Capitolo 10

Il teorema di Rolle nell'algebra

10.1 Introduzione

In tutti i testi elementari di analisi matematica si trova dimostrato il teorema di Rolle: data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b), esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f'(\xi) = 0$. Si tratta dunque di un teorema molto generale che però non nacque per essere applicato a funzioni diverse dai polinomi e, a ben vedere, venne presentato come *corollario* di un altro risultato che, nell'ottica del problema affrontato da Michel Rolle (1652-1719) era più importante. Rolle trovò il teorema che oggi porta il suo nome nel quadro delle ricerche finalizzate ad ottenere un metodo di risoluzione numerica per le equazioni di grado qualsiasi. Il suo obiettivo era localizzare le radici di un polinomio $p(x)$, cioè trovare intervalli della retta reale all'interno dei quali si è certi dell'esistenza di una o più radici del polinomio. I punti estremi a,b di uno di questi intervalli godono della proprietà che $p(a)p(b) < 0$ cosicché, assumendo la continuità del polinomio, almeno una sua radice dovrà cadere all'interno di $[a, b]$. Ora per ottenere questi intervalli Rolle adopera le derivate successive di $p(x)$ secondo un metodo che egli battezzò metodo delle cascate. Il metodo venne presentato, senza alcuna dimostrazione nel *Traité d'Algebre* [7], pubblicato nel 1690. Il metodo non passò inosservato ma, sia l'assenza di dimostrazioni che la presenza, riconosciuta da Rolle, di eccezioni, sollevarono dubbi da più parti e Rolle si sentì in dovere di pubblicare nel 1691 un opuscolo dedicato alla dimostrazione del metodo, la *Démonstration d'une methode pour resoudre les égalitez de tous les dégrez* [8]. Le equazioni considerate da Rolle erano a coefficienti reali ed il metodo è propedeutico al calcolo delle radici reali. Un'estensione al caso complesso fu enunciata molto tempo dopo da Gauss, nel 1816, e dimostrata con il ricorso ad un argomento di natura meccanica da Félix Beniamin Lucas nel 1879. Parliamo di *una* estensione e non *dell'*estensione al caso complesso perché non è più chiaro, quando le radici di un polinomio appartengono ad un piano anziché ad una retta, cosa significhi che una radice della derivata di un polinomio sia *compresa* tra due radici del polinomio. Nella prossima sezione vedremo il metodo delle cascate di Rolle come esposto nel *Traité* per passare nella sezione 3 alla dimostrazione dei teoremi principali contenuti in [8]. Infine tratteremo l'estensione al caso complesso per passare ad un rapido accenno sulle prime fasi della storia del teorema di Sturm che consente di trovare il numero di radici di un'equazione algebrica che appartengono ad un intervallo della retta reale senza le eccezioni che il teorema di Budan-Fourier prevedeva.

10.2 Il metodo delle cascate nel *Traité* del 1690

Il metodo delle cascate trova la sua prima formulazione nel secondo Libro del *Traité d'algèbre* (1690). I termini utilizzati nella spiegazione del metodo vanno cercati fin dal capitolo III di questo libro dove ([7], p. 103) Rolle definisce cosa sia un'ipotesi per un'equazione algebrica:

Se due numeri vengono sostituiti al posto dell'incognita, separatamente l'uno dall'altro, e se uno dei due numeri fornisce per risultato un numero positivo, mentre l'altro un numero negativo, esiste sempre una radice che supera il più piccolo tra i numeri e che è superata dal più grande dei numeri. Questi numeri si chiameranno ipotesi (Hypothèses) ed è chiaro che grazie alle ipotesi è possivile trovare le radici che esse racchiudono (renferment).

Dunque è assunta sin da principio la continuità del polinomio ed il teorema dei valori intermedi come immediata, ovvia conseguenza. Le ipotesi circoscrivono le radici dell'equazione e, determinate le ipotesi è possibile usare un metodo di approssimazione (Rolle adopera sostanzialmente un algoritmo di bisezione) per approssimare le radici. Rolle arriva gradualmente alla descrizione del metodo delle cascate nel capitolo 5 del secondo libro del *Traité* esponendodapprima le *preparazioni* cui sottoporre un'equazione per renderla trattabile in modo efficace. Occorre liberarsi delle frazioni passando al comune denominatore ed arrivando ad un'equazione a coefficienti interi come

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{10.1}$$

Per ridurre ad 1 il coefficiente del termine di grado massimo Rolle effettua la trasformazione $x = \frac{z}{a_0}$ così da ottenere, dopo aver ulteriormente eliminato i denominatori,

$$z^n + a_1z^{n-1} + a_0a_2z^{n-2} + \cdots + a_0^{n-2}a_{n-1}z + a_na_0^{n-1} = 0.$$

Rolle spiega come, trovate le radici positive di un'equazione $p(x) = 0$, quelle negative si possano ottenere come radici *positive* di $p(-x) = 0$ per poi passare alla preparazione più significativa che permette di trasformare un'equazione in un'altra che, se ha radici reali, le ha solo *positive*: occorre far sì che l'equazione trasformata abbia i coefficienti *alternatifs*, cioè alternativamente positivi e negativi. Infatti, supponendo $b_i > 0$, l'equazione trasformata

$$x^n - b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}b_{n-1}x + (-1)^nb_n = 0 \tag{10.2}$$

darà, per valori negativi dell'incognita, sempre un valore positivo (negativo) a seconda che n sia pari (dispari). Per ottenere questa trasformazione Rolle fornisce una regola corretta, ma senza dimostrazione ([7], p. 120):

Si prenda tra i termini negativi dell'equazione quello cui compete il coefficiente maggiore; si cancellino da questo termine il segno e l'incognita e si divida il risultato[1] *per il coefficiente del primo termine aggiungendo poi l'unità. Dalla somma ottenuta si sottrarrà una nuova incognita e, sostituendo il resto al posto dell'incognita nell'equazione proposta, la sostituzione fornirà una nuova equazione i cui segni saranno alternati.*

Ripartendo dall'equazione (10.1), la regola di Rolle si può esprimere in questi termini, supponendo che a_i sia il coefficiente negativo di massimo valore assoluto; si pone

$$x = \frac{|a_i|}{a_0} - z$$

e l'equazione trasformata avrà i segni alternati. Dopo questi preliminari, Rolle illustra il metodo nel Capitolo VI, che si apre ([7], p. 124) con la distinzione tra radici effettive (*effectives*) e mancanti (*défaillantes*):

Si suppone anche che in ogni equazione vi siano tante radici quanto è la dimensione e, se ve ne sono di meno, quelle che mancano si chiameranno radici mancanti.

Le radici effettive sono quelle reali e positive, vista l'ultima preparazione effettuata in precedenza, mentre le radici mancanti sono classificate successivamente da Rolle in due specie: quelle della prima specie sono le radici *multiple*; quelle della seconda specie sono le radici *immaginarie*. la presenza di queste radici *défaillantes* richiede una certa attenzione nell'interpretare il metodo la cui validità in questi casi fu messa in discussione.

Per un'equazione della forma (10.2) vi è un'ipotesi naturale: $x = 0$ (la *petite hypothèse*), visto che non vi sono radici reali negative. Vi è poi una *grande hypothèse*, cioè un limite superiore ai valori di eventuali radici positive, ottenuta prendendo il coefficiente negativo di modulo massimo, dividendolo per il coefficiente di grado massimo, se non è già unitario, come in (10.2), e si aggiunge un numero intero positivo qualunque: il numero S così ottenuto è un limite superiore a tutte le eventuali radici reali di (10.2). Ottenute le ipotesi estreme 0 ed S, Rolle passa a raffinare la ricerca di ipotesi intermedie (*hypothèses moyennes*) ed è qui che entrano in gioco le derivate successive del polinomio $p(x)$ da studiare. Il metodo delle cascate si articola in quattro regole: la prima è la formazione delle cascate successive di un'equazione assegnata ([7], p. 125):

Si moltiplichino tutti i termini di un'equazione, ciascuno per il proprio esponente, si divida la somma di tutti i prodotti per l'incognita e si supporrà che il quoziente sia uguale a 0.

Si moltiplichino tutti i termini di questa nuova equazione, ciascuno per il proprio esponente, si divida la somma di tutti i prodotti per l'incognita e si

[1] cioè il coefficiente

supporrà che il quoziente sia uguale a 0. (...) Ciascuna di queste equazioni si chiamerà Cascata.

Seguendo l'esempio di Rolle, consideriamo l'equazione

$$v^4 - 24v^3 + 198v^2 - 648v + 473 = 0$$

la cui prima cascata è

$$\frac{1}{v}[4v^4 - 72v^3 + 396v^2 - 648v] = 4v^3 - 72v^2 + 396v - 648 = 0$$

cioè proprio la derivata prima del polinomio di partenza. Proseguendo, Rolle ottiene, dopo aver eliminato un fattore moltiplicativo 2,

$$6v^2 - 72v + 198 = 0$$

come ulteriore cascata ed, infine

$$4v - 12 = 0,$$

dove è stato eliminato un fattore moltiplicativo 3: dunque questi ultimi due polinomi sono *proporzionali* alle derivate seconda e terza del polinomio di partenza. Occorre prestare attenzione, nel leggere Rolle, alla nomenclatura con cui indica le cascate:

La cascata di primo grado si chiamerà prima cascata, quella di secondo grado, seconda cascata e così di seguito ([7], p. 125)

Nell'esempio proposto, la prima cascata è $4v - 12 = 0$, la seconda cascata è $6v^2 - 72v + 198 = 0$ e così via fino all'equazione di partenza che è la quarta cascata.

La seconda regola è il cuore del metodo di Rolle ([7], p. 127).

Le radici di ciascuna cascata saranno prese come ipotesi intermedie della cascata successiva.

Rolle illustra la regola con l'equazione

$$p(y) = y^3 - 57y^2 + 936y - 3780 = 0$$

e le cascate da considerare sono, nell'ordine crescente

$$\begin{aligned} c_1(y) &= \tfrac{1}{2}p''(y) = 3y - 57 = 0 \\ c_2(y) &= \tfrac{1}{3}p'(y) = y^2 - 38y + 312 = 0 \\ c_3(y) &= p(y) = y^3 - 57y^2 + 936y - 3780 = 0 \end{aligned}$$

La prima cascata $c_1(y)$ ha come radice $y = 19$ che diventa ipotesi media della cascata successiva, $c_2(y)$ che ha a sua volta come piccola ipotesi 0 e come grande ipotesi $39 = |-38| + 1$. Infatti, $c_2(y)$ ha come radici $y = 12 \in [0, 19]$ e $y = 26 \in [19, 39]$. Questi due valori diventano ipotesi della cascata $c_3(y)$, insieme alla piccola ipotesi $y = 0$ ed alla grande ipotesi $y = 3781$. Le radici di $c_3(y)$

sono infatti $y = 6$, $y = 21$, $y = 30$ che appartengono agli intervalli delimitati dalle ipotesi intermedie appena determinate. Osserviamo che il metodo richiede di determinare le radici di *tutte* le cascate, dalla prima a quella di ordine $n - 1$ compresa, per ottenere quelle della cascata di ordine n, cioè il polinomio di partenza. È chiaro che in esempi meno artificiali di quello proposto qui, la determinazione di queste radici con l'algoritmo di tipo bisezione usato da Rolle diventa piuttosto onerosa.

La terza regola ([7], p.128) specifica i segni che assume una cascata, quando è calcolata sulle radici della cascata precedente.

Quando vi sono radici effettive di una cascata, le ipotesi di questa cascata forniscono i segni + e − alternativamente. Se il numero di radici effettive è pari, la prima ipotesi intermedia fornisce −, la seconda +, la terza −, la quarta +, e così via fino all'ultima ipotesi intermedia, che fornisce −.

Se però il numero di radici effettive è dispari, la prima ipotesi intermedia fornisce +, la seconda −, la terza +, la quarta −, e così via fino all'ultima ipotesi intermedia, che fornisce −.

Quando però l'alternanza dei segni non è questa, ciò significa che nella cascata di cui si stanno cercando le radici mancanti che vengono distinte in due specie:

Se succede che le ipotesi forniscano 0, invece di + o −, allora ciascuna di queste ipotesi sarà radice della cascata in cui è effettuata la sostituzione ed occorrerà conteggiare nella cascata una radice mancante di prima specie, per ogni ipotesi che produce questo effetto. ([7], p. 129).

Ad esempio, le cascate del polinomio $z^3 - 15z^2 + 72z - 108$ sono

$$\begin{aligned} c_1(z) &= \tfrac{1}{6}p''(z) = z - 5 = 0 \\ c_2(z) &= \tfrac{1}{3}p'(z) = (z^2 - 10z + 24) = 0 \\ c_3(y) &= p(z) = z^3 - 15z^2 + 72z - 108. \end{aligned}$$

Ora, la radice di $c_1(z)$ è $z = 5$ e così la seconda cascata $c_2(z)$ ha per ipotesi 0, 5, 11 e le sue radici sono in $z = 4$ e $z = 6$ che diventano ipotesi medie di $c_3(z)$, insieme alle ipotesi estreme $z = 0$ 4 $z = 16$. Ora, mentre tra 0 e 4 si trova la radice $z = 3$ del polinomio di partenza, $z = 6$ è già soluzione di $p(z)$ e dunque non serve come ipotesi: $p(z)$ ha una radice mancante di prima specie. Un ulteriore problema può emergere:

Se la sostituzione delle ipotesi non fornisce 0 né il segno + o − richiesto, secondo quanto stabilito dalla terza regola; allora si conteranno due radici mancanti nella cascata in cui sono state sostituite le ipotesi, così come in tutte le successive per ogni coppia di segni dove ciò accadrà. (...) quando ciò succede, si chiameranno radici mancanti della seconda specie.

Si tratta del caso in cui esistono radici immaginarie (che figurano a coppie) e dove l'alternanza dei segni viene interrotta. Ad esempio ([7], p. 131) l'equazione

$$z^2 - 6z + 17 = 0$$

ha come prima cascata $2z - 6 = 0$ la cui radice $z = 3$, sostituita nell'equazione di partenza fornisce un risultato positivo, contrariamente alle attese: si contano due radici mancanti di seconda specie nell'equazione proposta, cioè due radici immaginarie.

Con la successiva quarta regola, Rolle affronta il caso in cui le radici di una cascata intermedia si possano conoscere solo approssimativamente. Qui, le ipotesi approssimate, sostituite nella cascata successiva, potrebbero non dare luogo alla corretta alternanza di segni e dunque richiedere un maggior raffinamento, inceppando il metodo.

10.3 La spiegazione del metodo

Come già detto, l'assenza di dimostrazioni fece sì che si sollevassero obiezioni sulla validità generale del metodo proposto da Rolle, un po' come accaduto per la regola dei segni di Cartesio. Come indicato nell'introduzione, Rolle rispose con un'opera pubblicata nel 1691 [8] dove invece furono inseriti i dettagli che qui analizzeremo.

Anzitutto Rolle precisa ([8] Articolo 1, p. 11) che considererà equazioni le cui radici sono tutte reali (*effectives*), distinte e positive. Dopo alcuni risultati elementari, deducibili dalla regola dei segni per la moltiplicazione di quantità algebriche, Rolle dimostra (Articolo V, [8], pp.14-16) che, presa una successione crecente di numeri positivi $a_1 < a_2 < ... < a_n$ e formati i prodotti

$$\Pi_i := \prod_{j \neq i = 1}^{n} (a_i - a_j)$$

allora la successione $\{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n\}$ ha i termini a segni alterni. Nell'Articolo VI Rolle si serve di quanto visto nell'articolo V per dimostrare che, dato il prodotto

$$p(x) := (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \qquad \text{con} \quad 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n,$$

se si prendono al posto di x dei valori t_i tali che

$$0 < t_0 < r_1 < t_1 < r_2 \cdots < t_{n-1} < r_n < t_n$$

allora la successione $\{p(t_0), p(t_1), ..., p(t_{n-1}), p(t_n)\}$ è a segni alterni. In altre parole, le ipotesi di un'equazione *separano* le radici dell'equazione.
Importante è il contenuto del Corollario III all'Articolo VI ([8], p. 20):

È altresì chiaro che le radici sono numeri intermedi tra le ipotesi e, di conseguenza, se le radici vengono sostituite nell'equazione che comprende (renferme) le ipotesi, la loro sostituzione dovrà fornire risultati alternativamente positivi e negativi o negativi e positivi.

L'equazione che comprende le ipotesi di $p(x) = 0$ è un'equazione del tipo

$$q(x) = (x - t_0)(x - t_1) \cdots (x - t_n)$$

e, stante il contenuto dell'articolo VI, si ha in effetti che $\{q(r_1), q_(r_2), ..., q(r_n)\}$ è un'altra successione a segni alterni: *Le radici sono dunque ipotesi delle ipotesi medesime* ([8], p. 21). A patto dunque di saper mostrare che le radici di $p(x)$, sostituite nella cascata immediata, formano una successione a segni alterni, si potrà concludere che la cascata racchiude le ipotesi per le radici di $p(x) = 0$. (Corollario IV, [8], p. 21). Ovviamente, vi è un grado di arbitrarietà nella scelta delle ipotesi: un qualunque numero compreso tra due radici può andar bene ma per affrontare il caso di radici mancanti, occorre che il metodo per trovarle sappia anche discernere quando tali ipotesi non esistono. Occorre mostrare che, se un'equazione ha solo radici reali e distinte, il metodo trova ipotesi per *tutte* le radici per cui, al contrario, se il metodo non le trova tutte l'equazione di partenza dovrà avere radici mancanti (Corollario VI, [8], p.22).

Gli articoli VII ed VIII fanno entrare in scena le progressioni aritmetiche che giocano un ruolo importante nel modo in cui sono costruite le cascate. Rolle considera il trinomio $p(z) = (z - a)(z - b) = ab - (a + b)z + z^2$ i cui termini sono moltiplicati ordinatamente per i tre termini successivi di una progressione aritmetica: y, $y + v$, $y + 2v$, ottenendo

$$q(z) = aby - (ay + by + av + bv)z + (y + 2v)z^2 :$$

una verifica diretta mostra che $q(b)$ è multiplo di $b - a$ e, anche se Rolle lo sottointende, che la stessa proprietà vale per $q(a)$. Lo stesso risultato si ottiene partendo dal polinomio $p(z)z^k$. Se ora $p(z)$ viene moltiplicato per il polinomio

$$f + gz + tz^2 + rz^3 + nz^4 + ...$$

il risultato può essere scritto nella forma

$$Y(z) := fp(z) + gzp(z) + tz^2p(z) + ...$$

i cui termini di grado k vengono moltiplicati per k, formando la cascata $Z(z) = zY'(z)$ di $p(z)$. Ora, poiché ciascun addendo di $Y(z)$ contiene la variabile a tre potenze successive, il polinomio $Z(z)$ si trova nelle condizioni previste nell'articolo VIII e dunque $Z(b)$—o $Z(a)$—è divisibile per $b - a$. Stante l'arbitrarietà dei coefficienti f, g, t, r..., Rolle osserva (Articolo IX, Corollario III, [8], pp. 28-29) che la stessa conclusione vale qualora si moltiplichi $p(z)$ per

$$(z - c)(z - d)(z - e) \cdots (z - \ell)$$

Consideriamo allora le radici reali e positive $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ di $p(z) = 0$: si può prendere una coppia *qualsiasi* di radici e concludere che $Z(r_1)$ è divisibile per tutte le differenze $(r_1 - r_2)$, $(r_1 - r_3)$,..., $(r_1 - r_n)$ e, similmente, che $Z_(r_i)$ è divisibile per tutte le differenze $(r_i - r_j)$, con $j \neq i$. Questo argomento permette a Rolle di utilizzare i risultati dell'articolo V e di concludere che la successione $\{Z(r_i)\}$ è a segni alterni. Ora, a me sembra che l'argomento vada completato perché è vero che, se

$$Z(r_n) = (r_n - r_{n-1})h_{n-1} \qquad \text{e} \qquad Z(r_n) = (r_n - r_{n-2})h_{n-2}, ...$$

possiamo scrivere

$$Z(r_n) = (r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2})(r_n - r_{n-3}) \cdots (r_n - r_1)k$$

e similmente

$$Z(r_{n-1}) = (r_{n-1} - r_n)(r_{n-1} - r_{n-2}) \cdots (r_{n-1} - r_1)k', \ldots$$

e così via per tutte le altre radici: è vero che, grazie all'articolo V, i prodotti tra le differenze di radici che figurano in $Z(r_n)$ e $Z(r_{n-1})$ hanno segni discordi ma, per concludere, occorrerebbe sapere che i fattori residui k, k' sono concordi: nella realtà essi sono pari all'unità e dunque la conclusione di Rolle è senz'altro vera ma, per come è presentato, l'argomento non è conclusivo. Comunque sia, avendo raggiunto la convinzione che le radici dell'equazione proposta sono ipotesi della cascata immediata, egli può anche concludere che le radici di quest'ultima sono ipotesi per l'equazione proposta. Una dimostrazione corretta del segno assunto dalla derivata di un polinomio sulle radici del polinomio stesso che non faccia uso del calcolo differenziale si trova nella monografia di Ruffini [9] e si basa sulla legge di formazione dei coefficienti del polinomio che si ottiene dividendo

$$p(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + Lx + M = 0$$

per il binomio $x - \alpha$, dove α è radice di $p(x)$: si pone

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + Lx + M = (x - \alpha)(x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-3} + \cdots)$$

e si uguagliano i coefficienti delle potenze uguali nei due membri ottenendo

$$A' = A + \alpha \qquad B' = B + \alpha A' = B + \alpha A + \alpha^2$$
$$C' = C + \alpha B' = C + \alpha B + \alpha^2 A + \alpha^3$$

e così via. Ora, se scriviamo

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots (x - \nu) = 0$$

dove le radici sono disposte in ordine decrescente

$$\alpha > \beta > \gamma > \cdots > \nu$$

abbiamo

$$(x - \beta)(x - \gamma) \cdots (x - \nu) = x^{n-1} + (A + \alpha)x^{n-2} + (B + \alpha A + \alpha^2)x^{n-3} + \cdots)$$

grazie alle formule appena ricavate. Se calcoliamo ambo i membri in $x = \alpha$ ci rendiamo conto che

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \cdots (\alpha - \nu) = n\alpha^{n-1} + A(n-1)\alpha^{n-2} + B(n-2)\alpha^{n-3} + \cdots = p'(\alpha)$$

cosicché il membro di sinistra è positivo. Ripetendo il ragionamento sulla successiva radice $x = \beta$ si dimostra in modo del tutto analogo che

$$(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \cdots (\beta - \nu) = n\beta^{n-1} + A(n-1)\beta^{n-2} + B(n-2)\beta^{n-3} + \cdots = p'(\beta)$$

è negativo e così via per le radici successive, mostrando l'alternanza dei segni.

10.4 Estensioni al campo complesso

La possibilità di estendere il teorema di Rolle al caso complesso fu elaborata molto tempo dopo l'originale elaborazione di Rolle, non solo perché vi erano incertezze sulla natura dei numeri complessi ma perché il metodo, come ausilio al calcolo numerico delle radici reali delle equazioni, forniva un supporto abbastanza limitato e venne soppiantato da altri metodi più efficaci. Inoltre il teorema di Rolle passò dalla fine del '700 ad essere un risultato generale applicabile a funzioni derivabili in un intervallo, svincolato da ogni riferimento all'ambito algebrico in cui era sorto. Quando il metodo ricompare nel caso complesso, esso fornisce le relazioni tra la localizzazione delle radici di un polinomio con quelle della sua derivata prima, senza alcun legame con un metodo per la ricerca delle radici complesse di un'equazione. Osserviamo che, nel caso di funzioni complesse, non ci si può aspettare tutta la generalità del caso reale per il teorema di Rolle: infatti la funzione

$$f(z) := \mathrm{e}^{2\pi\iota z} - 1$$

si annulla sia in $z = 0$ che in $z = 1$, mentre la sua derivata $f'(z) = 2\pi\iota\mathrm{e}^{2\pi\iota z}$ non si annulla *mai*. Una trattazione diffusa del ruolo del teorema di Rolle in analisi complessa si trova in [1].

Il ritorno del teorema di Rolle in campo algebrico si ebbe con una nota a pie' di pagina, collocata da Gauss in coda alla terza dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra del 1816 [3]. La nota afferma, laconicamente:

> *Teorema. Siano $a, b, c, \dots m, n$ le radici dell'equazione $fz = 0$, a', b', c', $\dots$, m' le radici dell'equazione $f'z = 0$, dove $f'z = \frac{dfz}{dz}$ e vengano indicati con le stesse lettere i punti corrispondenti nel piano, così, quando si pensa a masse uguali, attrattive o repulsive in $a, b, c, \dots, n$ che agiscono in ragione inversa della distanza, in $a', b', c', \dots m'$ c' equilibrio.*[2]

L'argomento di Gauss è di natura meccanica: posizionare delle masse (o cariche, visto che si parla di attrazione o repulsione, indifferentemente) unitarie in ciascuno dei punti del piano complesso che rappresentano le radici (semplici) di una determinata equazione. Supponendo che esse interagiscano tra loro in ragione inversa della distanza che le separa, i punti di equilibrio, cio i punti in cui la risultante delle forze applicate alle masse è nulla, sono quelli in cui si annulla la derivata prima. L'idea alla base della dimostrazione, che Gauss non fornì, è quella di considerare il generico punto N del piano complesso $z = x + \iota y$ come un punto materiale mobile nel piano e soggetto all'attrazione o repulsione di masse unitarie collocate nei punti $z_1 = a$, $z_2 = b$, $z_3 = c$, $...z_n = n$ dove il polinomio $p(z)$ si annulla. Poiché la legge di interazione è proporzionale all'inverso della

[2] *Lehrsatz.* Sind a, b, c, $\dots$ m, n die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, a', b', c', $\dots$ m' die Wurzeln der Gleichung $f'x = 0$. wo $f'x = \frac{dfx}{dx}$, und werden durch dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte in plano bezeichnet, so ist, wenn man sich in a, b, c $\dots$ m n gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernung wirken, in a', b', c' $\dots$ m' Gleichgewicht.

distanza tra i punti interagenti, la risultante delle forze agenti su N è

$$\frac{1}{z-z_a}+\frac{1}{z-z_b}+\cdots+\frac{1}{z-z_n}. \tag{10.3}$$

Ora, poiché

$$p'(z)=\left[\frac{1}{z-z_a}+\frac{1}{z-z_b}+\ldots\frac{1}{z-z_n}\right]p(z), \tag{10.4}$$

poiché non vi sono radici multiple, la forza totale applicata su N è nulla quando z è tale che $\frac{1}{z-z_a}+\frac{1}{z-z_b}+\ldots\frac{1}{z-z_n}=0$, cioè coincide con una delle radici di $p'(z)$, per cui i punti di equilibrio sono i punti nei quali la derivata del polinomio $p(z)$ si annulla. A ben vedere, occorre fare una precisazione perché

$$\frac{1}{z-z_a}=\frac{\overline{z-z_a}}{|z-z_a|^2}$$

e, interpretando i punti del piano complesso come vettori nel piano, il vettore di modulo unitario $\frac{\overline{z-z_a}}{|z-z_a|}$ dà la direzione della congiungente tra i punti rappresentativi di $\overline{z}$ e $\overline{z}_a$: una ulteriore operazione di coniugio consente di riconciliarsi con l'interpretazione fisica gaussiana.

L'argomento di Gauss non sembra essere stato oggetto di molta considerazione, tant'è che quando, oltre cinquant'anni più tardi Félix Beniamin Lucas ritornò sul problema, non citò affatto la nota di Gauss ma riottenne indipendentemente il risultato ampliandone in verità la portata perché l'argomento meccanico *non* è solo un'*interpretazione* fisica adatta a rendere più plausibile la validità formale del teorema ma diventa la *base* della dimostrazione di un teorema. Ciò è ancor più sorprendente se si pensa che, in ultima analisi, si sta facendo dipendere la validità di un teorema dalla seconda legge della dinamica dei punti materiali che, dal punto di vista epistemologico, non è solidissima. Lucas [4], dopo aver riprodotto in chiave più sofisticata l'interpretazione meccanica di Gauss, osserva:

> *Una retta indefinita, tracciata nel piano e che lasci da una sola parte tutti i punti-radice [dell'equazione $p(z)=0$] lascia anche dalla stessa parte tutte le radici dell'equazione derivata [$p'(z)=0$] perché un punto situato dall'altra parte rispetto a questa retta sarà certamente respinto e non potrà restare in equilibrio. Ne segue che ogni curva chiusa convessa che racchiude il gruppo dei punti-radice dell'equazione proposta racchiude anche il gruppo dei punti-radice dell'equazione derivata.* ([4], p. 225)

Ovviamente, un argomento di questo tipo doveva suscitare reazioni volte a porre su un fondamento indipendente da argomenti di natura fisica la validità del teorema. Questa fu la strada intrapresa dal matematico belga Paul Mansion che, nel 1888, propose [5] una dimostrazione geometrica del teorema di Gauss-Lucas.

Si parte ancora dall'equazione

$$f(z)=(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\lambda)=0 \tag{10.5}$$

le cui n radici $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ che possono essere tra loro uguali o diverse, reali od immaginarie e siano $A, B, \dots, L$ i punti rappresentativi delle radici di (10.5) e tracciamo una retta R in modo tale che questi punti giacciano tutti dalla stessa parte rispetto ad R. Preso un punto Z arbitrario nel semipiano opposto, le quantità

$$(z-\alpha), \dots, (z-\lambda)$$

sono rappresentabili tramite i segmenti di retta $AZ, BZ, \dots, LZ$, mentre

$$\tfrac{1}{z-\alpha}, \tfrac{1}{z-\beta}, \dots, \tfrac{1}{z-\lambda}$$

sono rappresentate dai segmenti $aZ, bZ, \dots, lZ$ di lunghezze reciproche rispetto a quelle di AZ, BZ, $\dots$, LZ ed aventi ciascuno una direzione che è simmetrica rispetto alla retta passante per Z e parallela all'asse delle ascisse delle direzioni di $AZ, \dots, LZ$. Ora, poiché Z si trova nel semipiano opposto rispetto a quello contenente i punti $A, B, \dots, L$, l'angolo sotto cui il gruppo di radici A, B, C,... è minore di due angoli retti, per cui anche l'angolo visuale sotto cui Z vede il gruppo di punti a, b, c,...,n ha la stessa proprietà, dato che si passa dal primo al secondo gruppo con una riflessione, che non altera gli angoli. Dunque, conclude Mansion, la risultante *geometrica* (*résultant géométrique*) non può annullarsi cosicché

$$\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta} + \dots + \frac{1}{z-\lambda} \neq 0.$$

A questo punto le conclusioni di Mansion si sovrappongono a quelle di Lucas evitando però il ricorso ad argomenti di indole meccanica.

Nel caso di un'equazione di terzo grado a coefficienti complessi, il legame tra le radici di un polinomio e quelle della sua derivata prima assume una forma particolarmente elegante che studiamo ora nella versione proposta[3] da Ernesto Cesàro nel 1900 [2] che parte osservando come non sia restrittivo supporre che le tre radici complesse z_1, z_2 e z_3 del polinomio $p(z)$ a coefficienti *complessi* abbiano somma zero per cui

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \tag{10.6}$$

che equivale alla solita trasformazione introdotta da Cardano per eliminare il termine che segue immediatamente quello di grado massimo. Se scriviamo $z_i = x_i + \imath y_i$, allora da (10.6) seguono le due relazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0. \end{cases} \tag{10.7}$$

Elevando al quadrato l'equazione (10.6) si ottiene

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_2 z_3 = -\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

[3]Quella di Cesàro non fu la prima dimostrazione di questo risultato che si trova in un lavoro di Siebeck del 1864 [10].

e dunque, ricordando il legame tra coefficienti e funzioni simmetriche delle radici, si può riscrivere l'equazione $p(z) = 0$ nella forma

$$p(z) = z^3 - \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)z - z_1 z_2 z_3 = 0$$

e ricavare che le radici della derivata $p'(z)$ sono

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \qquad \zeta_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$

simmetriche ancora rispetto all'origine, come per l'equazione di partenza, proprietà che è sempre comune ad un polinomio ed alla sua derivata prima, indipendentemente dal grado e prescindendo anche dalla trasformazione preliminare utilizzata qui per annullare il coefficiente quadratico[4]. Ora, a patto di una rotazione attorno all'origine del piano complesso, è sempre possibile supporre che ζ_1 e ζ_2 appartengano all'asse reale. Siccome

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2\iota(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

questa richesta equivale ad imporre

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) > (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

e

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0. \tag{10.8}$$

Dal momento che $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ e $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ sono funzioni simmetriche delle radici dell'equazione proposta, possiamo ritenerle quantità note *a priori* e porre

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6a^2 \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 6b^2 \tag{10.9}$$

con $a > b$. In questo modo le coordinate delle radici di $p'(z)$ sono

$$\zeta_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad \zeta_2 = -\sqrt{a^2 - b^2}$$

e dunque coincidono con i fuochi di un'ellisse di equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.10}$$

di cui occorre ora determinare le relazioni con il triangolo $\mathcal{T}$ individuato dalle radici z_1, z_2 e z_3. Per questo Cesàro ne determina l'area $|\sigma|$ dove

$$\sigma = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

[4]Sappiamo che la somma delle n radici dell'equazione $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ è pari a $-a_1$ per cui, associando idealmente una massa unitaria in ciascun punto, radice di $f(x)$, si ha che l'ascissa del centro di massa del sistema delle n radici è $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = -\frac{a_1}{n}$. Poiché $f'(x) = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$, vediamo che il centro di massa delle $n-1$ radici $y_1, ..., y_{n-1}$ di $f'(x)$ ha ascissa $\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}}{n-1} = -\frac{a_1}{n}$, che coincide con quello trovato per $f(x) = 0$.

che viene semplificando con il ricorso alle relazioni (10.7) e (10.8) che sono interpretabili come relazioni di ortogonalità tra i vettori di componenti, su una base ortonormale, $(1,1,1)$, (x_1,x_2,x_3) ed (y_1,y_2,y_3). In questa chiave di interpretazione $|\sigma|$ rappresenta il volume del prisma—un parallelepipedo, in realtà—avente per spigoli questi tre vettori. Grazie alle (10.9) si ottiene allora $\sigma = 3ab\sqrt{3}$. Se sostituiamo in (10.8) il valore di x_3 dedotto da $(10.7)_1$ e, in successione, ripetiamo la stessa operazione per x_2 ed x_1, otteniamo anche

$$\frac{x_1}{y_2-y_3} = \frac{x_2}{y_3-y_1} = \frac{x_3}{y_1-y_2} = \kappa. \tag{10.11}$$

Per ricavare il valore κ osserviamo che, sviluppando σ sulla seconda riga, si ha

$$2\sigma = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)$$

da cui, essendo

$$(y_2-y_3) = \frac{x_1}{\kappa} \qquad (y_3-y_1) = \frac{x_2}{\kappa} \qquad (y_1-y_2) = \frac{x_3}{\kappa}$$

otteniamo

$$2\kappa\sigma = (x_1^2+x_2^2+x_3^2) = 6a^2$$

cosicché

$$\kappa = \frac{3a^2}{\sigma} = \frac{a}{b\sqrt{3}}$$

che, inserito in (10.11), permette di scrivere

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{(y_2-y_3)^2}{3b^2}.$$

Poiché da $(10.7)_2$ abbiamo

$$2y_2y_3 = y_1^2 - (y_2^2+y_3^2)$$

concludiamo che

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{2(y_2^2+y_3^2)-y_1^2}{3b^2}$$

e, usando $(10.9)_2$,

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 4 - \frac{y_1^2}{b^2}$$

che dimostra come i punti $z_1' = -\frac{1}{2}(x_1+\iota y_1)$ e $z_1'' = \frac{1}{2}(x_1+\iota y_1)$ appartengano all'ellisse (10.10). Poiché

$$z_1' = -\frac{1}{2}z_1 = \frac{1}{2}(z_2+z_3)$$

abbiamo che il punto medio del lato congiungente i punti z_2 e z_3 appartiene a (10.10). Similmente, partendo dalle altre relazioni (10.11) si conclude con considerazioni analoghe che anche gli altri punti medi z_2' e z_3' dei lati del triangolo $\mathcal{T}$ appartengono all'ellisse (10.11). Ora, la congiungente i punti medi z_2' e z_3' è parallela al terzo lato z_2z_3, è una corda di (10.11) e viene bisecata dal diametro passante per z_1' che dunque è un diametro coniugato alla direzione del segmento $z_2'z_3'$: pertanto, per le proprietà elementari delle coniche, la tangente in z_1' all'ellisse (10.11) è proprio il lato z_2z_3. Abbiamo dunque dimostrato che le radici della derivata di un polinomio di terzo grado $p(z)$ a coefficienti complessi giacciono nei fuochi dell'ellisse inscritta nel triangolo $\mathcal{T}$ individuato dalle radici di $p(z)$, tangente nei punti medi ai lati di $\mathcal{T}$. È possibile anche mostrare che questa ellisse è *massimale*, nel senso che è l'ellisse che racchiude l'area massima, tra tutte quelle inscritte in $\mathcal{T}$.

10.5 La successione di Sturm

A partire dalla regola di Cartesio, e dal metodo di Rolle vi sono stati furono diversi tentativi di ottenere il numero esatto di radici reali di un'equazione algebrica appartenenti ad un intervallo reale $[a, b]$. Nessuno dei risultati ottenuti fino all'ninzio del XIX secolo era però conclusivo ed i metodi proposti potevano dare solo una stima dall'alto del numero di radici a meno che non vi fosse un'analisi a priori in grado di escludere la presenza di radici complesse. Il motivo di tale incertezza risiede, in ultima analisi, nel fatto che si consideravano delle successioni di polinomi che, calcolate in a e b evidenziano un numero di variazioni di segno che supera il numero delle radici dell'equazione algebrica proposta. Questo fu il destino del metodo che Jean-Baptiste Fourier propose all'inizio dell'800 in un ciclo di lezioni e che si serviva della successione delle derivate successive del polinomio $p(x)$. Nel 1807, Budan giunse a risultati simili a quelli di Fourier e dunque non conclusivi. Il teorema di Budan si esprime in questi termini:

Si consideri la serie $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$,....,$p^{(n)}(x)$ e vi si sostituiscano i valori reali $x = a$ ed $x = b$. Il numero di radici reali dell'equazione $p(x) = 0$ comprese nell'intervallo (a, b) non supera in numero di variazioni che la serie perde nel passare da $x = a$ ad $x = b$.

Questo teorema ha il merito di racchiudere la regola di Cartesio come caso particolare ma non determina sempre il numero esatto di radici reali nell'intervallo $[a, b]$.

Simeon Denis Poisson pose al giovane Augustin-Louis Cauchy il problema di trovare un metodo che fornisse il numero esatto di radici reali di $p(x) = 0$ in un intervallo $[a, b]$ ed il risultato finale, dopo diversi tentativi, confluì in una memoria pubblicata nel 1815 sul *Journal de l'École Polytechnique* il cui contenuto era stato presentato in più memorie presentate all'Istituto di Francia nel 1813. Occorre chiarire subito che il problema risolto da Cauchy riguarda le equazioni a coefficienti letterali e non numerici per i quali Cauchy rimanda alla equazione alle differenze ampiamente discussa da Lagrange. Nel primo caso invece, occorre trovare funzioni razionali nei coefficienti di $p(x) = 0$ i cui segni determinino, in tutti i casi particolari possibili, il numero ed il tipo (*le nombre et l'espèce*) delle radici reali di $p(x)$. Il metodo di Cauchy che fa perno sull'analisi di De Gua e fa anche ricorso all'equazione delle differenze è reso pesante dalla minuziosa casistica relativa ai casi in cui $p(x)$ o qualcuna delle equazioni ausiliarie utilizzate abbia radici multiple ed in ogni caso poggia su una succesione di funzioni molto complessa. Tra le prime semplificazioni del metodo di Cauchy, Berard ne propose una basata sulla regola di Cartesio che, se semplificava il procedimento, faceva perdere il controllo sul numero esatto di radici reali in $[a, b]$. Nel 1829 Christian Sturm, che era stato allievo di Fourier ed aveva potuto prender visione delle sue carte inedite relative alla risoluzione delle equazioni, comunica all'Accademia delle Scienze di Parigi la memoria contenente il teorema che porta il suo nome il 23 maggio e nello stesso anno ne pubblica un sunto sul *Bulletin des Sciences Mathématiques.* Curiosamente, la prima dimostrazione del teorema di Sturm comparve, con l'autorizzazione dell'autore, nel 1832 in un volume *Cours d'Algèbre* di Choquet e Mayer. Enunciamo e dimostriamo il teorema di Sturm, seguendo l'esposizione di quel testo, nell'edizione del 1846 e limitandoci al caso in cui l'equazione da risolvere ammetta solo radici semplici.

Data l'equazione algebrica $p(x) = 0$ priva di radici coincidenti, siano a e b due numeri reali e si consideri la successione di funzioni $p(x)$, $p'(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$,....,$p_n(x)$ definite dalle relazioni

$$\begin{aligned}
&p(x) = q_1(x)p'(x) - p_2(x)\\
&p'(x) = q_2(x)p_2(x) - p_3(x)\\
&p_2(x) = q_3(x)p_3(x) - p_4(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n-2}(x) = q_{n-1}(x)p_{n-1}(x) - p_n(x).
\end{aligned}$$

La differenza tra il numero di variazioni presenti in questa serie quando si ponga $x = a$ ed $x = b$ ad argomento coincide con il numero di radici reali di $p(x) = 0$ comprese tra a e b. ([**?**], §48, p. 51)

La successione utilizzata da Sturm rappresenta, a parte $p(x)$, $p'(x)$, la successione dei *resti*, cambiati di segno, che si incontrano applicano l'algoritmo euclideo della divisione di $p(x)$ per $p'(x)$. La scoperta di Sturm destò una certa impressione tra i matematici e fu involontariamente causa di alcune polemiche e precisazioni. Anzitutto vi fu chi, come De Moigno e Terquem, richiamarono l'attenzione sulla memoria di Cauchy, ormai relegata nell'oblio, rivendicandogli la priorità quantomento per la risoluzion teorica del problema: peraltro lo stesso Cauchy che pure ammirava le conclusioni di Sturm, rivendicò per sé nel 1837 il merito di avere per primo risolto la questione algebrica [6] e continuò a lavorare alla estensione del problema di Sturm per localizzare gli zeri complessi di un polinomio, come per la ricerca delle radici comuni a più polinomi. Vi fu poi una discussione tra il 1866 ed il 1867 sulle pagine dei *Nouvelles Annales Des Mathématiques* circa l'influenza di Fourier sulla serie proposta da Sturm. P. Duhamel, traendo spunto da alcuni passi in cui Sturm si dichiarava debitore verso il maestro Fourier, concluse che grazie all'imitazione delle dimostrazioni rinvenute tra gli appunti di quest'ultimo Sturm fosse giunto a formulare il teorema e per questo scrisse una nota in cui diminuiva l'importanza del lavoro di Sturm. Alle obiezioni di Prohuet, secondo il quale non è sufficiente essere allievi di un grande maestro o conoscerne i manoscritti per ottenere nuovi teoremi, Duhamel rispose con una lettera inviata al direttore dei *Nouvelles Annales*, Gerono, in cui riportava un episodio di cui era stato protagonista ed in cui Sturm, rispondendo ad una domanda di Duhamel su come fosse giunto alla sua scoperta, rispose che, osservato che l'imprecisione nel teorema di Fourier consisteva nel fatto che la successione delle derivate poteva perdere delle variazioni senza che la funzione avesse radici, si era proposto di cercare altri polinomi privi di tale difetto e che quindi perdessero variazioni solo in corrispondenza degli zeri di $p(x)$.

Vediamo ora la dimostrazione del teorema di Sturm.

Dim. Poiché $p(x)$ non ha radici multiple, $p(x)$ e $p_1(x) \equiv p'(x)$ non hanno fattori comuni, osserviamo che:

1. due funzioni ausiliarie $p_i(x)$ e $p_{i+1}(x)$ non possono annullarsi per uno stesso valore di x. Se lo facessero in $x = c$, ciascuna di esse conterrebbe il fattore $x - c$ e, ripercorrendo a ritroso la successione di Sturm, si avrebbe che anche $p(x)$ e $p'(x)$ avrebbero $x = c$ come radice comune, contro l'ipotesi.

2. quando una funzione p_i si annulla in $x = c$, le funzioni adiacenti hanno segni opposti. Infatti, né p_{i-1} né p_{i+1} possono annullarsi per quanto mostrato al punto precedente. Poiché poi $p_{i-1}(x) = q_i(x)p_i(x) - p_{i+1}(x)$, posto $x = c$ si ottiene la tesi.

3. Se in $c \in [a, b]$ si ha $p_i(c) = 0$ con $i \geq 1$, il numero di variazioni nella successione di Sturm non cambia. Infatti, poiché $p_i(c)$ non ha zeri multipli, nell'attraversare $x = c$, esso deve cambiare segno. Per continuità delle funzioni coinvolte e per quanto visto al passo 2, sappiamo che esiste un intorno di $x = c$ in cui p_{i-1} ed p_{i+1} hanno segni opposti. Pertanto, la sequenza di funzioni $p_{i-1}(x)$, $p_i(x)$ ed $p_{i+1}(x)$ mantiene inalterato il numero di variazioni, pari ad uno, passando attraverso $x = c$.

4. Se in $c \in [a, b]$ si ha $p(c) = 0$, la successione di Sturm perde una variazione di segno. Infatti, scritti per $h > 0$ i polinomi di Taylor
$$p(c - h) = -hp'(c) + \frac{h^2}{2}p''(c) - \cdots$$
e
$$p(c + h) = hp'(c) + \frac{h^2}{2}p''(c) + \cdots$$
si osserva che, siccome per h sufficientemente piccolo il segno dei membri di destra è dettato dai primi termini e siccome $p'(c) \neq 0$ si conclude che p e p' hanno segni opposti a sinistra di $x = c$ e lo stesso segno a destra di $x = c$ che dimostra quanto asserito.

Per non rendere troppo pesanti i calcoli, nella formazione delle funzioni p_i della successione di Sturm conviene moltiplicare per un conveniente fattore numerico *positivo* i polinomi ottenuti nelle successive divisioni, in modo da formare una successione di polinomi a coefficienti interi. La semplificazione della successione di Sturm fu uno dei primi filoni di ricerca sviluppatesi a partire dal decennio successivo la scoperta di Sturm.

Bibliografia

[1] L.M. Bocchio: *Il teorema di Rolle nella storia della matematica* Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università di Pavia (2013).

[2] Cesàro E.: Relazioni fra le radici dell'equazione cubica e quelle della sua derivata. *Periodico di Mat.*, **3** (S. 2), 81-83, (1900).

[3] C. F. Gauss. Göttingische gelehrte Anzeigen, 1816 März 2. In C.F. Gauss *Werke* III Band. Analysis, 112 (1866).

[4] Lucas, F.B.: Sur une application de la Mécanique rationnelle à la theorie des équations. *C. Rend. Acad. Sci. Paris*, **89**, 224-226, (1879).

[5] Mansion, P.: Sur l'extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations algébriques. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **13**, 42-45, (1888).

[6] G. Mignosi: Teorema di Sturm e sue estensioni. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **49**, 1-159, (1925).

[7] Rolle, M.: *Traité d'Algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*, Michallet, Parigi, (1690).

[8] Rolle, M.: *Demonstration d'une méthode pour resoudre les égalitez de tous les dégrez*, Cusson, Parigi, (1691).

[9] Ruffini, P.: *Teoria generale delle equazioni*, Tip. S. Tommaso, Bologna, (1799).

[10] Siebeck, P.: Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **64**, 175-182, (1864).