, sopra le frazioni da formare si scrivano gli indici a, b, c, d, ecc. mentre al di sotto si scrivano gli indici α, β, γ, δ, ecc. Se si pone come prima frazione $\frac{1}{0}$, come seconda $\frac{a}{1}$, allora una qualsiasi delle frazioni successive si formerà se il numeratore della frazione immediatamente precedente viene moltiplicato per l'indice soprastante, quello della penultima frazione per l'indice sottostante ed i due prodotti sono sommati tra loro: la somma sarà allora il numeratore della frazione di posto successivo: similmente il denominatore di quest'ultima sarà la somma del prodotto dell'ultimo numeratore per l'indice sovrastante e del prodotto tra il penultimo denominatore e l'indice sottostante.* [2](p. 298 Lib. I di [2], *cfr.* pp. 103-104 di [1])

La frazione formale $\frac{1}{0}$ è inserita per rendere generale la regola di formazione delle ridotte. L'ossrvazione successiva di EULERO riguarda il rapporto tra il *valore vero* x della frazione continua (9.2) e le somme parziali ottenute per troncamento.

È anche evidente come ottenere un valore prossimo a quello vero, se si interrompe la frazione continua da qualche parte e come ottenere un valore più vicino al vero di quello trovato procedendo con una frazione più lunga. Così se si prende solo a si avrà un valore minore di quello vero, dal momento che la frazione annessa viene trascurata. Se invece si prende $a+\frac{\alpha}{b}$ si avrà un valore maggiore di quello vero perché il denominatore nella frazione è minore di quello corretto b. Se poi si prende $a+\frac{\alpha}{b+\frac{\beta}{c}}$ si avrà di nuovo un valore minore di quello corretto a causa della frazione $\frac{\beta}{c}$ che rende il denominatore $b+\frac{\beta}{c}$ troppo grande. E in questo modo, interrompendo successivamente la frazione continua, si otterranno alternativamente valori maggiori o minori di quello corretto; da qui segue la possibilità di avvicinarsi quanto si vuole al valore vero della frazione continua.[3](p.102 di [1])

---

[2]...quarum fractionum quaeque ex binis praecedentibus sequentem in modum invenietur

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0} & \frac{a}{1} & \frac{ab+\alpha}{b} & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta} & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

§361. Fractionibus scilicet formandis supra inscribantur indices a, b, c, d, &c., infra autem subscribantur indices α, β, γ, δ, &c. Prima fractio constituatur $\frac{1}{0}$, secunda $\frac{a}{1}$, tum sequentium quaevis formabitur si antecedentium ultimae numerator per indicem supra scriptum, penultimae vero numerator per indicem infra scriptur multiplicetur & ambo producta addantur, aggregatum erit numerator fractionis sequentis: simili modo ejus denominator erit aggregatum ex ultimo denominatore per indicem supra scriptum, & ex penultimo denominatore per indicem infra scriptum multiplicatis.

[3]Apparet autem valorem vero propinquum obtineri, si fractio continua alicubi abrumpatur, atque eo propriorem valorem inventum iri, quo longius fractio continuetur. Ita sumendo tan-

Il processo di approssimazioni successive funziona se è nota la convergenza dello sviluppo in frazione continua, come EULERO sembra dare per scontato.

Fatte queste precisazioni di indole generale è bene soffermarsi sul motivo per cui le frazioni continue sono più adatte degli sviluppi in serie o dei prodotti continui per svelare l'irrazionalità di un numero. Dalla legge di formazione delle ridotte è possibile associare ad una frazione continua *troncata* una frazione ordinaria del tipo A/B. Al contrario, EULERO mostra come associare alla frazione ordinaria A/B una frazione continua che, grazie all'algoritmo euclideo della divisione, deve terminare dopo un numero finito di passi. Resta così mostrato il fatto che un numero è razionale se e solo se il suo sviluppo in frazione continua si arresta dopo un numero *finito* di passi e dunque che l'esistenza di uno sviluppo di un quoziente in una frazione continua che non si arresta mai diventa criterio di irrazionalità per quel quoziente.

§381*Affinché poi si mostri l'uso (delle frazioni continue) in aritmetica, occorre anzitutto osservare che ogni frazione ordinaria si può trasformare in una frazione continua. Sia infatti* $x = \frac{A}{B}$ *la frazione proposta, con* $A > B$*; si divida* A *per* B *e siano* a *il quoto e* C *il resto; si divida allora per questo resto* C *il divisore precedente* B *ottenendo un quoto* b *ed un resto* D *per il quale viene nuovamente diviso il divisore precedente* C*; dunque si continui finché non termina questa operazione che comunemente viene studiata per trovare il massimo comun divisore dei numeri* A *e* B*; (...) e si avrà, per le proprietà della divisione*

$$A = aB + C \qquad \textit{da cui} \qquad \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B};$$

$$\begin{array}{lll} B = bC + D; & \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}; & \frac{C}{B} = \frac{1}{b+\frac{D}{C}} \\ C = cD + E; & \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}; & \frac{D}{C} = \frac{1}{c+\frac{E}{D}} \\ D = dE + F; & \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}; & \frac{E}{D} = \frac{1}{d+\frac{F}{E}} \\ \textit{ecc.} & \textit{ecc.} & \textit{ecc.} \end{array}$$

da cui, sostituendo i valori successivi nei precedenti, si avrà

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{E}{D}}},$$

da cui è possibile esprimere x *solo grazie ai quoti* a*,* b*,* c*,* d*, ecc., nel modo seguente*

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + ecc.}}}}}.$$

---

tum a habebitur valor minor vero, cum annexa fractio tota negligatur. Sumendo autem $a + \frac{\alpha}{b}$, valor habebit maior vero, quia in fractione denominator b est iusto minor. Sin autem sumatur $a + \frac{\alpha}{b+\frac{\beta}{c}}$ habebitur iterum valor iusto minor ob fractionem $\frac{\beta}{c}$, indeque denominatorem $b + \frac{\beta}{c}$ nimis magnum. Atque hoc modo fractionem continuam successive abrumpendo alternative valores iusto maiores et minores prodibunt; unde quantumvis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.

[4](pp. 315-317 di [2], Lib. I)

Quando EULERO enuncia questa proprietà nella *Introductio* egli ha già trovato il valore di alcune famiglie di frazioni continue di tipo (9.1) in cui i denominatori hanno una struttura periodica come

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \&c.}}}}$$

per cui si può concludere che x è la radice positiva dell'equazione

$$x = \frac{1}{a + x}$$

ovvero $x = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$: prendendo, ad esempio, $a = 1$ od $a = 2$ si ottengono gli sviluppi

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \&c.}}}}$$

e

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}$$

i quali, più che ribadire l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$, permettono di trovare facilmente delle loro approssimazioni razionali, grazie alla legge generale di formazione delle ridotte discusse in precedenza. Ad esempio, $\sqrt{5} = 2\frac{305}{1292}$ con un errore minore di $\frac{1}{1292 \times 5473}$ (*cfr.* p. 313 di [2]).

---

[4] §381 Ut autem usus in arithmetica ostendatur, primum notandum est omnem fractionem ordinariam in fractionem continuam converti posse. Sit enim proposita fractio $x = \frac{A}{B}$; in qua sit $A > B$; dividatur A per B, sitque quotus $= a$ & residuum C; tum per hoc residuum C dividatur praecedens divisor B, prodeatque quotus b & relinquatur residuum D, per quod denuo praecedens divisor C dividatur; sicque haec operatio, quae vulgo ad maximum communem divisorem numerorum A & B investigandum usurpari solet, continuetur, donec ipsa finiatur; (...) eritque per naturam divisionis

$$\begin{array}{ccc}
A = aB + C & \text{unde} & \dfrac{A}{B} = a + \dfrac{C}{B}; \\
B = bC + D; & \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}; & \frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}} \\
C = cD + E; & \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}; & \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}} \\
D = dE + F; & \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}; & \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}} \\
\&c. & \&c. & \&c.
\end{array}$$

hinc, sequentes valores in praecedentibus substituendo, erit

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{E}{D}}},$$

unde tandem x per meros quotos inventos a, b, c, d, &c., sequentem in modum exprimetur, ut sit

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \&c.}}}}}.$$

Per esemplificare l'uso dell'algoritmo euclideo EULERO considera l'approssimazione di $\frac{\mathrm{e}-1}{2} = 0,8591409142295 = \frac{8591409142295}{10000000000000}$ ricavando

$$\frac{\mathrm{e}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{\&c.}}}}}}}$$

da cui appare come plausibile che la frazione continua non debba mai terminare, dal momento che i denominatori a partire dal 6 formano una progressione aritmetica crescente di ragione 4. Ciò dimostrerebbe che e è irrazionale tuttavia, poiché l'algoritmo euclideo si basa su una *approssimazione* di e, EULERO è consapevole che l'argomento non è conclusivo. Nella *Introductio*, una volta ottenuto lo sviluppo per $\frac{e-1}{2}$, EULERO nota soltanto

(...) il comportamento di questa frazione può essere ricavato dal calcolo infinitesimale.[5] (p. 319, Cap. XVIII, Lib. I di [2])

I dettagli di questa deduzione si trovano nella seconda parte di [1] ed appaiono del tutto scorrelati con il materiale sulle frazioni continue discusso in precedenza:

Anche se nei precedenti (articoli), trasformato in frazione continua il numero e il cui logaritmo è uguale ad 1*, ho osservato soltanto una progressione aritmetica dei denominatori, non sono riuscito a comprendere la necessità di un simile sviluppo, se non che fosse più probabile, né sono riuscito a dimostrare saldamente questo fatto. Ed ho ottenuto questo fortunatamente grazie ad un modo particolare con cui ridussi l'integrazione dell'equazione* $a\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x = x^{\frac{-4n}{2n+1}}\mathrm{d}x$ *all'integrazione di* $a\mathrm{d}q + q^2\mathrm{d}p - \mathrm{d}p$.[6](p. 129 di [1])

La prima sorpresa è nel fatto che sino a quel punto EULERO ha parlato di sviluppi di *numeri* in frazioni continue mentre qui, come vedremo tra poco, egli considera lo sviluppo in frazione continua di una *funzione* che risolve un'equazione differenziale riconducibile ad un'equazione di RICCATI. Non sappiamo come EULERO sia stato condotto su questa strada per giustificare la struttura dello sviluppo in frazione continua di e, tuttavia egli ha lasciato i dettagli della dimostrazione nei §§31-35 di [1] che ora riassumiamo. Al §31 EULERO si pone il problema di trovare il valore s di una frazione continua di tipo (9.1) in cui i denominatori formano una progressione aritmetica. Posto allora

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a+\cfrac{1}{(1+2n)a+\cfrac{1}{(1+3n)a+\cfrac{1}{(1+4n)a+\cfrac{1}{\mathrm{ect.}}}}}}$$

[5](...) cujus fractionis ratio ex calculo infinitesimali dari potest.

[6]Cum autem in praecedentibus, ubi numerum e cujus logarithmus est = 1, ejusque potestates in fractiones continuas converti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum observaverim, neque praeter probabilitatem de huius progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem. Hocque etiam feliciter sum consecutus ex peculiari modo, quo integrationem huius aequationis $a\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x = x^{\frac{-4n}{2n+1}}\mathrm{d}x$ reduxi ad integrationem huius $a\mathrm{d}q + q^2\mathrm{d}p - \mathrm{d}p$.

e dedotta la legge di formazione delle ridotte secondo lo schema già discusso, dopo alcune manipolazioni egli riesce a riscrivere s come

$$\frac{a+\frac{1}{1\cdot na}+\frac{1}{1\cdot 2(1+n)n^2a^3+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)n^3a^5+\text{etc.}}}}{1+\frac{1}{1(1+n)na^2}+\frac{1}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6+\text{etc.}}}.$$

Inizia a questo punto una serie di cambiamenti di variabile. EULERO pone anzitutto $a := \frac{1}{\sqrt{nz}}$ cosicché si abbia

$$s=\frac{1}{\sqrt{nz}}\frac{1+\frac{z}{1\cdot 1}+\frac{z^2}{1\cdot 2(1+n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)}+\text{etc.}}{1+\frac{z}{1(1+n)}+\frac{z^2}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\text{etc.}}$$

In seguito egli chiama t ed u il numeratore ed il denominatore della frazione precedente in modo che $s=\frac{t}{u\sqrt{nz}}$ e dall'esame delle serie che definiscono t ed u ricava $\mathrm{d}t = u\mathrm{d}z$ e $u\mathrm{d}z+nz\mathrm{d}u = t\mathrm{d}z$. Posto poi $t = vu$, cosicché $s=\frac{v}{\sqrt{nz}}$ ottiene $v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v = u\mathrm{d}z$ e $u\mathrm{d}z + nz\mathrm{d}u = uv\mathrm{d}z$ da cui ricava

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}v}{v}=\frac{v\mathrm{d}z-\mathrm{d}z}{nz}$$

da cui discende l'equazione che lega z e v, $nz\mathrm{d}v - v\mathrm{d}z + v^2\mathrm{d}z = nz\mathrm{d}z$ che a sua volta si trasforma in

$$\mathrm{d}q + q^2\mathrm{d}r = nr^{n-2}\mathrm{d}r, \tag{9.3}$$

se si ha cura di porre $v = z^{\frac{1}{n}}q$ e $z = r^n$. Da questa equazione risolta per ottenere q in termini di r, posto $r = n^{-\frac{1}{n}}a^{\frac{-2}{n}}$, si ricava che $s = aqr$. Il problema di determinare s è così trasformato in quello di risolvere (9.3) con le condizioni $s = \infty$ se $a = \infty$ ed $s = 1$ quando $a = 0$. Per $n = 2$, la (9.3) si riduce a

$$\mathrm{d}q + q^2\mathrm{d}r = 2\mathrm{d}r,$$

che può essere integrata ottenendo, coerentemente con le condizioni iniziali scelte

$$r=\frac{1}{2\sqrt{2}}l\left(\frac{q+\sqrt{2}}{q-\sqrt{2}}\right)$$

da cui si ricava, visto che $s = arq$, $s=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2}{a}}-1}$: preso $a = 2$ si ottiene la prova che e è un numero irrazionale.

Un ultimo aspetto della teoria delle frazioni continue che si lega all'irrazionalità di e è il loro legame con le serie a segni alterni che viene esaminato in dettaglio da EULERO sia in [1] (§§8-10) che in [2] (Cap. XVIII, Lib. I, §§363-374), dove sono discussi molti esempi. Riferendosi allo specchietto contenente le prime ridotte di una frazione continua del tipo (9.2) EULERO, scartata la frazione formale $\frac{1}{0}$, osserva che la differenza tra la seconda e la terza ridotta è $\frac{\alpha}{b}$ mentre sottraendo la quarta dalla terza ridotta si ottiene $\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$ e sottraendo la

quarta dalla quinta ridotta si resta con $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma)}$ da cui si può estrapolare la legge di formazione di tali differenze. Se x è il valore della frazione continua (9.2), EULERO può scrivere che

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma)} - ecc. \tag{9.4}$$

associando ad x, o meglio ad $x-a$, una serie a segni alterni. Quel che più interessa ad EULERO però è la corrispondenza inversa in cui, assegnata una serie a segni alterni, si determina la corrispondente frazione continua. Questo problema è affrontato esibendo per certe serie a segni alterni con una precisa struttura la legge di formazione delle ridotte della corrispondente frazione continua di tipo (9.2). Dopo aver considerato serie del tipo

$$x = A - B + C - D + E - ....$$

che però sono puramente formali dal momento che i termini sono numeri interi per cui non può esserci convergenza alcuna—ed infatti EULERO non discute alcun esempio numerico al riguardo—egli esamina serie formate da numeri frazionari del tipo

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - ....$$

ed illustra la corrispondenza con le frazioni continue per il caso particolare in cui $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$,..., in modo da avere la serie di MERCATOR

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ....$$

la cui somma $x = l(2)$ ammette lo sviluppo

$$l(2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+ecc.}}}}}}$$

che non può mai arrestarsi dimostrando che $l(2)$ è irrazionale come noto già da BRIGGS. EULERO non dice nulla su questo risultato e sembra più interessato ad ottenere un efficace mezzo di approssimazione di quantità irrazionali tramite quantità razionali, che non a dimostrare l'irrazionalità di un dato numero. Ciò che più sorprende è la serie studiata al §370 dove

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - ....$$

che, confrontata termine a termine con lo sviluppo (9.4) dove si sia posto $a = 0$, fornisce le seguenti relazioni tra numeratori e denominatori della frazione continua associata

$$\alpha = \frac{b}{A}; \quad \beta = \frac{bc}{B-1}; \quad \gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)};$$

$$\delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}; \quad \varepsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)};$$

dove ad ogni passaggio successivo al primo si utilizzano i risultati dei passi precedenti in modo da far comparire in ogni equazione un solo numeratore.

La legge di formazione dei numeratori è ben delineata e, scelti

$$\begin{array}{lll} b = A & \text{segue che} & \alpha = 1 \\ c = B - 1 & \text{segue che} & \beta = A \\ d = C - 1 & \text{segue che} & \gamma = B \\ e = D - 1 & \text{segue che} & \delta = C \\ f = E - 1 & \text{segue che} & \varepsilon = D \end{array}$$

e così via ottenendo lo sviluppo

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1+\cfrac{D}{E-1+\&c.}}}}}$$

Il primo esempio è la serie

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots.$$

da cui si ottiene che $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ cade nella classe appena descritta con $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, e così via per cui si ottiene lo sviluppo

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\&c.}}}}}}$$

che chiaramente non si arresta mai. Completando con un procedimento di induzione i dettagli si poteva concludere da qui l'irrazionalità di e. Al contrario Eulero non commenta questo risultato, forse perché l'algoritmo euclideo descritto in precedenza per far passare da una frazione ordinaria ad una frazione continua finita comporta che i numeratori siano tutti uguali all'unità o forse solo perché si riteneva sodisfatto della dimostrazione data ricorrendo all'equazione di Riccati.

9.2 Lambert e l'irrazionalità di e

La prossima dimostrazione che esaminiamo è dovuta a Johann Heinrich Lambert (1728-1777), scienziato nativo di Mulhouse, autodidatta, che occupò una posizione di primo piano nel panorama scientifico, non solo matematico. A lui si debbono importanti contributi anche in cosmologia, nel calcolo delle probabilità, nella meccanica celeste, nella geometria non euclidea e, per quello che ci

riguarda, nella teoria dei numeri dove egli mostrò l'irrazionalità di π e, come immediato corollario, quella di e. Nel prossimo capitolo dedicheremo nuovamente spazio a LAMBERT come ad uno degli artefici della trigonometria iperbolica.

La dimostrazione dell'irrazionalità di π è in realtà a sua volta un corollario pressoché immediato di un altro teorema la cui dimostrazione occupa buona parte di una corposa memoria [6] pubblicata nel 1768 tra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Berlino ma letta nel 1767 e già agli atti sin dal 1761. Precisamente LAMBERT dimostra questo risultato:

Occorre dimostrare che ogni volta che un arco di cerchio qualsiasi è commensurabile al raggio, la sua tangente è incommensurabile e, reciprocamente, che ogni tangente commensurabile non è affatto quella di un arco commensurabile.[7] (pp. 266-267 di [6])

Osserviamo dapprima che l'arco non deve essere quello nullo e che l'avverbio *reciprocamente* non significa una doppia implicazione del tipo: un arco di cerchio è commensurabile al raggio se e solo se la sua tangente trigonometrica è incommensurabile, risultato falso come prova l'arco di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Tale avverbio introduce solo la proposizione contronominale della prima parte del teorema, cioè è del tipo "non tesi implica non ipotesi".

LAMBERT considera un cerchio di raggio unitario e poiché

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

può scrivere

$$\tan v = \frac{v - \frac{1}{3!}v^3 + \frac{1}{5!}v^5 - \ldots.}{1 - \frac{1}{2!}v^2 + \frac{1}{4!}v^4 - \ldots.}.$$

Posto per brevità $A = \sin v$ e $B = \cos v$ egli utilizza l'algoritmo euclideo per generare una frazione continua. Posto

$$B = Q'A + R' \quad A = Q''R' + R'' \quad R' = Q'''R'' + Q''', \text{ ecc.}$$

egli determina la legge generale di formazione dei quozienti Q', Q'', dimostrando che

$$Q^{(n)} = \pm\frac{2n-1}{v}$$

dove il segno positivo compete ai valori dispari di n mentre il segno negativo ai valori pari di n; inoltre è in grado di dimostrare che i resti delle divisioni successive $R^{(n)}$ hanno una struttura ben precisa. Per motivi legati alla tecnica di dimostrazione egli espone i primi termini dei primi resti

$$R' = -\frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^6 + \&c.$$

$$R'' = -\frac{2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^3 + \frac{4\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^5 - \frac{6\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}v^7 + \&c.$$

[7] Il s'agit de faire voir, que toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque est commensurable au rayon, la tangent de cet arc est incommensurable; & que réciproquement, toute tangente commensurable n'est point celle d'un arc commensurable.

$$R''' = +\frac{2\cdot 4\cdot 6}{2\cdots 7}v^4 + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{2\cdots 9}v^6 - \frac{6\cdot 8\cdot 10}{2\cdots 11}v^8 + \&c.$$

e

$$R^{\text{iv}} = +\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{2\cdots 9}v^5 + \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{2\cdots 11}v^7 - \frac{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{2\cdots 13}v^9 + \&c.,$$

dove si può osservare l'alternanza dei segni del termine iniziale di ogni resto che segue lo schema quaternario $- - + +$.

Altrettanto importante è dedurre la struttura del termine di posto m nello sviluppo di $R^{(n)}$. Egli osserva (§11, p. 271 di [6]) che il termine m-esimo di $R^{(n)}$ ed il termine m-esimo di $R^{(n+1)}$ sono dati, rispettivamente, da

$$\pm R_m^{(n)} = -\frac{2^{n+m-1}[m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n-1)]v^{n+2m-1}}{(2n+2m-1)!}$$

e

$$\pm R_m^{(n+1)} = -\frac{2^{n+m}[m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n)]v^{n+2m}}{(2n+2m+1)!}$$

mentre il termine $(m-1)$-esimo dello sviluppo del resto $R^{(n+2)}$ è

$$\pm R_{(m-1)}^{(n+2)} = -\frac{2^{n+m+1}[(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n)]v^{n+2m-1}}{(2n+2m+1)!}$$

L'osservazione centrale di Lambert è che, in virtù dell'algoritmo euclideo introdotto, il resto $R^{(n+2)}$ è il resto della divisione di $R^{(n)}$ per $R^{(n+1)}$. Grazie a ciò, la dimostrazione avviene per induzione

Ora, per dimostrare questi teoremi nel modo più breve possibile, consideriamo che ogni resto R^{n+2} si ottiene dividendo il penultimo resto R^n per R^{n+1} che precede immediatamente il resto (R^{n+2}). Questa considerazione fa sì che la dimostrazione in questione possa essere suddivisa in due parti. Nella prima occore mostrare che, se due resti successivi R^n ed R^{n+1} hanno la forma che ho dato loro, allora il resto R^{n+2} che segue immediatamente ha anch'esso la forma assegnata. Dimostrato questo non resta altro che far vedere come i primi due resti abbiano la forma che debbono avere. In questo modo, è chiaro che la forma dei resti successivi si determina automaticamente.[8] (pp. 270-271 di [6]).

Per raggiungere questo obiettivo, Lambert determina il quoziente $Q^{(n+2)}$ dividendo il primo termine del resto $R^{(n)}$ per il primo termine del resto $R^{(n+1)}$

[8] Or pout donner à la démonstration de ces théoremes toute la briévité possible, considérons que chaque résidu R^{n+2} se trouve en divisant par le résidu R^{n+1}, qui le précéde immédiatement, l'antepénultieme R^n. Cette consideration fait, que la démonstration, dont il s'agit peut étre partagée en deux parties. Dans la premiere il faut faire voir que; si deux résidus R^n et R^{n+1}, qui se succedent immediatement, ont la forme que je leur donnée, le résidu R^{n+2}, qui suit immediatement, aura la même forme. Ce qui étant une fois démonstré, il ne reste plus que de faire voir, dans la seconde partie de la démonstration, que la forme de deux premiers résidus est celle qu'ils doivent avoir. Car, de cette maniere, il est évident que la forme de tous les suivans s'établit comme d'ell-même.

ricavando, come già enunciato, $Q^{(n+2)} = (2n+3)/v$. Con un calcolo diretto egli mostra che, qualunque sia m,

$$R_m^{(n)} - \frac{(2n+3)}{v} R_m^{(n+1)} = R_{m-1}^{(n+2)}$$

come si verifica sostituendo le espressioni dei termini $R_m^{(n)}$ riprodotte in precedenza. Resta così provato che, se $R^{(n)}$ ed $R^{(n+1)}$ hanno la struttura ipotizzata allora anche $R^{(n+2)}$ ha la stessa struttura. Con un procedimento simile, LAMBERT dimostra che i primi due resti R' ed R'' hanno la struttura ipotizzata, chiudendo l'induzione. La conoscenza dei resti è importante perché permette di dimostrare che la frazione continua non si arresta dopo un numero finito di passi e che, quando $n \to \infty$, $R^{(n)} \to 0$. È allora permesso concludere che

$$\tan v = \cfrac{1}{1 : v - \cfrac{1}{3{:}v - \cfrac{1}{5{:}v - \cfrac{1}{7{:}v - \cfrac{1}{9{:}v - \cfrac{1}{11{:}v - \text{ecc.}}}}}}} \tag{9.5}$$

...da cui si vede allo stesso tempo che, quando v è uguale ad una aliquota del raggio, i quozienti saranno numeri interi che crescono seguendo una progressione aritmetica.[9] (p. 275 di [6])

Per *aliquota* del raggio si deve intendere che $v = \frac{1}{n}$, con n intero cosicché i quozienti che figurano nello sviluppo in frazione continua sono tutti numeri interi, come richiesto dall'algoritmo di euclideo di divisione.

In altri termini, LAMBERT ha supposto per assurdo di poter scrivere $\tan v = \frac{A}{B}$ quando v è il reciproco di un intero: se ciò fosse vero, occorrerebbe arrestare il procedimento ad un certo punto, quando si annulla necessariamente un resto. L'assenza di arresto implica che non ci sia alcun massimo divisore comune tra A e B, risultato incompatibile con la razionalità di $\tan v$.

Il problema proposto da Euclide è quello di trovare il più grande divisore comune di due numeri interi che non siano primi tra loro. Questo problema è risolubile tutte le volte che uno dei resti R', R'', R''' &c....R^n si annulla senza che il resto precedente R^{n-1} sia uguale all'unità, ciò che non succede, seguendo la 1ª *Prop. dello stesso libro, se non quando i due numeri sono primi tra loro, fermo restando che i quozienti Q', Q'', Q''' &c. siano sempre numeri interi. Ora, abbiamo appena visto che quest'ultima ipotesi è verificata nel caso che stiamo trattando ogni volta che $\frac{1}{v}$ è un numero intero. Tuttavia, non vi è alcuno dei resti R', R'', R''' &c. che si annulli. Al contrario, considerando la legge di formazione dei resti che abbiamo trovato si vede che non solo questi diminuiscono costantemente ma che lo fanno più rapidamente di una qualsiasi progressione geometrica. Benché dunque ciò vada avanti all'infinito, noi potremo applicare comunque la proposizione di Euclide in virtù della quale il più grande divisore comune di A, B è al tempo stesso i più grande divisore comune di tutti i resti*

[9]...d'ou l'on voit en même tems, que toutes les fois que l'arc v sera égal à une partie aliquote du rayon, tous ces quotiens seront des nombers entiers croissant dans une progression arithmétique.

R', R'', R''' &c. Ora, siccome tali resti diminuiscono in modo da diventare più piccoli di qualunque quantità assegnabile, ne segue che il massimo comun divisore tra A e B è più piccolo di qualsiasi quantità assegnabile, il che vuol dire che esso non esiste affatto e che dunque, essendo A, B quantità incommensurabili, la

$$\text{tang } v = \frac{A}{B}$$

sarà una quantità irrazionale ogni volta che l'arco v è una aliquota del raggio.[10] (pp. 275-276 di [6])

Prima di passare a chiudere la dimostrazione nel caso in cui $v = \varphi : \omega$, con φ ed ω interi qualsiasi, LAMBERT dedica ampio spazio alla dimostrazione della convergenza effettiva dello sviluppo (9.5) a $\tan v$, ponendo $w = 1/v$ ed ottenendo la legge generale di formazione delle ridotte. In questa dimostrazione egli non utilizza la proprietà di v di essere reciproco di un intero e grazie a questo risultato generale di convergenza egli intende dimostrare che, posto $\tan \frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P}$, è impossibile che M e P stiano tra loro come un numero intero sta ad un altro numero intero. Per questo, riscritto (9.5) come

$$\tan\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \cfrac{\varphi}{\omega - \cfrac{\varphi^2}{3\omega - \cfrac{\varphi^2}{5\omega - \cfrac{\varphi^2}{7\omega - \cfrac{\varphi^2}{9\omega \ldots}}}}}$$

egli nota che M/P, sviluppato in frazione continua, dovrà dare gli stessi quozienti di $\tan \frac{\varphi}{\omega}$, se si vuole che sussista l'uguaglianza. Senza supporre M o P razionali, se $\tan \frac{\varphi}{\omega}$ fosse razionale dovrebbero esistere due interi μ e π tali che $M : \mu = P : \pi = D$, dove D è il massimo comun divisore di M e P e che, siccome M e P sono in generale irrazionali, potrà anch'esso essere irrazionale. Per poter utilizzare l'algoritmo euclideo occorre garantire ad ogni passo che i

[10] Le probleme que propose Euclide, c'est de trouver le plus grand commun diviseur de deux mombres entiers, qui ne sont pas premiers entre eux. Ce probleme est résoluble toutes les fois qu'un des résidus R', R'', R''' &c....R^n devient $= 0$, sans que le résidu précédent R^{n-1} soit égal à l'unité, ce qui suivant, la 1re Prop. du même livre n'arrive que lorsque les deux nombres proposés sont premiers entre eux, bien entendu que tous les quotients Q', Q'', Q''' &c. sont supposés être des nombres entiers. Or nous venons de voir, que cette derniere supposition a lieu dans le cas dont il s'agit ici, toutes les fois que $\frac{1}{v}$ est un nombre entier. Mais, quant aux résidus R', R'', R''' &c. il n'y a aucun qui devienne $= 0$. Tout au contraire, en considérant la loi de progression des résidus que nous venons de trouver, on voit, que non seulement ils décroissent sans interruption, mais qu'ils décroissent même plus fortement qu'aucune progression géométrique. Quoique donc cela continue à l'infini, nous pourrons néanmoins y appliquer la proposition d'Euclide. Car, en vertu de cette proposition, le plus grand commun diviseur de A, B est en même tems le plus grand diviseur de tous les résidus R', R'', R''' &c. Or ces résidus décroissant en sorte qu'enfin ils deviennent plus petits qu'aucune quantité assignable, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur de A, B, est plus petit qu'aucun quantité assignable; ce qui veut dire qu'il n'y en a point, & que par consequent A, B, étant des quantités incommensurables, la

$$\text{tang } v = \frac{A}{B}$$

sera une quantité irrationelle toutes les fois que l'arc v sera une partie aliquote du rayon.

quozienti siano numeri interi e per questo LAMBERT divide φP per M in modo da ottenere

$$\varphi P = \omega M + R'$$

e dunque, dividendo ambo i membri per D,

$$\frac{\varphi P}{D} = \frac{\omega M}{D} + \frac{R'}{D}$$

da cui segue

$$\frac{R'}{D} = \varphi\pi - \omega\mu$$

cioè un numero intero, il che significa che D divide R'. Iterando il procedimento, LAMBERT mostra come tutti i resti $R^{(n)}$ siano divisibili per D. Siccome egli mostra anche come $R^{(n)}$ tenda a 0 quando n tende all'infinito, anche D deve annullarsi il che è incompatibile con la presunta razionalità del rapporto A/B. L'irrazionalità di π discende allora come un semplice corollario:

Ora, siccome la tangente di $45°$ *è razionale, dal momento che è uguale al raggio, ne segue che l'arco di* $45°$*, & dunque anche l'arco di* 90, 180, 360 *gradi, è incommensurabile al raggio. Dunque la circonferenza del cerchio non sta al suo diametro come un intero sta ad un altro intero. Ecco dunque questo teorema nella forma di corollario di un altro teorema infinitamente più universale.*[11] (pp.296-297 di [6])

Da qui all'irrazionalità della base dei logaritmi neperiani il passo è breve e si riduce ad osservare l'analogia formale tra gli sviluppi in serie di $\sin v$ e $\cos v$ con quelli di $\frac{e^v - e^{-v}}{2}$ e $\frac{e^v + e^{-v}}{2}$.

Testo 9.1 (LAMBERT**,)** (pp. 306-308 di [6]). Originale 9.1.

Confrontiamo ora le quantità trascendenti circolare con quelle logaritmiche che ne sono analoghe. Sia e *il numero il cui logaritmo iperbolico è* $= 1$*. È noto che se tutti i segni nelle due serie di cui ci siamo serviti in precedenza,*

$$\sin v = v - \frac{1}{3!}v^3 + \frac{1}{5!}v^5 - \frac{1}{7!}v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2!}v^2 + \frac{1}{4!}v^4 - \frac{1}{6!}v^6 + \&c.,$$

sono presi con il segno positivo, tali serie si trasformano in

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v + \frac{1}{3!}v^3 + \frac{1}{5!}v^5 + \frac{1}{7!}v^7 + \&c.$$

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}v^2 + \frac{1}{4!}v^4 + \frac{1}{6!}v^6 + \&c.$$

[11] Or la tangente de 45° étant rationelle, en ce qu'elle est égal au rayon, il s'ensuit que l'arc de 45° dégrés, & partant auss il'arc de 90, 180, 360 dégrés, est incommensurable au rayon. Donc la circonference du cercle n'est point au diametre comme un nombre entier à un nombre entier. Voilà donc ce théoreme en forme de corollaire d'un autre théoréme infiniment plus universel.

Ora, trattando queste ultime serie allo stesso modo in cui abbiamo trattato le prime due, l'operazione non differirà che per dei segni che ora saranno tutti positivi. Siccome è possibile convincersi di ciò, non ne riperto il dettaglio. Dunque sarà

$$\frac{\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^{-v}}{\mathrm{e}^v + \mathrm{e}^{-v}} = \cfrac{1}{1 : v + \cfrac{1}{3{:}v + \cfrac{1}{5{:}v + \cfrac{1}{7{:}v + \cfrac{1}{9{:}v + \cfrac{1}{11{:}v + \cfrac{1}{13{:}v + \&c.}}}}}}}$$

E siccome è

$$\frac{\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^{-v}}{\mathrm{e}^v + \mathrm{e}^{-v}} = \frac{\mathrm{e}^{2v} - 1}{\mathrm{e}^{2v} + 1}$$

si vede che, posto $2v = x$*, si avrà*

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \cfrac{1}{2 : x + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}x + \cfrac{1}{18{:}v + \&c.}}}}}$$

da cui si ricava

$$\frac{\mathrm{e}^x + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2{:}x + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}v + \&c.}}}}}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{2} = \cfrac{1}{(2 : x) - 1 + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}x + \cfrac{1}{18{:}v + \&c.}}}}}$$

(...) Si troverà qui ancora che v *ed* e^v*, così come* x *ed* e^x *non saranno mai simultaneamente razionali. Pertanto, non ne farò una nuova derivazione. Piuttosto, occorre interpretare le formule che abbiamo appena mostrato.*

Questa interpretazione è alla base della trigonometria iperbolica e verrà esaminata nel prossimo capitolo.

9.3 Liouville e l'irrazionalità di e

Gli ultimi paragrafi della memoria [6] di Lambert lanciano un ponte verso ricerche che culmineranno con le dimostrazioni della *trascendenza* di e ad opera di Charles Hermite (1822-1901) nel 1873 e di π, ad opera di Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), nel 1882. Lambert, affermando che l'irrazionalità di π ed e è solo un risultato parziale, dopo aver distinto tra numeri irrazionali radicali od algebrici e quantità trascendenti, enuncia un teorema che crede sia possibile mostrare:

Sembra che tutto ciò che ho dimostrato a proposito delle quantità trascendenti circolari e logaritmiche poggi su principî assai più universali, che però non sono ancora ben sviluppati. Ecco per ora qualcosa che potrà essere utile a dare qualche

idea. Non è sufficiente aver dimostrato l'irrazionalità, cioè l'incommensurabilità con l'unità, di queste quantità trascendenti. Questa proprietà non le individua. Infatti, a parte le quantità irrazionali che si possono formare per caso e che proprio per questo non sono affatto di aiuto all'analisi, ve ne sono un'infinità di altre che vengono chiamate algebriche: tali sono tutte le quantità irrazionali radicali come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ *ecc. e tutte le radici irrazionali di equazioni algebriche come, ad esempio, quelle di*

$$0 = xx - 4x + 1\,,$$

$$0 = x^3 - 5x + 1\,,$$

ecc. Chiamerò le une e le altre quantità irrazionali radicali ed ecco il teorema che credo possa essere dimostrato.

Affermo dunque che nessuna quantità trascendente circolare e logaritmica potrà essere espressa tramite quantità irrazionali radicali, riferite alla stessa unità, ed in cui non figuri alcuna quantità trascendente. La dimostrazione di questo teorema sembra dipendere dal fatto che le quantità trascendenti dipendono da

$$\mathrm{e}^x\,,$$

in cui l'esponente è variabile, al contrario delle quantità radicali dove si suppongono costanti gli esponenti.[12] (pp. 320-321 di [6])

È dunque il ruolo dell'esponente, variabile oppure costante, a determinare la trascendenza di una quantità e ad impedire che essa figuri tra le radici di equazioni algebriche. Vi è un ultimo aspetto che nel lavoro di Lambert che è opportuno sottolineare, cioè il legame tra la trascendenza di π e l'impossibilità di rettificare con riga e compasso una circonferenza, dal momento che solo quantità irrazionali radicali possono essere costruite geometricamente.

[12] Tout ce que je viens de faire voir sur les quantités transendentes circulaires & logarithmiques, paroit être fondé sur des principes beaucoup plus universels, mais qui ne sont pas encore assez développés. Voici cependant ce qui pourra servir à donner quelque idée. Il ne suffit pas d'avoir trouvé que ces quantités transcendentes sont irrationelles, c'est à dire incommensurables à l'unité. Cette propriété n'est leur pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne sont gueres du reffort de l'analyse, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme algébriques: & telles sont toutes les quantités irrationelles radicales, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{[3]4}$, $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ &c. & toutes les racines irrationelles des équations algébriques, comme p. ex. celles des equations

$$0 = xx - 4x + 1\,,$$

$$0 = x^3 - 5x + 1\,,$$

&c. Je nommerai les unes et les autres quantités irrationelles radicales, & voici le thóreme, que je crois pouvoir être démontré.

Je dis donc qu'aucune quantité transcendente circulaire & logarithmique ne sauroit être exprimée par quelque quantité irrationelle radicale, qui se rapporte à la même unité. & dans laquelle il n'entre aucune quantité transcendente. Ce théoreme semble devoir être démontré de ce que les quantités transcendentes dépendent de

$$\mathrm{e}^x\,,$$

ou l'exposant est variable, au lieu les quantités radicales supposent des exposant constants

Una volta dimostrato questo teorema in tutta la sua generalità, seguirà che non è possibile esprimere la circonferenza di un cerchio con quantità radicali o razionali e non ci sarà alcun modo per ottenerla grazie a qualche costruzione geometrica. Infatti, tutto ciò che è costruibile geometricamente si riduce a quantità razionali e radicali.[13] (pp. 321-322 di [6])

L'esistenza di numeri trascendenti che cioè non possono essere radici di un'equazione algebrica a coefficienti interi sarà mostrata nel 1840 dal matematico francese Joseph LIOUVILLE (1809-1882) che troverà infiniti esempi di numeri trascendenti. A proposito del numero e, LIOUVILLE mostrò come non solo è irrazionale ma che non può essere radice di alcuna equazione quadratica [7] o biquadratica [8] a coefficienti interi. Questi risultati purono pubblicati in due lavori molto brevi, uno la continuazione dell'altro, apparsi nel 1840 sul *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* diretto dallo stesso LIOUVILLE. Riportiamo il testo completo di [7] che si serve dello sviluppo in serie di e e di e^{-1}.

Testo 9.2 (LIOUVILLE) ([7]). Originale 9.2

Si dimostra tra gli elementi che il numero e, base dei logaritmi neperiani, non ha valore razionale. Mi sembra che si debba aggiungere che lo stesso metodo dimostri anche che e non può essere radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti razionali, cosicché è impossibile avere $ae + \frac{b}{e} = c$ *con a intero positivo e b, c numeri interi, positivi o negativi. In effetti, se si sostituisce in questa equazione e ed* $\frac{1}{e}$*, cioè* e^{-1}*, con i loro sviluppi dedotti da quello di* e^x*, dopo aver moltiplicato ambo i membri per* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*, si dimostra facilmente che*

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + ...\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + ...\right) = \mu$$

dove μ *è un intero. Si può sempre rendere positivo il fattore*

$$\pm\frac{b}{n+1}\,;$$

è sufficiente prendere n pari se b è < 0 *ed n dispari se b è* > 0*; prendendo inoltre n molto grande, l'equazione che abbiamo appena scritto ci condurrà ad un assurdo. Infatti, essendo il primo membro essenzialmente positivo e molto piccolo, sarà compreso tra* 0 *ed* 1 *e non potrà essere uguale ad un intero* μ*. Quindi ecc.*

Nella *Addition* [8] LIOUVILLE utilizza una tecnica simile per mostrare come e non possa risolvere un'equazione biquadratica a coefficienti razionali, vale a dire che è impossibile trovare interi $a > 0$, b e c tali che

$$ae^2 + be^{-2} + c = 0\,.$$

LIOUVILLE ha aperto una breccia per mostrare la trascendenza di e che sarà ottenuta da HERMITE poco più di trent'anni dopo [9].

[13] Ce théoreme étant une fois démontré dans toute son universalité, il s'ensuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationelle, il n'y aura pas moien de la déterminer par quelque construction géométrique. Car tout ce qu'on peut construire géométriquement revient aux quantiés rationelles & radicales.

9.4 HERMITE e l'irrazionalità di e

Non ci addentreremo nella dimostrazione piuttosto articolata trascendenza di e ma esporremo una ulteriore dimostrazione elementare dell'irrazionalità di e [10] che HERMITE pubblicò lo stesso anno del celebre lavoro sulla trascendenza di e. La tecnica è per certi aspetti simile a quella di LIOUVILLE in quanto poggia ancora sullo sviluppo in serie di e^x

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

cui viene associato il polinomio

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

che è il troncamento al grado n dello sviluppo precedente. Per il momento n è del tutto libero e verrà scelto in modo opportuno in seguito. Ora HERMITE osserva che

$$\frac{\mathrm{e}^x - F(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{x}{(n+2)!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(n+k+1)!} \tag{9.6}$$

e che, derivata n volte la funzione $\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n+1}} = \mathrm{e}^x x^{-(n+1)}$ rispetto ad x—operazione indicata da HERMITE con $D_x^n(\cdot)$— si ottiene

$$D_x^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^x \Phi(x)}{x^{2n+1}}$$

dove $\Phi(x)$ è un polinomio di grado n di cui interessa solo il fatto abbia coefficienti interi. Similmente si può scrivere

$$D_x^n \frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{\Phi_1(x)}{x^{2n+1}}$$

dove ora $\Phi_1(x)$ è un polinomio i cui coefficienti sono ancora dei numeri interi. Infatti in esso entrano come addendi prodotti del tipo

$$D_x^k(F(x))D_x^{(n-k)}(x^{-(n+1)}) = (-1)^{n-k}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)(n+1)(n+2)\cdots(2n-k)x^{-(2n+k-}$$

e si vede che, moltiplicando e dividendo il membro di destra per $n!$, tutti i coefficienti del polinomio sono coefficienti binomiali, cioè dei numeri interi. D'altra parte se si deriva n volte il membro di destra dell'equazione (9.6) si ricava che

$$\frac{\mathrm{e}^x \Phi(x) - \Phi_1(x)}{x^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)x^k}{(k+2n+1)!}$$

che si può riscrivere utilmente nella forma

$$\mathrm{e}^x \Phi(x) - \Phi_1(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(k+2n+1)} \ :$$

a patto di prendere n sufficientemente grande è sempre possibile rendere il fattore di destra, che per $x > 0$ fissato è sempre positivo, piccolo quanto si vuole. Infatti ciò è sicuramente vero per il fattore $\frac{x^{2n+1}}{n!}$ mentre riscrivendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(k+2n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(n+1)(n+2)\cdots(k+2n+1)} \frac{x^k}{k!}$$

si vede che, siccome

$$\frac{(k+n)!}{(n+1)(n+2)\cdots(k+2n+1)} < 1,$$

la serie è maggiorata da e^x. Ora, se per x intero, $e = \frac{b}{a}$ con b ed a interi si avrebbe

$$0 < \mathrm{e}^x\Phi(x) - \Phi_1(x) = \frac{b\Phi(x) - a\Phi_1(x)}{a}$$

e la frazione di destra, avendo il numeratore intero per le proprietà dei polinomi $\Phi(x)$ e $\Phi_1(x)$, non potrebbe mai essere inferiore ad $\frac{1}{a}$ mentre $\mathrm{e}^x\Phi(x) - \Phi_1(x)$ può essere resa piccola a piacere scegliendo n sufficientemente grande. Da questo assurdo segue l'irrazionalità di e^x con x intero qualsiasi.

9.5 Testi Originali

Originale 9.1 [Lambert,] (pp. 306-308 di [6])

Comparons maintenant les quantités transcendentes circulaires aux quantités logarithmiques qui leur sont analogues. Soit e le nombre, dont le logarithme hyperbolique est $= 1$. Et on sait que si dans les deux suites dont nous sommes servi ci dessus

$$\sin v = v - \frac{1}{3!}v^3 + \frac{1}{5!}v^5 - \frac{1}{7!}v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2!}v^2 + \frac{1}{4!}v^4 - \frac{1}{6!}v^6 + \&c.$$

tous les signes sont pris positifs, ellese se changent en

$$\frac{\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^{-v}}{2} = v + \frac{1}{3!}v^3 + \frac{1}{5!}v^5 + \frac{1}{7!}v^7 + \&c.$$

$$\frac{\mathrm{e}^v + \mathrm{e}^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}v^2 + \frac{1}{4!}v^4 + \frac{1}{6!}v^6 + \&c.$$

Or, en traitant ces deux dernieres suites de la même maniere que nous avons traité les deux premiers l'opération ne différera que dans les signes, qui pour le cas présent seront tous positifs. Comme on peut s'en convaincre sans peine, je n'en rapporterai point le détail. Il sera donc

$$\frac{\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^{-v}}{\mathrm{e}^v + \mathrm{e}^{-v}} = \cfrac{1}{1 : v + \cfrac{1}{3{:}v + \cfrac{1}{5{:}v + \cfrac{1}{7{:}v + \cfrac{1}{9{:}v + \cfrac{1}{11{:}v + \cfrac{1}{13{:}v + \&c.}}}}}}}$$

Et comme il est

$$\frac{\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^{-v}}{\mathrm{e}^v + \mathrm{e}^{-v}} = \frac{\mathrm{e}^{2v} - 1}{\mathrm{e}^{2v} + 1}$$

on voit qu'en faisant $2v = x$, on aura

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \cfrac{1}{2 : x + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}x + \cfrac{1}{18{:}v + \&c.}}}}}$$

d'ou l'on tire

$$\frac{\mathrm{e}^x + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2{:}x + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}v + \&c.}}}}}$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{2} = \cfrac{1}{(2 : x) - 1 + \cfrac{1}{6{:}x + \cfrac{1}{10{:}x + \cfrac{1}{14{:}x + \cfrac{1}{18{:}v + \&c.}}}}}$$

(...) On trouvera encore ici que v & e^v, de même que x & e^x ne seront jamais des quantités rationelles en même tems. Ainsi je ne m'arrêterai pas à en faire d'eduction reiterée. Il s'agit plutôt d'interpréter les formules que nous venons d'exposer.

Originale 9.2 [LIOUVILLE] ([7]).

On prouve dans les éléments que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que le même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationneles, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c, des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x, puis qu'on multiplie les deux membre par $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + ...\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + ...\right) = \mu$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm\frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est < 0 et n impair si b est > 0; en prenant de plus n très grand, l'èquation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ. Donc etc.

Bibliografia

[1] L. Euler: De fractionibus continuis dissertatio. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* **9** (1744), 98-137.

[2] L. Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum.* 2 voll. Lausanne: Bousquet (1748).

[3] E. Bortolotti: Le antiche regole empiriche per calcolo approssimato dei radicali quadratici e le prime serie infinite. *Boll. Mathesis* **11** (1919), 14-29.

[4] E. Bortolotti: La scoperta delle frazioni continue. *Boll. Mathesis* **11** (1919), 101-123.

[5] E. Bortolotti: La storia dei presunti scopritori delle frazioni continue. *Boll. Mathesis* **11** (1919), 157-188.

[6] J.H. Lambert: Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. *Mém. Acad. Sci. Berlin* **17** (1768), 265-322.

[7] J. Liouville: Sur l'irrationalité du nombre $e = 2,718...$;. *Journ. Math. Pures et Appliquées* **5** (1840), 192.

[8] J. Liouville: Addition a la note sur l'irrationalité du nombre e. *Journ. Math. Pures et Appliquées* **5** (1840), 193-194.

[9] C. Hermite: Sur la fonction exponentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **77** (1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293. In *Œuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Acedémie des Sciences, par Émile Picard*, Vol. III. Gauthier-Villars, Paris (1912), pp. 150-181.

[10] C. Hermite: Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques. *Report of the British Association for Advancement of Science*, 43th meeting (1873), pp. 22-23. In *Œuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Acedémie des Sciences, par Émile Picard*, Vol. III. Gauthier-Villars, Paris (1912), pp. 127-130.

Capitolo 10

La trigonometria iperbolica

10.1 La trigonometria iperbolica di Vincenzo Riccati

Abbiamo visto nel Capitolo 5 come i logaritmi siano stati legati alla geometria dell'iperbole a partire da Gregorio di San Vincenzo e Alfonso De Sarasa. D'altra parte la teoria dei logaritmi dei numeri immaginari di Eulero ha tratto profitto dalla geometria della circonferenza. Le analogie tra queste due coniche, che ad un primo sguardo sembrano le più dissimili, sono alla base della nascita della trigonometria iperbolica, ovvero di una trigonometria basata sulle iperboli *equilatere* le cui proprietà geometriche vengono utilizzate per definire funzioni analoghe alle classiche funzioni circolari seno, coseno e tangente. I primi ad aver introdotto la trigonometria iperbolica, indipendentemente l'uno dall'altro, sono padre Vincenzo Riccati (1707-1775), gesuita e figlio del conte Jacopo Riccati cui si deve l'omonima equazione differenziale, ed ancora Johann Heinrich Lambert. Temporalmente, il primo ad aver studiato funzioni trigonometriche associate all'iperbole equilatera è Riccati che ne parla nel primo volume degli *Opuscula* [2] pubblicati a Bologna nel 1757 mentre Lambert se ner occupa sia nella memoria [1] già studiata al capitolo precedente e nella successiva *Observations Trigonométriques* pubblicata nel 1771 [3].

Vedremo i problemi che hanno condotto Lambert ad occuparsi di questo problema nella prossima sezione mentre qui ci concentriamo sulle motivazioni di Riccati che sono piuttosto originali. Nella prima parte del quarto Opuscolo egli si pose il problema di trovare, almeno per qualche famiglia di equazioni algebriche di grado superiore al quarto, una formula risolutiva. Osserviamo che, quando Riccati pubblicò gli *Opuscula* il teorema di Abel-Ruffini non era ancora stato dimostrato. In particolare egli cercava quelle equazioni che ammettevano una rappresentazione analitica delle radici analoga alla formula cardanica per le equazioni di terzo grado. Trovate delle famiglie di equazioni di grado via via crescente per cui esisteva una rappresentazione analitica delle raqdici, egli intendeva costruirle geometricamente. Mentre alcune radici erano

collegabili alla geometria della circonferenza, come RICCATI chiarirà in seguito, in altre la presenza di alcuni fattori $\sqrt{-1}$ rendeva inutile il ricorso alla circonferenza. È a questo punto che si inserisce lo studio della trigonometria basata sull'iperbole equilatera la cui equazione canonica $y^2 - x^2 = a^2$ è legata a quella di una circonferenza dalla sostituzione formale $x \mapsto \sqrt{-1}x$, come noto già a LEIBNIZ e NEWTON. L'introduzione delle funzioni iperboliche è condotta sull'analogia con le funzioni circolari.

Se prendiamo un arco AF qualsiasi di un cerchio di raggio CA e si traccia dal punto F la normale FD a CA, è noto che il raggio ovvero il semiasse CA si può chiamare seno totale, il segmento FD seno dell'arco AF, ed il segmento CD il suo coseno. Poiché però il settore ACF è equivalente alla metà del rettangolo di lati pari al seno totale ed all'arco AF, segue che il doppio del settore ACF diviso per il seno totale è uguale all'arco AF. Pertanto FD si può chiamare seno, CD coseno del doppio del settore diviso per il seno totale.

Per analogia, il seno ed il coseno possono essere trasportati all'iperbole equilatera. Si tracci l'iperbole equilatera di semiasse CA uguale al raggio del cerchio e si tracci, a partire dal centro C verso un punto F qualsiasi sulla curva, il segmento CF e dallo stesso punto F si tracci FD ortogonale all'asse CD. Se CA è detto seno totale iperbolico, FD si potrà chiamare seno iperbolico, CD coseno iperbolico del doppio del settore ACF diviso per il seno totale. Queste sono le definizioni dei nomi.[1] ([2] p.68, Opusculum Quartum. Pars altera)

Riferendosi al cerchio RICCATI osserva dunque che le funzioni trigonometriche seno e coseno si possono far corrispondere non solo ad un arco AF o all'angolo da esso sotteso, ma anche al doppio del settore ACF diviso per il raggio. Ciò è conseguenza della proporzionalità, caratteristica della circonferenza ma non dell'iperbole equilatera, che l'ampiezza di un arco in radianti, la lunghezza dell'arco e (due volte) l'area del settore circolare sono proporzionali. Quando introduce le analoghe funzioni iperboliche, la sola associazione che viene fatta è con il (doppio del) settore iperbolico ACF. Grazie alle proprietà logaritmiche delle aree di tali settori che RICCATI mostra subito dopo è possibile costruire una trigonometria iperbolica il cui requisito principale è quello di avere regole efficaci di somma e sottrazione delle funzioni trigonometriche appena definite.

Non è però tanto semplice in pratica moltiplicare e dividere settori iperbolici quanto lo è per i settori circolari che sono sempre proporzionali agli archi che li racchiudono. Al tal scopo esponiamo un metodo grazie al quale effettueremo

[1] Si in circulo, cujus radius CA accipiatur arcus quilibet AF, & ex puncto F demittatur in CA normalis FD, notum est, radium, seu semiaxem CA appellari sinum totum, rectam FD sinum arcus AF, & interceptam CD ejus cosinum. Quum autem sector ACF aequet dimidium rectanguli ex sinu toto & arcu AF, constat, duplum sectoris ACF divisi per sinum totum arcui AF esse aequalem. Itaque FD vocari potest sinus, CD cosinus dupli sectoris divisi per sinum totum.

Per analogiam sinus, & cosinus ex circulo traduci possunt ad hyperbolam aequilateram. Describatur hyperbola aequilatera, cujus semiaxi CA radio circuli sit aequalis, & ex centro C ad punctum quodlibet F in curva positum, agatur recta CF, & ex eodem puncto F demittatur FD in axem CD productum. Si vocetur CA sinus totus hyperbolicus, FD vocari poterit sinus hyperbolicus, CD cosinus hyperbolicus dupli sectoris ACF divisi per sinum totum. Hae sunt nominum definitiones.

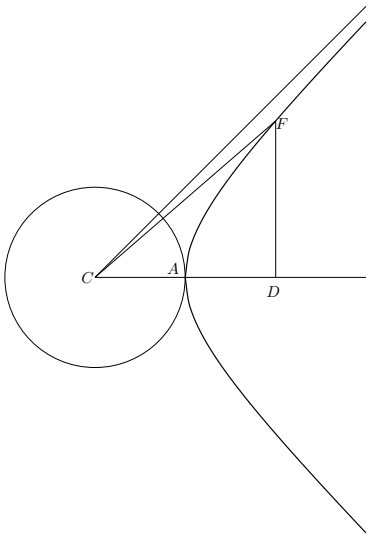

Figura 10.1: Le funzioni iperboliche associate al settore ACF sono CD (coseno iperbolico) e FD (seno iperbolico).

queste operazioni senza difficoltà nella pratica. Si tracci dunque l'asintoto CK dell'iperbole che, come è noto, forma un angolo metà di uno retto con l'asse CA e dai punti A ed F si traccino i segmenti AK ed FH, perpendicolari all'asintoto. Poiché per una proprietà dell'iperbole il rettangolo AKC è equivalente al rettangolo FHC, anche i triangoli AKC ed FHC lo saranno in quanto ciascuno metà di quei rettangoli; sottratto dunque il triangolo COK in comune, il triangolo restante AOC è equivalente al trapezio $OKHF$. Si aggiunga ad ambo le parti il triangolo mistilineo AOF e si otterrà che il settore CAF è equivalente allo spazio iperbolico $AKHF$.[2]([2] p.68, Opusculum Quartum. Pars altera)

Questo risultato, che poggia sull'ormai nota equivalenza di tutti i rettangoli con due vertici opposti nel centro e su un punto dell'iperbole, è fondamentale per il successo della trigonometria iperbolica perché riconduce le formule di addizione e sottrazione ad operazioni logaritmiche.

Da questa dimostrazione segue chiaramente che i settori iperbolici sono equivalenti agli spazi che sono compresi tra AK, una sua parallela, l'asintoto e la curva; inoltre, le loro somme e differenze sono equivalenti alle somme e alle

[2]Sed non ita facile est in praxi multiplicae, atque dividere sectores hyperbolicos, quemadmodum circulares qui arcubus circuli, a quibus clauduntur, sunt semper proportionales. Quamobrem methodus aperienda est, qua idipsum per per praxim non difficiliter efficiamus. Agatur assymptoton hyperbolae CK, faciens, ut notum est, cum axe CA angulum semirectum, & ex punctis A, F demittantur in assymptoton AK, FH. Quoniam ex hyperbolae proprietate rect. AKC = rect. FHC, etiam triangulum AKC = triang. FHC: sunt enim haec triangula rectangulorum dimidia; ergo dempto communi triangulo COK reliquum erit triang. AOC aequale trapezio OKHF. Addatur utrique parti triangulum mixtilineum AOF, & orietur sector CAF aequalis spatio hyperbolico AKHF.

differenze di questi. Se dunque è noto come moltiplicare e dividere questi spazi, senza fatica si otterranno le regole per i settori iperbolici.

Se sull'asintoto si ha la proporzione CK: CG = CH: CP, e si tracciano le ordinate GE, HF, PN, non vi è alcuno che ignori come lo spazio AHGE sia equivalente ad FHPN. Dunque, se si prende una serie di termini in progressione geometrica lungo l'asintoto, i corrispondenti spazi crescono secondo una progressione aritmetica. Dunque non vi è nulla di più facile che moltiplicare o dividere, una volta trovate tali quantità proporzionali. Siano dati due spazi AKGE, AKHF e se ne voglia determinare uno solo, equivalente ad entrambi. Si (prenda P in modo che) CK: CG::CH: CP e si tracci l'ordinata PN: lo spazio cercato è AKPN.[3]([2] pp.68-69, Opusculum Quartum. Pars altera)

Il problema di determinare un'unica porzione iperbolica equivalente a due regioni parzialmente sovrapposte viene risolto grazie alle proprietà logaritmiche dell'iperbole (Fig. 10.2). Preso CP in modo che valga la proporzione CK: CG=CH: CP si ha che la porzione iperbolica FHPN è equivalente alla porzione AKGE per cui $A(AKPN) = A(AKGE)+A(EGPN) = A(AKGE)+A(EGHF)+A(FHPN) = A(AKGE) + A(AKHF)$. In modo analogo Riccati insegna a costruire multipli e sottomultipli di regioni iperboliche. Le proprietà logaritmiche dei settori iperbolici fanno sì che Riccati chiami *logaritmi* anche tali settori. Ora tutto è pronto per determinare le regole di somma e sottrazione per i seni e coseni iperbolici.

Osserva un poco quali siano le proprietà del sistema di logaritmi che useremo. Detto $CA = r$ il seno totale si ha $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$ che rappresenterà il protonumero, cioè quel numero il cui logaritmo è $= 0$. Allora si trova che il valore costante della sottotangente del sistema è $= r$, cioè il seno totale. Chiamerò analoghi questi logaritmi quando sono analoghi agli archi circolari.

Osservate queste cose otteniamo le proprietà dei seni e dei coseni (iperbolici). Indicherò il seno ed il coseno iperbolico con le notazioni Sh e Ch. Come prima cosa, dati i seni ed i coseni dei due logaritmi ϕ, π, si richedono il seno ed il coseno del logaritmo $\phi + \pi$. Sia $CB = Ch\,\phi$, $BE = Sh\,\phi$, $CD = Ch\,\pi$, $DF = Sh\,\pi$. Si supponga $CM = Ch\overline{\phi + \pi}$, & $MN = Sh\overline{\phi + \pi}$. Si prolunghino BE, DF, MN che intersecano l'asintoto nei punti I, L, Q. Si traccino a partire dai punti E, F, N i segmenti EG, FH, NP ortogonali all'asintoto. Poiché l'angolo ACK è metà dell'angolo retto sarà BI=CB, DL=CD, MQ=CM, da cui seguirà $EI = Ch\,\phi - Sh\,\phi$, $FL = Ch\,\pi - Sh\,\pi$, $NQ = Ch\overline{\phi + \pi} - Sh\overline{\phi + \pi}$.

[3]Ex hac demonstratione aperte constat, hyperbolicos sectores aequales esse spatiis, quae continentur inter AK, ejusque parallelam, assymptoton, & curvam; & illorum summas, ac differentias aequales esse summis istorum, ac differentiis. Quare si spatia haec hyperbolica noverit moltiplicare, atque dividere, idipsum nullo negotio praestabit etiam in sectoribus hyperbolicis.

Si in assymptoto fiant ut CK: CG :: CH: CP, & agantur ordinatae GE, HF, PN, nemo unus est qui nesciat, fore spatium AHGE=FHPN. Quare, si in assymptoto accipiatur series geometrice proportionalium, spatia hisce abscissis respondentia crescent in continua arithmetica proportione. Itaque supposita inventione quantitatum proportionalium nihil facilius est, quam praedicta spatia multiplicare, atque dividere. Sint duo spatia AKGE, AHKF, quibus unicum aequale inveniendum sit. Fac ut CK: CG::CH: CP, & age ordinatam PN, idipsum spatium, quod quaeritur est AKPN.

Quindi detto $CA = r$, *sarà* $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$. *Nuovamente,* $GI = \frac{Ch\,\phi - Sh\,\phi}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Ch\,\pi - Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$ *e* $PQ = \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$. *Infine* $CI = \sqrt{2}Ch\,\phi$, $CL = \sqrt{2}Ch\,\pi$, *e* $CQ = \sqrt{2}Ch\,\overline{\phi+\pi}$. *Per questo* $CG = \sqrt{2}Ch\,\phi - \frac{Ch\,\phi - Sh\,\phi}{\sqrt{2}} = \frac{Ch\,\phi + Sh\,\phi}{\sqrt{2}}$, $CH = \frac{Ch\,\pi + Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$: *per quanto dimostrato in precedenza tuttavia,* $CK : CG :: CH : CP$: *dunque* $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{Ch\,\phi + Sh\,\phi}{\sqrt{2}} :: \frac{Ch\,\pi + Sh\,\pi}{\sqrt{2}} : \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$ *e passando dalla proporzione all'uguaglianza si avrà* $Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Ch\,\pi} \cdot \overline{Sh\,\phi + Sh\,\pi}}{r}$.

Trovato questo primo teorema, ne otterremo un altro grazie all'equazione locale dell'iperbole, cioè $\overline{Ch}^2 - \overline{Sh}^2 = rr$: *Dunque* $\overline{Ch. + Sh.} \cdot \overline{Ch. - Sh} = rr$ *o* $\overline{Ch + Sh} = \frac{rr}{\overline{Ch. - Sh.}}$. *Pertanto, sostituiti questi valori avremo*

$$\frac{rr}{Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}} = \frac{r^3}{\overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}},$$

o $Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi} = \frac{\overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{r}$: *che è il secondo teorema.*

Se sommi e sottrai l'equazione del secondo teorema a quella del primo teorema otterrai

$$Ch\,\overline{\phi+\pi} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi + Sh\,\pi} + \overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{2r} = \frac{Ch\,\phi \cdot Ch\,\pi + Sh\,\pi \cdot Sh\,\phi}{r},$$

e

$$Sh\,\overline{\phi+\pi} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi + Sh\,\pi} - \overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{2r} = \frac{Ch\,\phi \cdot Sh\,\pi + Ch\,\pi \cdot Sh\,\phi}{r}$$

come si doveva trovare.[4]

[4]Sed paucis adverte, quaenam futurae sint conditiones ejus, quo utimur, logarithmorum systematis. Vocato sinu toto $CA = r$ erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$ qui erit protonumerus, scilicet numerus ille, cujus logarithmus = 0. Subtangens autem constans systematis invenitur esse = r, scilicet sinui toti. Hos autem logarithmos, quando analogi sunt arcubus circularibus, vocabo logarithmos analogos.

His praenotatis sinuum & cosinuum proprietates persequamur. Sinus, & cosinus hyperbolicos per haec signa notabo *Sh* et *Ch*. Primo datis duorum logarithmorum ϕ, π sinibus, & cosinibus quaeritur sinus & cosinus logarithmi $\phi + \pi$. Sit $CB = Ch\,\phi$, $BE = Sh\,\phi$, $CD = Ch\,\pi$, $DF = Sh\,\pi$. Supponatur $CM = Ch\overline{\phi+\pi}$, & $MN = Sh\overline{\phi+\pi}$. BE, DF, MN producantur, & concurrant cum assymptoto in punctis I, L, Q. Ex punctis E, F, N agantur assymptotos normales EG, FH, NP. Quum propter angulum semirectum ACK fit BI=CB, DL=CD, MQ=CM, constat fore $EI = Ch\,\phi - Sh\,\phi$, $FL = Ch\,\pi - Sh\,\pi$, $NQ = Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}$. Deinde quando vocata est $CA = r$, erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Item $GI = \frac{Ch\,\phi - Sh\,\phi}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Ch\,\pi - Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$, & $PQ = \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$. Postremo $CI = \sqrt{2}Ch\,\phi$, $CL = \sqrt{2}Ch\,\pi$, & $CQ = \sqrt{2}Ch\,\overline{\phi+\pi}$. Quapropter $CG = \sqrt{2}Ch\,\phi - \frac{Ch\,\phi - Sh\,\phi}{\sqrt{2}} = \frac{Ch\,\phi + Sh\,\phi}{\sqrt{2}}$, $CH = \frac{Ch\,\pi + Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$: atqui ex supra demonstratis debet esse $CK : CG :: CH : CP$: Igitur $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{Ch\,\phi + Sh\,\phi}{\sqrt{2}} :: \frac{Ch\,\pi + Sh\,\pi}{\sqrt{2}} : \frac{Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi}}{\sqrt{2}}$, & facto transitu ab analogia ad aequalitatem fiet $Ch\,\overline{\phi+\pi} + Sh\,\overline{\phi+\pi} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Ch\,\pi} \cdot \overline{Sh\,\phi + Sh\,\pi}}{r}$.

Invento hoc primo theoremate aliud nanciscemur ope localis aequationis hyperbolae, nempe

Poche note, oltre all'ausilio della Figura 10.2, sono sufficienti per seguire la dimostrazione, cui Riccati fa seguire la deduzione di formule di duplicazione, triplicazione, ecc. per formare un quadro completo della trigonometria iperbolica.

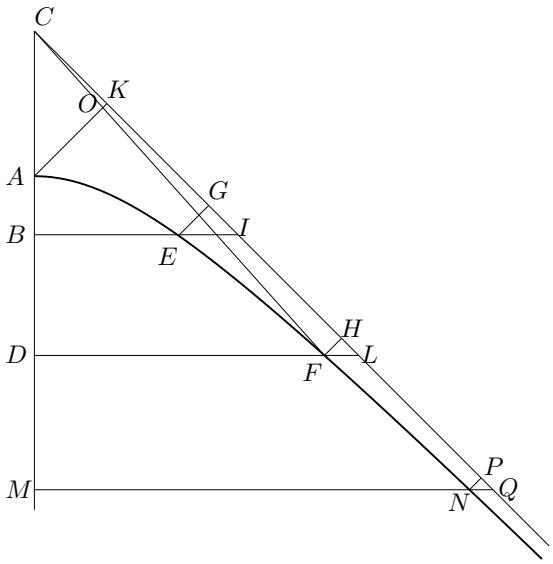

Figura 10.2: Le funzioni iperboliche introdotte da Vincenzo Riccati.

Osserviamo alcune peculiarità circa la notazione. Con la scrittura $\overline{a+b}$ si intende che l'operatore di addizione connette i termini che stanno al di sotto della barra, per cui si tratta di una notazione alternativa alla parentesi: $\overline{a+b} = (a+b)$. Scrivendo una proporzione (*analogia*, che riproduce il nome greco originale) come $CK : CG :: CH : CP$: Riccati separa i medi con :: anziché con un segno di uguaglianza. Si tratta di una notazione che era stata

$\overline{\overline{Ch}^2 - \overline{Sh}^2} = rr$: Ergo $\overline{Ch. + Sh.} \cdot \overline{Ch. - Sh} = rr$ sive $\overline{Ch + Sh} = \frac{rr}{\overline{Ch. - Sh.}}$. Quapropter valoribus substitutis habebimus

$$\frac{rr}{\overline{Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}}} = \frac{r^3}{\overline{Ch\,\phi + Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi + Sh\,\pi}},$$

sive $\overline{Ch\,\overline{\phi+\pi} - Sh\,\overline{\phi+\pi}} = \frac{\overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{r}$: quod est theorema alterum.

Si alterius theorematis aequationem primum addas, deinde demas ab aequatione primi theorematis obtinebis

$$\overline{Ch\,\overline{\phi+\pi}} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi + Sh\,\pi} + \overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{2r} = \frac{Ch\,\phi \cdot Ch\,\pi + Sh\,\pi \cdot Sh\,\phi}{r},$$

&

$$\overline{Sh\,\overline{\phi+\pi}} = \frac{\overline{Ch\,\phi + Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi + Sh\,\pi} - \overline{Ch\,\phi - Sh\,\phi} \cdot \overline{Ch\,\pi - Sh\,\pi}}{2r} = \frac{Ch\,\phi \cdot Sh\,\pi + Ch\,\pi \cdot Sh\,\phi}{r}$$

Q. E. Inv.

introdotta da William OUGHTRED e che venne usata per molto tempo da tutti gli autori. Il motivo di questa notazione è la natura *sui generis* di una proporzione che indica una somiglianza (analogia, appunto) tra rapporti più che un'uguaglianza dei loro valori numerici. Le origini di questo *status* particolare delle proporzioni possono presumibilmente ascriversi al ruolo che i rapporti avevano, già in EUCLIDE ma anche in epoca moderna, con la musica [4]. Infine, la dissimmetria rispetto alle formule di somma e sottrazione in utilizzo oggi deriva dall'aver preso il *seno totale* pari genericamente ad r, anziché unitario. Ottenute formule trigonometriche per settori come $n\phi$ o $\frac{\phi}{n}$, RICCATI ritorna al problema da cui era partito e può costruire geometricamente le radici di alcune famiglie di equazioni algebriche.

10.2 La trigonometria iperbolica di LAMBERT

Per ottenere una completa simmetria con le formule di addizione per funzioni circolari, RICCATI moltiplica al bisogno alcune di queste funzioni per $\sqrt{-1}$. Come già osservato, si trattava di un artificio formale già utilizzato da LEIBNIZ e NEWTON e, in epoca contemporanea a quella di cui ci stiamo occupando, da un allievo di LAGRANGE, Daviet Francois DE FONCENEX (1734-1799) in un lavoro molto discusso apparso sul Vol. I delle *Miscellanea Societatis Taurinensis*. DE FONCENEX aveva però anche osservato che alla base dell'analogia tra circonferenza ed iperbole equilatera vi era la condivisione di centro e diametro. Questa osservazione spinse LAMBERT a cercare di approfondire l'analogia su basi puramente geometriche, evitando il ricorso a quantità immaginarie. Tale obiettivo fu perseguito in [6] dove ottenne una ricca tabella di confronto tra le due coniche.

Testo 10.1 (LAMBERT) [1], pp. 309-310. Originale 10.1.

Occorre però mostrare qui fino a che punto una tale analogia possa esser spinta indipendentemente dalle quantità immaginarie. Sia dunque (Fig. 10.3) C il centro, CH l'asse, CA il semidiametro dell'iperbole equilatera AMG e del cerchio AND, CF l'asintoto, AB la perpendicolare all'asse ed allo stesso tempo la tangente comune al cerchio ed all'iperbole. A partire dal centro C si traccino le rette CM, Cm infinitamente vicine l'una all'altra e dai punti di intersezione M, m, N, n si abbassino sull'asse le ordinate MP, mp, NQ, nq. Infine il raggio AC sia uguale ad 1. Diciamo l'angolo $MCA = \varphi$ *e sia*

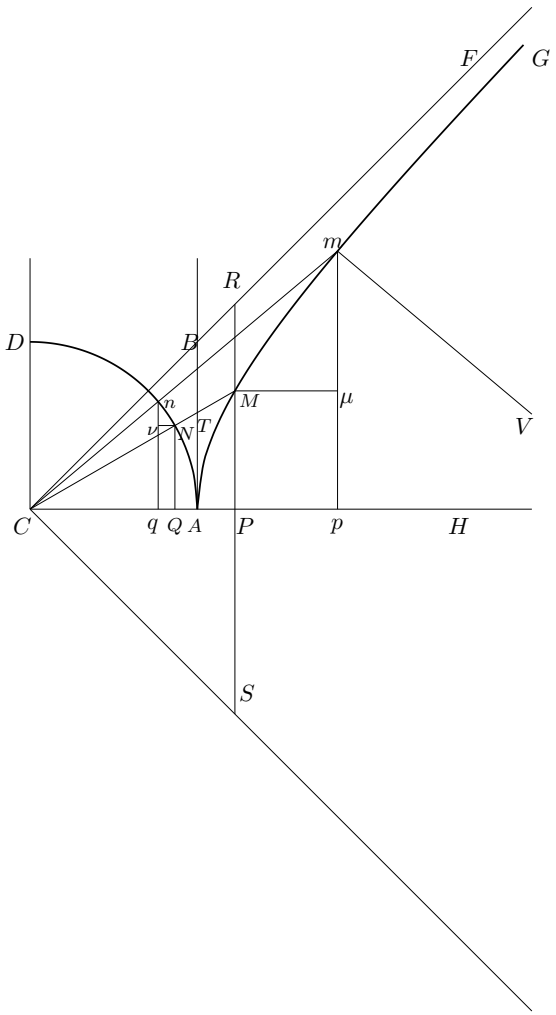

Figura 10.3: Analogia geometrica tra circonferenza ed iperbole in Lambert.

per l'iperbole	*per il cerchio*
l'ascissa $CP = \xi$	$CQ = x$
l'ordinata $PM = \eta$	$QN = y$
il segmento $AMCA = u : 2$	$ANCA = v : 2$
e sarà	
$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$	$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}$,
$1 + \eta\eta = \xi\xi = \eta\eta \cot\varphi^2$	$1 - yy = xx = yy \cot\varphi^2$
$\xi\xi - 1 = \eta\eta = \xi\xi \operatorname{tang}\varphi^2$	$1 - xx = yy = xx \operatorname{tang}\varphi^2$
$CM^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi^2(1 + \operatorname{tang}\varphi^2)$	$CN^2 = x^2 + y^2 = x^2(1 + t\varphi^2)$
$= \frac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}$	$= \frac{1+t\varphi^2}{1+t\varphi^2} = 1$
Dunque	
$+\mathrm{d}u = \mathrm{d}\varphi \left(\frac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}\right) = \frac{ddt\varphi}{1-t\varphi^2}$	$+\mathrm{d}v = \mathrm{d}\varphi = \frac{ddt\varphi}{1+t\varphi^2}$
$+\mathrm{d}\xi = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3/2}}$	$-\mathrm{d}x = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1+t\varphi^2)^{3/2}}$
$+\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}t\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3/2}}$	$\mathrm{d}y = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1+t\varphi^2)^{3/2}}$
$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{(1+t\varphi^2)}}$
$\eta = \frac{t\varphi}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}$	$y = \frac{t\varphi}{\sqrt{(1+t\varphi^2)}}$
Dunque	
$+\mathrm{d}\xi : \mathrm{d}u = \eta$	$-\mathrm{d}x : \mathrm{d}v = y$
$+\mathrm{d}\eta : \mathrm{d}u = \xi$	$\mathrm{d}y : \mathrm{d}v = x$
$+\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\eta \operatorname{tang}\varphi$	$-\mathrm{d}\xi : \mathrm{d}y = \operatorname{tang}\varphi$

Grazie alla coppia di rette vicine CM e Cm, LAMBERT studia le proprietà differenziali di circonferenza ed iperbole in parallelo che culminano con le ultime tre uguaglianze della tabella grazie alle quali, dopo alcune considerazioni di geometria elementare, egli ottiene l'aspetto geometrico su cui poggia l'analogia tra le due coniche: come in un cerchio il raggio è uguale al segmento di normale delimitato dalla tangente ad una circonferenza ed un suo asse—anzi, i due segmenti coincidono sempre—così in un'iperbole ogni raggio come Cm è congruente con il segmento mV di normale all'iperbole delimitato tra l'asse CV ed il punto m sull'iperbole.

Siccome l'angolo φ è lo stesso per l'iperbole e per la circonferenza, dalle ultime due equazioni segue che

$$\operatorname{tang}\varphi = \mathrm{d}\xi : \mathrm{d}\eta = -\mathrm{d}x : \mathrm{d}y = \eta : \xi = y : x\,.$$

Dunque gli angoli $Mm\mu$, $Nn\nu$ sono uguali, da cui segue

$$Mm : Nn = \mathrm{d}\xi : -\mathrm{d}x = \mathrm{d}\eta : \mathrm{d}y$$

ed i triangoli caratteristici $Mm\mu$, $Nn\nu$ sono simili. Infine, siccome $Cnq = Cmp$ e $Nnq = Mmp$, sarà $Cnq + Nnq = Cmp + Mmp = 90°$. Tracciata dunque la normale mV sarà $Vmp + Mmp = 90°$ e dunque $Vmp = Cmp$. Così la normale mV prolungata fino all'asse AC è uguale a Cm, proprio come nel cerchio la normale Cn è uguale a Cn. Ecco dunque qual è il fondamento su cui si basa

tutto quanto c'è di reale nei confronti che si fanno tra circonferenza ed iperbole[5] (p. 310 di [1])

Chiarita la base geometrica che sorregge la somiglianza formale tra circonferenza ed iperbole, LAMBERT trova gli sviluppi in serie delle coordinate (ξ, η) in funzione del settore u osservando che, grazie al significato geometrico di u ed alla simmetria dell'iperbole ξ dovrà essere una funzione pari di u mentre η sarà una funzione dispari. Poiché quando $u = 0$ si ha $\xi = 1$ ed $\eta = 0$, LAMBERT può supporre validi gli sviluppi

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + ... \\ \eta &= au + bu^3 + cu^5 + du^7 + ... \end{aligned}$$

e, grazie alle equazioni

$$\mathrm{d}\xi : \mathrm{d}u = \eta \qquad \mathrm{d}\eta : \mathrm{d}u = \eta\,,$$

egli può ricavare i coefficienti di questi sviluppi ottenendo

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{4!}u^4 + \tfrac{1}{6!}u^6 + ... \\ \eta &= u + \tfrac{1}{3!}u^3 + \tfrac{1}{5!}u^5 + \tfrac{1}{7!}u^7 + ... \end{aligned}$$

che permettono di ricavare le note parametrizzazioni dell'iperbole in termini di funzioni iperboliche

$$\xi = \frac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2}\,, \qquad \eta = \frac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}\,.$$

Dall'analogia con la circonferenza LAMBERT trae anche una formulazione geometrica per l'impossibilità di avere e^u razionale quando u lo è: il settore iperbolico $AMCA$ sarà una quantità irrazionale, cioè incommensurabile con il quadrato del raggio AC, ogni volta che la tangente trigonometrica di quel settore è razionale.

Il significato geometrico del parametro u viene evidenziato osservando che, siccome $\mathrm{e}^u = \xi + \eta$ ed $\mathrm{e}^{-u} = \xi - \eta$ e gli asintoti CF e CS formano tra loro un angolo retto, si avrà $\xi = CP = PS = PR$ ed $\eta = PM$ da cui si ricava

[5] Comme l'angle φ est le même pour l'hyperbole & pour le cercle, il suit des deux dernieres équations qu'il est

$$\mathrm{tang}\varphi = \mathrm{d}\xi : \mathrm{d}\eta = -\mathrm{d}x : \mathrm{d}y = \eta : \xi = y : x\,.$$

Ainsi les angles $Mm\mu$, $Nn\nu$ sont égaux. Ce qui donne

$$Mm : Nn = \mathrm{d}\xi : -\mathrm{d}x = \mathrm{d}\eta : \mathrm{d}y\,.$$

Et le triangles caractéristiques $Mm\mu$, $Nn\nu$ sont semblables. Enfin, comme il est $Cnq = Cmp$, & $Nnq = Mmp$, il sera $Cnq + Nnq = Cmp + Mmp = 90°$. Tirant donc la normale mV, il sera $Vmq + Mmq = 90°$, donc $Vmq = Cmq$. Ainsi la normale mV prolongée jusqu'à l'axe AC est égale à Cm, tout comme dans le cercle la normale Cn est égale à Cn. Voilà donc surquoi se fonde tout ce qu'il y a de réel dans les comparaisons qu'on a faites entre le cercle & l'hyperbole

$e^u = SM$ ed $e^{-u} = MR$. Poiché il prodotto di queste quantità è pari ad 1, cioè la lunghezza di AB, si può concludere

$$u = \log \frac{SM}{1} = \frac{SM}{AB} = \log \frac{AB}{MR}$$

Segue allora un'ulteriore interpretazione geometrica: siccome e^u non può essere razionale se u lo è, allo stesso modo i segmenti SM ed MR non potranno essere razionali se lo è l'area $\frac{1}{2}u$ del settore iperbolico $AMCA$. Come ulteriore risultato che avrà diverse applicazioni, Lambert deduce per integrazione di

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

$$2u = \log\frac{1+\tan\varphi}{1-\tan\varphi} = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) = \log\tan(SCM)$$

ovvero

$$2u = -\log\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi} = -\log\tan\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = -\log\tan(RCM)\,.$$

Nel lavoro [1] depositato allaccademia di Berlino già nel 1761, Lambert non cita Riccati e a ben vedere neppure sviluppa una vera e propria trigonometria iperbolica ma si accontenta di aver posto su basi geometriche l'analogia tra circonferenza ed iperbole. Qualche anno più tardi egli tornerà ad occuparsi di trigonometria iperbolica nel lavoro [3] che contiene la soluzione di un problema di trigonometria *sferica* importante in astronomia. Egli evita il ricorso ad archi immaginari per calcolare l'arco diurno di una stella che rimanga sempre al di sotto dell'orizzonte ricorrendo ancora una volta all'utilizzo di un'iperbole equilatera e sviluppa una trigonometria iperbolica completa, sulla scia di quella di Riccati il cui lavoro viene ora esplicitamente richiamato. Inoltre, Lambert costruisce delle tavole per le funzioni iperboliche, analoghe a quelle per funzioni circolari. Come Riccati, anche Lambert è consapevole del fatto che le funzioni iperboliche possono essere associate solo a settori iperbolici e non ad angoli od archi

Il seno ed il coseno circolare possono essere riferiti indifferentemente all'arco, all'angolo ed al settore a motivo della proporzionalità costante che c'è tra questi elementei. Non è così per quanto riguarda il seno ed il coseno iperbolico pq, Cp. Tali funzioni vogliono principalmente essere riferite a settori come QCqQ.[6] (p. 330 di [3])

10.3 Testi originali

Originale 10.1 [Lambert] [1], pp. 309-310

[6] Les sinus & les cosinus circulaires peuvent se rapporter indifféremment à l'arc, à l'angle & au secteur, à cause de la proportionalité constante qui s'y trouve. Il n'est pas de même pour ce qui regard les sinus & les cosinus hyperboliques *pq*, *Cp*. C'est aux secterurs *QCqQ* que ces fonctions veulent principalement être rapportées.

Mais ici il s'agit de voir jusqu'où cette affinité peut être poussée indépendamment des quantites imaginaires. Soit donc C le centre, CH l'axe, CA le demi-diametre de l'hyperbole équilaterale AMG & du cercle AND, CF l'asymptote, AB perpendiculaire à l'axe, & en même tems la tangente commune au cercle & à l'hyperbole. Soient tirées du centre C les deux droites CM, Cm, infiniment proches l'une de l'autre, & des points d'intersection M, m, N, n, soient abaissées sur l'axe les ordonnées MP, mp, NQ, nq. Enfin soit le rayon AC=1. Faisons l'angle $MCA = \varphi$, & soit

pour l'hyperbole	pour le cercle
l'abscisse $CP = \xi$	$CQ = x$
l'ordonnée $PM = \eta$	$QN = y$
le segment $AMCA = u : 2$	$ANCA = v : 2$
& il sera	
$\mathrm{tang}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$	$\mathrm{tang}\varphi = \frac{y}{x}$,
$1 + \eta\eta = \xi\xi = \eta\eta \cot\varphi^2$	$1 - yy = xx = yy \cot\varphi^2$
$\xi\xi - 1 = \eta\eta = \xi\xi \mathrm{tang}\varphi^2$	$1 - xx = yy = xx \mathrm{tang}\varphi^2$
$CM^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi^2(1 + \mathrm{tang}\varphi^2)$	$CN^2 = x^2 + y^2 = x^2(1 + t\varphi^2)$
$= \frac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}$	$= \frac{1+t\varphi^2}{1+t\varphi^2} = 1$
Donc	
$+\mathrm{d}u = \mathrm{d}\varphi \left(\frac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}\right) = \frac{ddt\varphi}{1-t\varphi^2}$	$+\mathrm{d}v = \mathrm{d}\varphi = \frac{ddt\varphi}{1+t\varphi^2}$
$+\mathrm{d}\xi = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3/2}}$	$-\mathrm{d}x = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1+t\varphi^2)^{3/2}}$
$+\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}t\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3/2}}$	$\mathrm{d}y = \frac{t\varphi \mathrm{d}t\varphi}{(1+t\varphi^2)^{3/2}}$
$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{(1+t\varphi^2)}}$
$\eta = \frac{t\varphi}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}$	$y = \frac{t\varphi}{\sqrt{(1+t\varphi^2)}}$
Donc	
$+\mathrm{d}\xi : \mathrm{d}u = \eta$	$-\mathrm{d}x : \mathrm{d}v = y$
$+\mathrm{d}\eta : \mathrm{d}u = \eta$	$\mathrm{d}y : \mathrm{d}v = x$
$+\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\eta \mathrm{tang}\varphi$	$-\mathrm{d}\xi : \mathrm{d}y = \mathrm{tang}\varphi$

Bibliografia

[1] J.H. Lambert: Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. *Mém. Acad. Sci. Berlin* **17** (1768), 265-322.

[2] V. Riccati: *Opuscula ad res Physicas et Mathematicas pertinentes*, Bologna (1757), 265-322.

[3] J.H. Lambert: Observations Trigonométriques. *Mém. Acad. Sci. Berlin* **24** (1771), 327-354.

[4] I. Grattan-Guinness: Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them? *Hist. Math.* (1996), 355–375.