Capitolo 7

Il paradosso di San Pietroburgo

7.1 Le origini

Il paradosso di San Pietroburgo rappresentò la prima *crisi* del calcolo delle probabilità ed obbligò gli studiosi ad un ripensamento dei fondamenti della disciplina. Inoltre, come era successo con il problema della ripartizione della posta, anche il paradosso di S. Pietroburgo abbandonò presto l'ambito dei giochi d'azzardo per fornire ulteriori occasioni di applicazione del calcolo delle probabilità. Il problema che diede origine al paradosso fu formulato per la prima volta da Nicolaus Bernoulli in una lettera indirizzata a Rémond de Montmort il 9 settembre 1713, alla vigilia della pubblicazione dell'*Ars Conjectandi*. Monmort inserì questa lettera e la sua risposta nell'appendice all'*Analyse*. Bernoulli propose a Montmort la risoluzione di cinque problemi, gli ultimi due rilevanti per il nostro studio. Il quarto problema fu formulato in questi termini:

> A promette di dare a B uno scudo se ottiene sei al primo lancio con un dado ordinario, due scudi se ottiene sei al secondo lancio, tre scudi se lo ottiene al terzo, quattro se lo ottiene al quarto lancio, e così via. Si chiede quale sia la speranza di B.[1]

Il successivo problema varia, in modo significativo, la legge con cui viene assegnata la posta ad ogni partita:

> Stessa domanda se A promette di dare a B gli scudi nella progressione 1, 2, 4, 8, 16 ecc. o 1, 3, 9, 27, ecc. o 1, 4, 9, 16, 25 ecc. o 1, 8, 27, 64 al posto di 1, 2, 3, 4, 5, ecc. come prima. Benché la maggior parte di questi

[1] A promet de donner un écu à B, si avec un dé ordinaire il amene au premier coup 6 points, deux écus s'il amene le 6 au second coup, 3 écus s'il amene ce point au troisième coup, 4 écus s'il l'amene au quatrième et ainsi de suite; on demande quelle est l'esperance de B?

> problemi non sono difficili, vi troverete qualcosa di assai intrigante.[2] ([26], p. 402)

La risposta di Montmort lascia trapelare il fatto che egli non avesse colto il punto delicato che si celava nella formulazione del problema:

> Gli ultimi due dei vostri cinque problemi non offono alcuna difficoltà, non trattandosi altro che di trovare la somma di successioni i cui numeratori sono progressioni di quadrati, cubi, ecc. mentre i denominatori sono in progressione geometrica. Il vostro compianto zio fornì un metodo per trovare la somma di queste serie.[3] ([26], p.407)

Bernoulli richiamò in seguito Montmort a prestare maggior attenzione alla soluzione, in una lettera del 20 febbraio 1714:

> Quanto dite sulla facilità degli ultimi due problemi è vero ma avreste fatto bene a cercarne la soluzione perché vi avrebbe dato occasione di un'osservazione molto curiosa. Detta x la speranza di B nel caso del quarto problema, avrete $x = (1 + 5y)/6$ (chiamo y la speranza di B nel caso in cui non ottenga 6 al primo lancio); ora, y è necessariamente $= x+1$ perché, dopo aver mancato il successo al primo colpo, egli spera di ricevere gli scudi secondo la progressione 2, 3, 4, 5, 6, nella quale ogni termine supera di una unità il termine corrispondente della progressione 1, 2, 3, 4. Sostituite quindi $x+1$ al posto di y ed otterrete $x = (5x+6)/6$, e dunque $x = 6$, come avreste anche ottenuto ricorrendo alle successioni infinite.
>
> Se però seguite la stessa analisi negli esempi del problema 5 come nell'esempio della progressione 1, 2, 4, 8, ecc., dove avrete $y = 2x$, trovereste $x = (1 + 10x)/6 = -1/4$, che è una contraddizione. Per rispondere a questa contraddizione si potrebbe dire che questa frazione, considerata come avente il denominatore negativo e pertanto più piccola di zero, è più grande di $1/0$ per cui la speranza di B è più che infinita, come si ottiene adoperando le successioni infinite. Da ciò seguirebbe che B dovrebbe dare ad A una somma infinita o meglio più che infinita (se possiamo esprimerci così), perché A gli possa fornire il vantaggio di dare gli scudi secondo la progressione 1, 2, 4, 8, 16, etc. Ora è chiaro che se B desse questa cifra, la perderebbe sempre perché è moralmente impossibile che B non ottenga sei entro un numero finito di lanci.[4] ([22], p. 558)

[2]On demande la meme chose si A promet à B de luy donner des écus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16 etc. ou 1, 3, 9, 27, etc. ou 1, 4, 9, 16, 25 etc. ou 1, 8, 27, 64 etc. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, ete. comme auparavant. Quoique ces Problemes pour la plûpart ne sont pas difficiles, vous y trouverez pourtant quelque chose de fort curieux.

[3]Les deux derniers de vos cinq Problemès n'ont aucune difficulté, il ne s'agit que de trouver les sommes des suites dont les numerateurs étant en progression des quarrés, cubes, etc. les denominateurs soient en progression géométrique: feu M. votre Oncle a donné la methode de trouver la somme de ces suites.

[4]Il est vrai ce que vous dites que les deux derniers de mes Problemes n' ont aucune difficulte, cependant vous auries bien fait d'en ehereher la solution, car elle Vous auroit fourni l' occasion de faire une remarque tres curieuse. Soit appelle x l' esperance de B dans le cas du 4me

Il calcolo della prima speranza matematica è corretto, anche se un po' ellittico. La probabilità che B ha di vincere al primo lancio è $\frac{1}{6}$, quella di vincere al secondo è $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$, quella di vincere all'$n$-esimo lancio è $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$ per cui la speranza matematica è

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}+\cdots+n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Ora, siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

la speranza matematica risulta pari a 6, come asserito succintamente da Bernoulli. Il riferimento ai numeri negativi come maggiori di infinito, riechegia una interpretazione che risale al matematico inglese John Wallis (1616-1703), in opposizione a quella più diffusa che li riteneva essere "meno del nulla".

Dall'analisi dei risultati proposta a Montmort, Bernoulli conclude che la misura della speranza matematica adottata sino a quel momento non è adatta al problema:

> Il motivo di questo è che i casi che hanno una probabilità molto piccola debbono essere trascurati e ritenuti nulli anche se possono far conseguire una speranza molto grande.[5]

Montmort, pur avendo effettuato dei calcoli riguardanti il problema, non ebbe più occasione di scrivere a Nicolaus Bernoulli sull'argomento e, morto nel 1719, lo lasciò isolato, dal momento che né lo zio Johann né gli allievi di quest'ultimo mostrarono interessi per il calcolo delle probabilità, fino a Gabriel Cramer (1704-1752) che si occupò della questione all'inizio del 1727. Cramer, in una lettera indirizzata a Nicolaus Bernoulli il 21 maggio del 1728 da Londra,

---

Probleme, vous aures x = (1 + 5 y) /6 (je nomme y l' esperance de B apres qu'il a manque le six au premier coup) ; or y est necessairement = x + 1; car apres qu'il a manque le six au premier coup, il espere de recevoir des ecus en cette progression 2, 3, 4, 5, 6, dont chaque terme est d'une unite plus grand que le terme correspondant de celle ci 1, 2, 3, 4. Substitues donc x + 1 au lieu de y, et Vous aures $x = (5x + 6)/6$, et partant $x = 6$. Ce que Vous auries aussi trouve par la voye des suites infinies. Mais si Vous suives la meme analyse dans les exemples du 5me Probleme comme dans l'exemple de cette progression 1, 2, 4, 8, etc., ou Vous aures $y = 2x$, Vous trouveres $x = (1+10x)/6 = -1/4$, ce qui est une contradiction. Pour repondre à cette contradiction, on pourroit dire que cette fraction regardee comme ayant le denominateur negatif et par consequent plus petit que zero, est plus grande que 1/0, et qu'ainsi le sort de B est plus qu'infini, ce qu'on trouve aussi effectivement par la voye des suites infinies. Mais il suivroit de là que B devroit donner à A une somme infinie et meme plus qu'infinie (s'il est permis de parler ainsi) pour qu'il luy puisse faire l'avantage de lui donner des ecus en cette progression 1, 2, 4, 8, 16, etc. Or il est certain que B en donnant une telle somme perdroit toujours, puisqu'il est moralement impossible que B n'amene pas le six dans un nombre de coups fini.

[5]La raison de ceci est que les cas qui ont une tres petite probabilité doivent être negligés et censés pour nuls, quoiqu'ils puissent apporter une tres grande esperance.

oltre a proporre la variante del paradosso che conosciamo, basata cioè sul lancio di una moneta e non di un dado, cercò una via d'uscita distinguendo tra il valore *quantitativo* attribuito ad una certa somma di denaro sulla base della sua entità ed il valore *qualitativo*, che gli compete in virtù di ciò che con quel denaro si vuol fare: se i matematici si erano occupati fino a quel momento del valore quantitativo, la gente assennata (*les hommes de bon sens*) si interessava della seconda accezione. Cramer immagina come ragionerebbe un uomo assennato, trovandosi a giocare secondo le regole stabilite:

> Ciò che rende la speranza matematica infinita è la somma prodigiosa che posso ricevere se "testa" non avviene che molto tardi, al 100° o al 1000° lancio. Ora questa cifra non ha per me più valore, non mi arreca più soddisfazione, non mi spinge ad accettare la scommessa, di quanto farebbe la somma di 10 o 20 milioni di scudi.[6] ([22], pp. 560-561)

Cramer introduce un troncamento superiore alla cifra massima che B può ottenere: 2^{24} scudi, superiore a 16 milioni. Il valore della speranza matematica così modificata diventa, in scudi,

$$\sum_{n=1}^{24} \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} + \sum_{n=25}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{24} = \frac{1}{2} \times 24 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 12 + 1 = 13.$$

Questa somma rappresenta ciò cui si riduce la speranza matematica, dal punto di vista *morale* (*moralement parlant*). Cramer ottenne un valore ancora più esiguo con un altro procedimento:

> È ben vero che 100 milioni fanno pù piacere di 10 milioni: non però nella misura di dieci volte tanto. P. es., se si facesse l'ipotesi che il *valore morale* dei beni fosse come la radice quadrata della loro quantità matematica, cioè, che la soddisfazione che mi arreca ricevere la cifra di 40000000 sfosse il doppio di quella (...) che mi reca ricevere 10000000.[7] ([22], p. 561)

In questo caso la *speranza morale* è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times \sqrt{2^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Questo valore non è ancora la somma che sono disposto a scommettere che invece deve essere

> tale che il dispiacere di perderla sia uguale alla *speranza morale* del piacere che spero di ricevere vincendo.[8] ([22], p. 561)

[6]Ce qui rend l'Esperance Mathematique infinie, c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le côté de la Croix ne tombe que bien tard, le 100^e ou le 1000^e coup. Or cette somme, si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus à accepter le parti, que si elle n'etoit que 10 ou 20 Millions d'Ecus.

[7]il sera vrai que 100 Millions font plus de plaisir que 10 Millions, quoiqu'ils n'en fassent pas 10 fois plus. P. E. Si l'on vouloit supposer que la valeur Morale des Biens fut comme la raeine quarree de leurs quantites Mathematiques, C. à D. que le plaisir que me fait 40000000 fut double du plaisir que (...) me fait m'en fait 10000000.

[8]tel que le chagrin de sa perte soit egal à l'*Esperance morale* du plaisir que j'espere de recevoir en gagnant.

Essa è dunque pari a

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = \frac{2}{12-8\sqrt{2}}$$

che è poco meno di 3 scudi e quindi vicina alla stima comune (*estime vulgaire*) di 13 scudi ottenuta poco prima. L'importanza del paradosso di San Pietroburgo—che in questo momento non ha ancora un nome—risiede tutta nel disallineamento tra le previsioni basate sul concetto matematico di aspettazione o, meglio, di speranza matematica, ed il comune sentire o la speranza morale (*esperance morale*): se si vuole che le tecniche della probabilità non si esauriscano nel mondo futile dei giochi d'azzardo ma incidano sulla vita reale, occorre superare questa dicotomia. Se Cramer limitò la somma massima ottenibile per rendere finita l'aspettazione del gioco, Nicolaus Bernoulli seguì la via opposta, puntando l'attenzione sulla trascurabilità della probabilità di vittoria come spinta a non puntare una cifra eccessiva, probabilmente influenzato dall'idea di *certezza morale* dello zio Jakob. Per questo non ritenne convincente la risposta di Cramer che, a suo dire, non coglieva il vero motivo del dissidio tra speranza matematica e stima comune:

> Nel caso di testa o croce, non c'è chi, dotato di buon senso, vorrebbe dare 20 scudi non tanto perché l'utilizzo o il piacere che si può trarre da una somma infinita quasi non supera quelli che si possono ottenere da una somma di 10 o 20 o 100 milioni, ma perché puntando per esempio 20 scudi si ha una probabilità molto piccola di vincere qualcosa e si crede che la perdita sia moralmente certa. La persona comune non tiene in considerazione né i milioni ne le centinaia di scudi, non prestando alcuna attenzione al fatto che i termini della progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, etc. una volta cresciuti si possono considerare uguali tra loro: non è per questo che egli è spinto ad accettare o a rifiutare la scommessa; si decide solo a seconda dei gradi di probabilità che egli ha di vincere o perdere; per lui una probabilità molto piccola di vincere una grande somma non controbilancia una probabilità molto grande di perdere una somma piccola: egli considera impossibile l'avverarsi del primo caso e certo quello del secondo. Occorre dunque, per fissare correttamente l'equivalente, determinare sino a dove la grandezza di una probabilità debba diminuire per poter essere considerata nulla; ecco però che questa determinazione è impossibile: quale che sia l'ipotesi che si faccia, si incontrano sempre delle difficoltà; le limitazioni di queste piccole probabilità non sono precise ma hanno una certa ampiezza che non si riesce a determinare facilmente; per esempio, una probabilità che possiede 1/100 di certezza non deve essere considerata nulla più di quanto non lo sia quella che possiede 1/99 di certezza. Mi sembra dunque che, supponendo che un uomo di buon senso non voglia giocare 20 scudi, perché tiene per certo che la somma che otterrà sarà minore di 20 scudi, sia possibile trovare l'equivalente cercato grazie al seguente ragionamento: per ipotesi è moralmente impossibile che egli ottenga 20 scudi; sarà dunque anche moralmente impossibile che ne

> ottenga 32 o qualche altro numero di scudi nella progressione: 32, 64, 128, etc.; ora, la probabilità di ottenere un numero di questa progressione è $1/64 + 1/128 + 1/256 + \text{etc.} = 1/32$; dunque quest'uomo di buon senso reputa come nulla una probabilità che non superi il valore 1/32, ed una probabilità di avere 31/32 comme certezza intera, pertanto la sua speranza ubbidisce alla regola $1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + 1/16 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + \text{etc.} = 2$. Non so però se sia più corretto quest'altro ragionamento: Un uomo che non voglia giocare 20 scudi ritiene tutti i casi che gli fanno avere una somma inferiore a 20 scudi come possibili ed ognuno degli altri, che gli possono dare una somma maggiore come impossibili; egli ritiene dunque solo le probabilità inferiori ad 1/32 come nulle e pertanto la sua speranza varrà $1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + 1/16 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + \text{etc.} = 2$.[9] ([22], pp. 562-563)

La difficoltà risiede nell'arbitrarietà del criterio in base al quale ritenere nulla una probabilità bassa che introduce un elemento di soggettività difficile da valutare correttamente. Nicolaus Bernoulli comunicò il problema, in una lettera del 27 agosto del 1728, al cugino Daniel che si trovava a San Pietroburgo già dal 1724 mentre un mese più tardi, il 27 settembre, Cramer rispose a Nicolaus Bernoulli dichiarandogli che l'obiettivo della sua soluzione non era quello di indovinare il motivo che spinga un uomo a non accettare un'aspettazione

[9] dans le Cas de Croix ou Pile il n'y a personne de bon sens qui voulut donner 20 Ecus, non par cette raison que l'usage ou le plaisir qu' on peut tirer d'une somme infinie n'est guère plus grand que celui qu'on peut tirer d'une somme de 10, ou 20, ou 100 Millions, mais parce qu'en donnant par ex. 20 Ecus on a une très petite probabilité de gagner quelque chose, et que l'on croit la perte moralement certaine. Le vulgaire ne met ici en ligne de conte ni des millions, ni des centaines d'Ecus, ne faisant point attention a ce que les termes de la progression geometrique 1, 2, 4, 8, 16, etc. devenus asses grands peuvent être censés égaux, il n'est engagé par là ni a accepter ni à refuser le parti, il se determine seulement selon les degrés de probabilité qu'il a de gagner ou de perdre; ches lui une très petite probabilité de gagner une grande somme ne contrebalance pas une très grande probabilité de perdre une petite somme, il regarde l'evenement du premier cas comme impossible, et l'evenement du second comme certain. Il faut donc, pour regler au juste l'Equivalent, determiner jusqu'où la quantité d'une probabilité doit diminuer, afin qu'elle puisse être censée nulle; mais voilà ce qui est impossible de determiner, quelque supposition que l'on fasse, on rencontre toujours des difficultés; les limites de ces petites probabilités ne sont pas precises, mais elles ont une certaine latitude que l'on ne peut pas fixer aisément; une probabilité qui par ex. a 1/100 de certitude ne doit pas être reputée nulle plustôt que celle qui a 1/99 de certitude. Il me semble pourtant qu'en admettant cette supposition qu'un homme de bon sens ne veuille pas donner 20 Ecus, parce qu'il tient pour certain que la somme qui lui echerra sera moindre que 20 Ecus, on puisse trouver l'equivalent cherché par le raisonnement suivant: par hypoth. il est moralement impossible qu'il obtienne 20 Ecus; il sera done aussi moralement impossible qu'il obtienne 32 Ecus ou quelque autre nombre d'Ecus dans cette progression: 32, 64, 128, etc.; or la probabilité pour obtenir un nombre de cette progression est $1/64+1/128+1/256+\text{etc.} = 1/32$; donc cet homme de bon sens repute une probabilité qui ne surpasse pas 1/32 comme nulle, et une probabilité qui a 31/32 comme une certitude entière, par conséquent son esperance vaudra par la regle $1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + 1/16 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + \text{etc.} = 2$. Mais je ne sai si cet autre raisonnement seroit plus juste: Un homme qui ne veut pas donner 20 Ecus estime tous les cas qui lui donnent une moindre somme que 20 Ecus possibles, et chacun des autres, qui lui peuvent donner une somme plus grande, impossible; il regarde done seulement les probabilites moindres que 1/32 comme nulles, par consequent son esperance vaudra $1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + 1/16 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + \text{etc.} = 2$.

infinita, quanto quello di cercare un motivo per convincere *se stesso* a non concedere un'aspettazione infinita e mantenne il punto nel ritenere più vantaggioso il proprio criterio, che operava sulla somma massima ritenuta appetibile che non quello proposto da Bernoulli, basato sulla difficile stima del grado positivo minimo di probabilità. La prima reazione di Daniel Bernoulli al problema propostogli da Nicolaus fu molto simile a quella che aveva avuto Montmort ed egli si limitò a comunicargli che il paradosso si fonda sulla scarsa probabilità che il gioco ha di durare più di 20 o 30 partite. Nicolaus, come aveva già fatto con Montmort, invitò Daniel a non sottovalutare la portata del problema e questi tornò sull'argomento proponendo una via per uscire dal paradosso che comunicò al padre, Johann, in una lettera del tardo autunno del 1729, purtroppo perduta. Comunque, la soluzione di Daniel giunse al cugino che non se ne dichiarò soddisfatto. L'argomento di Daniel, a quanto possiamo ricostruire dalla risposta inviatagli da Nicolaus il 4 febbraio 1730, si basava sulla considerazione dei beni posseduti dal giocatore intenzionato a scommettere; al contrario, Nicolaus poneva un quesito provocatorio:

> Chiedo come bisogna comportarsi *qui ed adesso* se A volesse liberarsi dall'impegno preso senza giocare: quale somma dovrà corrispondere a B?[10] ([22], p. 565)

Daniel continuò ad occuparsi del problema e il 5 aprile 1732 inviò copia della memoria *Specimen theoriae novae metiendi sortem pecuniariam* a Nicolaus che, oltre a rammentare come Cramer fosse partito da principii simili, non trovava convincente la soluzione di Daniel dal momento che

> Non si tratta di misurare l'uso od il piacere che si trae da una somma di denaro guadagnata, né la privazione od il dolore che deriva dalla perdita di una somma. Non si tratta neppure di cercare un equivalente tra queste cose; si tratta invece di trovare quanto un giocatore sia tenuto, secondo giustizia ed equità, a concedere all'altro per il vantaggio che quest'ultimo gli concede nel gioco d'azzardo in questione od in altri giochi in generale, affinché possa essere ritenuto equo, come lo è per esempio un gioco nel momento in cui i due giocatori puntano la stessa somma sotto condizioni uguali, mentre secondo la Vostra teoria e prestando attenzione ai loro beni, il piacere od il vantaggio del guadagno nel caso favorevole non bilanciano il dolore o lo svantaggio che si soffre in caso contrario.[11] ([22], p. 566)

[10] Je demande ce qu'il faut faire *hic et nunc*, si A vouloit se degager de son obligation sans jouer, quelle somme devra-t-il payer à B?

[11] Il ne s'agit pas de mesurer l'usage ou le plaisir qu'on tire d'une somme que l'on gagne, ni le defaut d'usage ou le chagrin qu'on a de la perte d'une somme; il ne s'agit non plus de chercher un equivalent entre ces choses là; mais il s'agit de trouver combien un joueur est obligé selon la justice ou selon l'equité de donner à l'autre pour l'avantage que celui ci lui accorde dans le jeu de hazard en question, ou dans d'autres jeux en general, afin que le jeu puisse être censé egal, comme par exemple un jeu est censé egal, lorsque les deux joueurs mettent une somme egale au jeu sous des conditions egales, quoique selon Vôtre theorie, et en faisant attention à leurs richesses, le plaisir ou l'avantage du gain dans le cas favorable n'égale pas le chagrin ou le desavantage qu'on souffre dans le cas contraire.

Siamo così arrivati alla pubblicazione dello *Specimen theoriae novae de mensura sortis* avvenuta nel 1738, benché Daniel avesse inviato il manoscritto all'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo fin dal 1731 [2]. Daniel, richiamato il concetto di *valore dell'aspettazione* (*valor expectationis*), cioè a dire la speranza matematica, osserva che la teoria della probabilità si riduce ad enumerare tutti i casi possibili, risolvendoli in quelli che hanno egual facilità di manifestarsi (*aeque proclives*) per disporli poi nella classe opportuna. L'affermazione:

> il valore dell'aspettazione è ottenuta quando i singoli valori che si ottengono vengono moltiplicati per il numero di casi nei quali possono essere ottenuti e la somma dei prodotti è divisa per il numero di tutti i casi: [i matematici] impongono però di considerare casi che hanno la stessa facilità a presentarsi[12] ([2], p. 175)

è giustificata—*demonstrata*—dice Bernoulli, con il ricorso al principio di ragione insufficiente.

> dal momento che non vi è alcun motivo perché qualcosa in più sia da attribuire ad uno piuttosto che all'altro dei contraenti, a ciascuno va attribuita la stessa quantità.[13] ([2], p. 175)

Se questo punto di vista può soddisfare un giudice che debba dirimere una lite, per Bernoulli occorre qui fornire dei consigli in base ai quali

> ciascuno debba stimare per suo conto la propria sorte in virtù della diversa consistenza delle sue sostanze.[14] ([2], p. 176)

Come biasimare un uomo di modeste condizioni economiche se, avendo uguali possibilità di ottenere 20000 ducati oppure nulla, si risolvesse a cedere ad altri questa possibilità a prezzo di 9000 ducati, inferiore alla speranza matematica di 10000 ducati? Al contrario, un uomo ricco che non si risolvesse ad acquistare questa possibilità a 9000 ducati sbaglierebbe, per Bernoulli. La classica definizione di aspettazione matematica non può essere presa come misura *universale* delle possibilità (*mensura sortis*). Di un bene qualunque occorre distinguere tra il prezzo (*Pretium*), su cui tutti sono chiamati a concordare, ed il valore (*valor*) che invece è soggettivo (*aestimatur ex conditione personae*) dipendendo dall'utile (*emolumentum*) che se ne ricava. Nell'esempio precedente il *pretium* era lo stesso per il povero ed il ricco ma la prospettiva di guadagno ha più attrattiva per il povero che per il ricco. L'utilità media (*emolumentum medium*) è così definita da Bernoulli:

> quando le *utilità* delle singole aspettazioni sono moltiplicate per il numero di casi nei quali vengono ottenute e la somma dei prodotti viene divisa

[12]valorem expectationis obtineri, cum valores singuli expectati multiplicentur per numerum casuum quibus obtingere possunt, aggregatumque productorum dividatur per summam omnium casuum: casus autem considerare [geometrae] iubent, qui sunt inter se aeque proclives

[13]quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quam alteri, unicuique aequae sint adiudicandae partes.

[14]quisque suam sibimet aestimare debeat sortem pro diversa rerum suarum constitutione.

> per il numero di tutti i casi, si ottiene l'*utilità* media ed il guadagno corrispondente a questa *utilità* media equivarrà alla sorte richiesta.[15]

L'utilità media ha la stessa definizione formale dell'aspettazione ma per renderla operativa occorre stabilire quale utilità corrisponda ad un certo guadagno—*lucrum*—formulando delle ipotesi a partire dalla considerazione che un guadagno interessa maggiormente a chi è in condizioni economiche peggiori. Per questo motivo Bernoulli riteneva *probabile* che

> un piccolo guadagno qualsiasi porti sempre un'utilità inversamente proporzionale alla somma delle ricchezze.[16] ([2], p. 178)

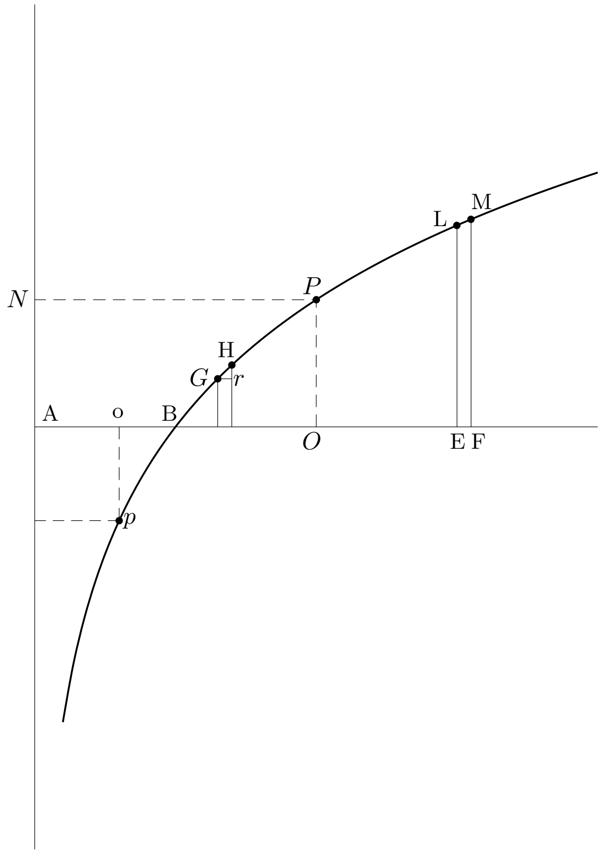
L'ammontare delle ricchezze non comprende soltanto i beni materiali ma anche la propria forza lavoro, il proprio ingegno che possono essere utilizzati per svolgere attività che portano guadagni. In questo senso, Bernoulli può affermare che tutti possiedono qualcosa, a meno che non siano ridotti alla fame. Egli vuole giustificare l'ipotesi fondamentale con una semplice considerazione: due persone possiedono, rispettivamente centomila ducati e centomila semi-ducati e se ciascuno riceve annualmente 5000 ducati o 5000 semiducati, rispettivamente, un ducato per la prima persona ha lo stesso significato di un semiducato per la seconda e pertanto, se *entrambi* ricevono un ducato, l'utilità (*emolumentum*) è maggiore per la seconda persona (1 ducato =2 semiducati) che per il primo mentre il guadagno (*lucrum*) è lo stesso per entrambi.

Convinto il lettore della ragionevolezza dell'ipotesi di fondo, Bernoulli entra negli sviluppi quantitativi precisando dapprima che l'oggetto di studio sarà la determinazione della curva che rappresenta l'utilità y in funzione della ricchezza x posseduta da un individuo. Sull'asse delle ascisse, con origine A, si rappresenta dapprima il segmento $AB = \alpha$ che rappresenta le ricchezze di un individuo, *prima* di affrontare un evento aleatorio che può aumentarle o diminuirle. La curva $y(x)$, su cui giacciono i punti G, H, L, M, rappresenta le utilità in funzione degli incrementi di ricchezza BC, BD, BE, BF valutati a partire dallo stato iniziale. Se questi guadagni di ricchezza si possono verificare, rispettivamente, in m, n, p, q,.. casi, l'utilità media sarà, per definizione, rappresentata da un punto P corrispondente all'ascissa O tale che

$$PO = y(O) = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM + \cdots}{m + n + p + q + \cdots} : \tag{7.1}$$

[15]Cum *emolumenta* singulaexpectata multiplicantur per numerum casuum, quibus obtinebuntur aggregatumque productorum dividitur per numerum omnium casuum, obtinebitur *emolumentum* medium, et lucrum huic *emolumento* respondens aequivalebit sorti quaesitae.

[16]lucrulum quodvis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale.



Se sull'asse delle ordinate si riporta il segmento $AN = PO$, allora $BO = AO - AB$ rappresenta il guadagno *lucrum* che ci si può attendere legittimamente. Quanto è bene scommettere per ottenere questo guadagno? La ricetta di Bernoulli è quella di considerare, a sinistra di B un punto o cui corrisponda un punto p sulla curva tale che $op = OP$. Bernoulli da per scontata la monotonìa della curva per cui $y(x_p) < 0$ e op rappresenta una perdita. La regola da seguire è allora di non scommettere più del guadagno che legittimamente ci si può attendere. Ciò che distingue la teoria di Bernoulli dagli approcci dei predecessori è il fatto che la curva $y(x)$ *non* è lineare. Per determinarne l'equazione, occorre ritornare all'ipotesi iniziale: un incremento infinitesimo di utilità è inversamente proporzionale alle ricchezze possedute. Dunque, se $AC = x$, $CG = y$, $CD = \mathrm{d}x$ ed $rH = \mathrm{d}y$, deve essere

$$\mathrm{d}y = \frac{b\mathrm{d}x}{x}, \tag{7.2}$$

dove b è una costante di proporzionalità, per cui

$$y(x) = b \log \frac{x}{\alpha}. \tag{7.3}$$

Ottenuta l'espressione analitica della curva di utilità, Bernoulli ritorna alla interpretazione geometrica dell'utilità media che, giova ricordarlo, è un concetto più generale dell'ipotesi (7.2) che conduce alla curva (7.3). Grazie alla (7.3) si ottiene

$$PO = b\log\frac{AO}{AB} \quad CG = b\log\frac{AC}{AB} \quad DH = b\log\frac{AD}{AB}\cdots$$

che, inseriti in (7.1) conducono a

$$AO = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdots)^{1/(m+n+p+q+\cdots)} \tag{7.4}$$

da cui, sottratta $AB = \alpha$, si giunge alla sorte richiesta (*sortem quaesitam*).

$$BO = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdots)^{1/(m+n+p+q+\cdots)} - \alpha. \tag{7.5}$$

Come prima applicazione, Bernoulli mostra che anche nei giochi che possano ritenersi equi, sulla base della definizione tradizionale, chi gioca deve essere pronto a subire una perdita, risultato da cui trae una "morale":

> certamente [è] un notevole ammonimento della natura ad evitare l'azzardo.[17] ([2], p. 183)

La giustificazione matematica sta nella concavità della curva di utilità $y(x)$ per cui, se si pone una quantità rappresentata da $op = OP$ come scommessa da effettuare affinché lo *svantaggio* (*detrimentum*) coincida con l'utilità attesa, si avrà $Bo < BO$. Se si suppone di avere due giocatori, ciascuno in possesso di 100 ducati, metà dei quali vengno scommessi in un gioco equo per cui $m = n = 1$, allora il guadagno atteso è $\sqrt{(100-50)^1(100+50)^1} \simeq 86.6$ ducati, inferiore di oltre 13 ducati ai 100 euro che rappresentano la ricchezza iniziale. Bernoulli calcola anche quale sia la puntata massima x da effettuare in un gioco che permetta di guadagnare a in caso di vittoria e perdere x in caso contrario, con pari probabilità. Se $AB = \alpha$ e $BO = a$, l'utilità media è

$$OP = b\log\frac{AO}{AB} = b\log\frac{AB+BO}{AB} = b\log\frac{a+\alpha}{\alpha}.$$

Lo svantaggio (*detrimentum*) massimo sopportabile è rappresentato graficamente dal segmento po di lunghezza pari ad OP per cui, annullandosi la curva di utilità in B, deve essere, posto $x = Bo$,

$$op = \left|b\log\frac{Ao}{AB}\right| = b\left|\log\frac{AB-Bo}{AB}\right| = \left|b\log\frac{\alpha-x}{\alpha}\right| = b\log\frac{\alpha}{\alpha-x}$$

e quindi l'uguaglianza $OP = op$ diventa

$$b\log\frac{\alpha}{\alpha-x} = b\log\frac{a+\alpha}{\alpha}$$

da cui segue

$$x = a\frac{\alpha}{\alpha+a} < a:$$

[17] egregium profecto naturae documentum vitandae aleae.

> si ricava pertanto da tutto questo che agirebbe stoltamente chi mettesse in pericolo tutte le sue ricchezze, nella speranza di un guadagno grande quanto si voglia, ciò di cui nessuno faticherà a persuadersi, se si soppesano correttamente le definizioni che abbiamo premesso.[18] ([2], p. 184)

La seconda applicazione riguarda le assicurazioni sulle merci che viaggiano via nave. Caio, mercante di S. Pietroburgo, acquista merci ad Amsterdam il cui valore, se le vendesse in quel momento a S. Pietroburgo, sarebbe di 10000 rubli. Decide dunque di farsele inviare via mare ma è in dubbio se fare assicurare o meno il carico. I dati sulla base dei quali prendere una decisione sono:

- su 100 navi che annualmente compiono la rotta dai Paesi Bassi alla Russia, 5 fanno naufragio;
- il prezzo minimo di una assicurazione è di 800 rubli, che Caio ritiene una enormità.

L'analisi di Bernoulli mira ad ottenere le ricchezze x che Caio deve possedere, oltre ai 10000 rubli, per poter *ragionevolmente* sostenere la spesa. Egli applica la formula (7.4) con $m = 95$ ed $n = 5$, ottenendo, nel caso in cui *non* si stipuli l'assicurazione una ricchezza:

$$\sqrt[100]{(x+10000)^{95}x^5} = \sqrt[20]{(x+10000)^{19}x}$$

mentre, stipulando l'assicurazione, la ricchezza sarà $(x + 9200)$. Pertanto x deve risolvere l'equazione $(x + 10000)^{19}x = (x + 9200)^{20}$ ed è pari a circa 5043 rubli: Caio agirà bene non assicurando il carico se possiede una cifra superiore a quella appena determinata, ma farà bene ad assicurarlo in caso contrario. Anche l'assicuratore deve però premunirsi e dunque Bernoulli calcola quale debba essere il minimo valore delle sue ricchezze per poter offrire un contratto di assicurazione al prezzo di 800 rubli. Per determinare y occorre ora risolvere l'equazione

$$y = \sqrt[20]{(y+800)^{19}(y-9200)}$$

che ha come soluzione $y \simeq 14243$ rubli. Se l'assicuratore non possiede almeno questa somma non deve offrire un contratto a quel prezzo. Un altro esempio di natura commerciale riguarda un altro mercante, Sempronio, che possiede 4000 ducati al presente ed 8000 ducati in merci che si trovano in terre esotiche e che occorre trasportare via mare: è opportuno affidare il carico ad un'unica nave oppure ripartirlo su due navi, sapendo dall'esperienza (*ex diuturno rerum usu*) che una nave su dieci fa naufragio sulla rotta che occorre far seguire alle merci. Queste sono le alternative considerate:

- se affida le merci ad una sola nave, in 9 casi la sua ricchezza salirà a 12000 ducati ed in un caso rimarrà di 4000 ducati. Sempronio può attendersi una ricchezza pari a

$$\sqrt[10]{12000^9 \cdot 4000^1} - 4000 \simeq 6751 \quad \text{ducati}$$

[18] exinde etiam deducitur, stulte hunc agere qui omnia sua bona periclitatur spe lucri quantumvis magni, quod nemo difficulter sibi persuadebit, si recte perpenderit definitiones nostras praemissas.

- se affida la merce a due navi si considerano $100 = 10 \times 10$ casi possibili in $81 = 9 \times 9$ dei quali entrambe le navi arriveranno a destinazione, in $18 = 2 \times 9 \times 1$ solo una delle due arriverà a destinazione mentre nel caso restante entrambe naufragheranno, perdendo tutto il carico. Se ciascuna delle navi porta merci per 4000 ducati, la ricchezza attesa sarà

$$\sqrt[100]{12000^{81} \cdot 8000^{18} \cdot 4000^{1}} - 4000 \simeq 7033 \quad \text{ducati}$$

Senza dimostrarlo, Bernoulli afferma anche che l'aspettazione non può mai salire oltre i 7200 ducati se si varia la proporzione di merci caricate sulle navi.

È solo a questo punto, esaurite le applicazioni più importanti, che Bernoulli si dedica al paradosso (di S. Pietroburgo), ripercorrendone la storia—in particolare pubblicò la soluzione di Cramer—per poi proporne una soluzione basata sulla teoria dell'utilità appena elaborata. Detto N il numero di partite, ve ne sono $\frac{N}{2}$ in cui il giocatore vince un ducato, $\frac{N}{4}$ in cui ne guadagna 2, $\frac{N}{8}$ in cui ne guadagna 4 e così di seguito. Se i beni posseduti inizialmente dal giocatore ammontano ad α ducati, la sua *sors* è data da

$$\sqrt[N]{(\alpha+1)^{\frac{N}{2}}(\alpha+2)^{\frac{N}{4}}(\alpha+4)^{\frac{N}{8}}\cdots} - \alpha = \sqrt{(\alpha+1)}\sqrt[4]{(\alpha+2)}\sqrt[8]{(\alpha+4)\cdots} - \alpha \tag{7.6}$$

che cresce con α, rimanendo però sempre *finita* se α è finito. Nel caso particolare[19] in cui $\alpha = 0$ questa *sors* vale 2 ducati, cresce attorno a 3 ducati se $\alpha = 10$, a 6 ducati se $\alpha = 1000$. Il paradosso è evitato ricorrendo all'utilità anziché all'aspettazione ma, come è stato giustamente notato [21], la memoria di Bernoulli *non* è centrata sul paradosso, che diventa una illustrazione di una teoria dall'ampio spettro di possibili applicazioni.

Tra i matematici che seguirono la via di troncare la serie che esprime l'aspettazione, quando la probabilità dell'evento corrispondente è sotto ad una certa soglia [8], citiamo il francese Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788) che fu naturalista e matematico e che ebbe notizia del problema di S. Pietroburgo da Cramer, nel 1730. Egli si servì delle tavole di mortalità per ricavare che la probabilità che un uomo di 56 anni avesse di morire entro un giorno era[20] $\frac{1}{10190}$. Ora, un uomo di 56 ed in salute non ha alcun timore di morire entro 24 ore e dunque si può ritenere come nulla una probabilità di $\frac{1}{10000}$ che rappresenta per Buffon la soglia di impossibilità *morale* della realizzazione di un evento. Buffon

[19] A stretto rigore, $\alpha = 0$ farebbe perdere di significato a (7.3) ma l'utilità media resta calcolabile. Il radicando è:

$$2^{\frac{1}{4}}4^{\frac{1}{8}}8^{\frac{1}{16}}16^{\frac{1}{32}}\cdots = 2^{\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}.$$

La serie è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

che, quando $x = \frac{1}{2}$, ha somma 1.

[20] Buffon afferma che si può scommettere 10189 contro 1 che l'individuo sopravviverà ancora un giorno.

comunicò le sue idee a Daniel Bernoulli che gli rispose in questi termini, il 19 marzo 1762:

> Approvo pienamente il modo in cui stimate le probabilità morali; voi indagate la natura dell'uomo a partire dalle sue azioni e supponete in effetti che nessuno si preoccupi al mattino se morirà in quel giorno; detto questo, poiché secondo voi muore una persona su diecimila [entro un giorno], concludete che uno su diecimila sia da ritenere come il nulla assoluto. È un modo di ragionare degno di un matematico-filosofo; questo principio ingegnoso però sembra condurre ad una quantità inferiore perché l'assenza di paura non è certa in chi è già ammalato. Non combatto il vostro principio che però sembra condurre piuttosto a $\frac{1}{100000}$ che a $\frac{1}{10000}$.[21] ([8], p. 350)

L'osservazione di Buffon che, come egli stesso afferma, si riferisce all'uomo medio—*l'homme moyen*, ([8], p. 350)—resta fondata, anche con le cautele segnalate da Bernoulli. Molto tempo più tardi Émile Borel (1871-1956) tratterà delle soglie al di sotto delle quali una probabilità può considerarsi nulla, distinguendo tra probabilità nulle su scala umana, terrestre e cosmica ([7], pp. 6-7). Per Borel, le probabilità inferiori ad 10^{-6} sono trascurabili su scala umana; trascurabili su scala terrestre o planetaria se inferiori a $10^{-15} = 10^{-6}/10^{9}$, dove 10^9 rappresenta una stima della popolazione umana di inizio Novecento; trascurabili su scala cosmica se inferiore a 10^{-50}: si tratta comunque di stime che non debbono essere prese alla lettera, sono ordini di grandezza. Prendendole troppo sul serio si rischierebbe di imbattersi nel cosiddetto paradosso del sorite ([8], p. 230), o del mucchio, attribuito ad Eubulide di Mileto (vissuto nel IV secolo avanti Cristo): se accettiamo che un milione di granelli di sabbia formino un mucchio di sabbia e che togliendo un granello di sabbia si ottiene ancora un mucchio di sabbia, ripetendo il ragionamento più volte, arriveremmo alla conclusione che un granello di sabbia è ancora un mucchio di sabbia.

Buffon era arrivato, indipendentemente da Cramer e Daniel Bernoulli ad individuare come causa del dissidio tra buon senso e aspettazione matematica nel paradosso di S. Pietroburgo, le diverse accezioni, quantitativa e qualitativa, di una certa quantità di denaro

> Il motivo di questo dissidio tra il calcolo matematico ed il buon senso mi sembra consistere nella sproporzione esistente tra il denaro e il vantaggio che ne risulta. Nei suoi calcoli il matematico non valuta il denaro se non secondo la sua quantità, cioè per il suo valore numerico; ma l'uomo

[21] J'approuve fort, monsieur, votre manière d'estimer les limites des probabilités morales; vous consultez la nature de l'homme par ses actions, et vous supposez en fait, que personne ne s'inquiète le matin s'il mourra ce jour-là; cela étant, comme il meurt, selon vous, un sur dix mille, vous concluez qu'un dix-millième de probabilité ne doit faire aucune impression dans l'esprit de l'homme, et par conséquent que ce dix-millième doit être regardé comme un rien absolu. C'est sans doute raisonner en mathématicien philosophe; mais ce principe ingénieux semble conduire à une quantité plus petite, car l'exemption de frayeur n'est assurément pas dans ceux qui sont déja malades. Je ne combats pas votre principe, mais il paraît plutôt conduire à $\frac{1}{100000}$ qu'à $\frac{1}{10000}$.

> morale lo deve stimare diversamente, dai vantaggi o dal piacere che può arrecargli; è certo che debba muoversi in quest'ottica e non valutare il denaro altrimenti che in proporzione ai vantaggi che gli arreca e non solo rispetto alla quantità che, superati certi limiti, non potrà aumentare in alcun modo la sua felicità.[22] ([8], p. 370)

Il valore infinito dell'aspettazione è legato a diversi fattori: la cifra messa in palio dopo una trentina di lanci era più grande del denaro che probabilmente circolava in Francia in quel tempo. C'è dunque un problema di insolvenza che rende del tutto irrealistico ed inutile procedere a sommare altri termini nella serie.[23]

Inoltre, l'utilità del denaro vinto consente un'ulteriore riduzione dell'aspettazione morale ma, anziché accettare le proposte di Cramer o Daniel Bernoulli oppure formulare un modello alternativo, Buffon riteneva troppo vago il problema perché ne fosse possibile una formulazione matematica rigorosa e per questo cambia strategia di attacco:

> il primo strumento che si presenta è di confrontare il calcolo matematico con l'esperimento perché, in molti casi, noi possiamo, come dissi, conoscere l'effetto del caso tramite esperimenti ripetuti in modo tanto sicuro quanto sarebbe deducendolo immediatamente dalle cause.[24] ([8], p. 378)

È un inciso importante perché raccorda la probabilità con la freqeuenza in un esperimento ripetuto nelle stesse condizioni, sulla scia delle considerazioni di

[22] La raison de cette contrariété entre le calcul mathématique et le bon sens, me semble consister dans le peu de proportion qu'il y a entre l'argent et l'avantage qui en résulte. Un mathématicien dans son calcul, n'estime l'argent que par sa quantité, c'est-à-dire par sa valeur numérique; mais l'homme moral doit l'estimer autrement et uniquement par les avantages ou le plaisir qu'il peut procurer; il est certain qu'il doit se conduire dans cette vue, et n'estimer l'argent qu'à proportion des avantages qui en résultent, et non pas relativement à la quantité qui, passé de certaines bornes, ne pourrait nullement augmenter son bonheur.

[23] Il tema dell'insolvenza sarà ripreso più volte ma considerazioni di queso tipo non risolvono il paradosso, come osserveranno, tra gli altri, sia Bertrand ([2], p. 64) che Keynes ([22], p. 362)

> Pietro prende degli impegni cui non può far fronte. Se testa non si presenta che al centesimo lancio, il guadagno di Paolo rappresenterà una massa d'oro più grande del Sole. Pietro sbaglia a promettergliela. L'osservazione è corretta ma non chiarisce nulla. Se si gioca scommettendo centesimo al posto di franchi, granelli di sabbia al posto di centesimi, molecole di idrogeno al posto di granelli di sabbia, il rischio di insolvibilità diminuirà senza limite. La teoria non deve fare alcuna differenza. [Pierre prend des engagements qu'il ne peut tenir. Si face ne se présente qu'au centième coup, le gain de Paul représentera une masse d'or plus grosse que le soleil. Pierre le trompe en la lui promettant. L'observation est juste, mais n'éclaircit rien. Si l'on joue des centimes au lieu de francs, des grains de sable ou lieu de centimes, des molécules d'hydrogène au lieu de grains de sable, la crainte d'être insolvable peut diminuer, sans limite. La théorie ne doit pas faire la différence.] ([2], p. 64)

[24] le premier moyen qui se présente est de comparer le calcul mathématique avec l'expérience; car, dans bien des cas, nous pouvons, par des expériences réitérées, arriver, comme je l'ai dit, à connaître l'effet du hasard, aussi sûrement que si nous le déduisions immédiatement des causes.

Jakob Bernoulli. Operativamente, Buffon fece eseguire ad un bambino (*par un enfant*) $2048 = 2^{11}$ volte il "gioco di S. Pietroburgo", ottenendo questi risultati

$N°$ giochi	guadagno di B in scudi
1061	1
494	2
232	4
137	8
56	16
29	32
25	64
8	128
6	256

La somma vinta in media è poco più di 5 scudi e, osserva Buffon:

> ritengo valido questo risultato perché si basa su un gran numero di esperimenti e perché è anche in accordo con un altro ragionamento matematico e inconfutabile, grazie al quale si trova all'incirca lo stesso equivalente di cinque scudi.[25] ([8], p. 379)

Il ragionamento inattaccabile non differisce in sostanza da quello che condusse Daniel Bernoulli all'utilità espressa dalla (7.6): tra le 2048 partite ve ne saranno, in media, 1024 in cui Paolo vince uno scudo; 512 in cui ne vince 2; 256 in cui ne vince 4; 128 in cui ne vince 8; 64 in cui ne vince 16; 32 in cui ne vince 32 e così via. In questo modo si arriva ad un totale di 2047 partite,[26] per cui ne rimane una di cui non possiamo dire nulla ma che, per Buffon, è trascurabile senza errore sensibile. L'equivalente è in questo caso di 5 scudi e mezzo. Ripetendo il calcolo su un numero di giochi di S. Pietroburgo pari a $2^{20} = 1048576$, si ottiene una cifra di 10 scudi circa. Tuttavia non ha alcun senso *pratico* ostinarsi in un numero tanto grande di ripetizioni, visto che per eseguire tanti lanci occorrerebbero più di 13 anni, giocando sei ore al giorno:

> convenzione che è moralmente impossibile.[27] ([8], p. 382)

Limitandosi a ripetere la stessa stima teorica per numeri di giochi eseguibili in tempi ragionevoli e prendendo la media delle somme ottenute in ogni gioco, si ottiene un equivalente medio, una media di medie, ancora di cinque scudi. In modo sorprendente, almeno per noi, Buffon non si accontenta dell'accordo qualitativo ottenuto tra calcolo ed esperienza ma vuole servirsene per vedere se

> non sia possibile dedurre il rapporto tra il valore del denaro e l'utilità che ne risulta.[28] ([8], p. 382)

[25] Je tiens ce résultat général pour bon, parce qu'il est fondé sur un grand nombre d'expériences, et que d'ailleurs il s'accorde avec un autre raisonnement mathématique et incontestable, par lequel on trouve à-peu-près ce même équivalent de cinq écus.

[26] Infatti $\sum_{n=0}^{10} 2^n = 2^{11} - 1$.

[27] ce qui est une convention moralement impossible.

[28] il ne serait pas possible de tirer la proportion de la valeur de l'argent par rapport aux avantages qui en résultent.

Altrimenti detto, Buffon vuole trovare una base empirica alla teoria dell'utilità che sostituisca il *modello teorico* di Daniel Bernoulli. Per far questo, convinto del ruolo *universale* del valore di cinque scudi appena trovato per la speranza matematica nel gioco di S. Pietroburgo, Buffon sostituisce allo schema iniziale quello in cui le poste in palio ad ogni gioco formano la progressione geometrica di ragione $\frac{9}{5}$. L'aspettazione di questo *gioco efficace* è

$$E_B = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{2^3}\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 5.$$

Il modello empirico di Buffon è artificiale, essendo basato sul ruolo cabalistico del valore di 5 scudi attorno al quale si accumulano i risultati sperimentali e le previsioni teoriche su un numero molto grande di partite ma arbitrariamente troncato. Ad ogni buon conto, qualcosa delle idee di Bernoulli e Cramer sull'utilità rimane perché anche in questo caso il legame tra guadagno e utilità non è lineare.

Osserviamo che il ruolo del buon senso come guida per condurre lo studio della probabilità su binari più vicini alla realtà è stato criticato all'inizio del Novecento dal matematico francese Louis Bachelier (1870-1946), allievo di Poincaré e fondatore della moderna finanza matematica. Presentato il paradosso, così commentava

> Non si può invocare il buon senso quando si tratta di questioni delicate perché esso non permette di riconoscere se l'area compresa tra una curva ed il suo asintoto è finita o no, se una serie è convergente o divergente; gli indizi che può fornire non hanno spesso alcun valore quando si tratta di quantità che possono crescere indefinitamente come nel caso considerato. Il giocatore deve ricevere ad ogni partita quanto avrebbe ottenuto alla partita precedente, moltiplicato per due; se avesse ricevuto la stessa somma, moltiplicata per 1,999 la sua aspettazione sarebbe stata finita; il buon senso non può fare differenza tra i due casi.[29] ([1], pp. 26-27)

Infine, ricordiamo che la convergenza dell'utilità di Bernoulli nel problema di S. Pietroburgo non avviene sempre. Nel 1934, il matematico austriaco Karl Menger (1902-1985) mostrò [25] che se, quando testa si presenta per la prima volta all'n-esimo lancio, B riceve da A la quantità $v(\mathrm{e}^{2^n}-1)$, dove v è la ricchezza iniziale di B, non solo la sua speranza matematica ma anche la sua utilità (*subjektive Hoffnung*) diverge con n, dal momento che riceve un incremento $\frac{C}{2^n}\log\frac{v+v\mathrm{e}^{2^n}-v}{v} = C$ e quindi ha valore nC: la risoluzione del paradosso con il ricorso all'utilità resta dunque apparente (*scheinbare*). Di più, anche cambiando

[29] Le bon sens ne peut être invoqué lorsqu'il s'agit de questions délicates, il ne permet pas de reconnaître si l'aire comprise entre une courbe et son asymptote est finie ou non, si une série est convergente ou divergente; les indices qu'il peut fournir n'ont souvent aucune valeur lorsqu'il s'agit de quantités qui peuvent croître indéfiniment comme dans le cas considéré. Le joueur doit recevoir à chaque partie ce qu'il eût reçu à la partie précédente multiplié par deux; s'il devait recevoir la même somme multipliée par 1,999 son espérance serait finie; le bon sens ne fait cependant aucune différence entre les deux cas.

la funzione utilità in un'altra funzione $f(w)$ diversa dal logaritmo, purché divergente all'infinito, è sempre possibile trovare un problema di S. Pietroburgo in cui l'utilità è divergente. Infatti, se all'incremento w_n di ricchezze corrisponde una utilità $f(w_n)$ di almeno 2^{n-1} ducati, l'utilità media sarà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(w_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1},$$

che chiaramente diverge.

7.2 La prima critica dei fondamenti del calcolo delle probabilità

Critiche pungenti al calcolo delle probabilità furono mosse da Jean Baptiste Le Rond D'Alembert (1717-1783) in diverse circostanze, a partire dall'articolo *Croix ou pile* che comparve, nel 1754, sulla *Encyclopédie* di cui fu il curatore principale insieme a Denis Diderot (1713-1784). Fu il primo a chiamare problema di S. Pietroburgo, *le problème de Petersbourg* ([14], p. 78), il paradosso di cui ci stiamo occupando, prendendo ispirazione dalla città in cui era stato pubblicato lo *specimen* di Daniel Bernoulli. Per D'Alembert, il paradosso di S. Pietroburgo era la prova lampante che il calcolo delle probabilità non riposava su principii abbastanza solidi. La sua critica ai fondamenti del calcolo delle probabilità era netta: parlando della successione ripetuta di più lanci consecutivi di una moneta equilibrata, D'Alembert ritiene estremamente improbabile l'avverarsi di una successione di sole teste, rispetto ad una successione in cui teste e croci sono mescolate. Sono due i punti su cui D'Alembert porta l'attenzione dei lettori:

1. Occorre distinguere tra eventi che accadono *certamente* ed eventi che accadono *necessariamente* o, detto in altri termini ([11], p. 10) occorre distinguere tra possibilità *metafisica* e *fisica* di un evento: la prima riguarda eventi il cui realizzarsi non è assurdo, la seconda riguarda quegli eventi che, oltre a non essere assurdi, non sono neppure troppo straordinari. Per D'Alembert, la successione di $n \gg 1$ teste consecutive nella ripetizione del lancio di una moneta rientra nella prima categoria di eventi ma non nella seconda. Al contrario, una successione di lanci in cui testa e croce sono intercalate tra loro, è per D'Alembert anche fisicamente possibile. Qui D'Alembert sembra confrontare una successione certamente singolare come quella in cui vi sono solo teste con *l'insieme* di successioni in cui teste e croci sono intercalate. La conseguenza che D'Alembert traeva non era lontana da quella di Nicolaus Bernoulli: occorre considerare come nulle le probabilità troppo prossime a zero. Come però mettere in pratica questo criterio? Come è possibile che la probabilità passi a zero *bruscamente*, compiendo un salto? Questa difficoltà, che per D'Alembert denunciava

l'insufficienza della teoria tradizionale, era aggirata in modo che egli stesso definiva non scevro da dubbi e praticamente poco perseguibile, ma che contiene un'idea interessante:

> Suppongo, ad esempio, che si lanci in aria una moneta quattro volte di seguito; ci saranno 2^4 o 16 combinazioni differenti di *testa* e *croce* prese a quattro a quattro. Se dunque si ricomincia questo gioco un numero di volte è sia multiplo di 16 o, ciò che è lo stesso, se 32, 64, ecc. giocatori diversi fanno a turno questo gioco, ciascuno in particolare, gettando ognuno uno scudo in aria quattro volte di seguito, è evidente che qualcuna delle 16 combinazioni verrà ripetuta. Ora, credo che le combinazioni che saranno ripetute più raramente, e che può darsi non si presentanno affatto in un gran numero di lanci, saranno quelle nelle quali *croce* si trova ripetuta quattro volte o *testa* è ripetuta quattro volte. Dopo questo esperimento, ripetuto un gran numero di volte di seguito, si potrebbe forse stimare il rapporto delle probabilità, attraverso il numero degli eventi realizzatisi. È vero che il risultato potrà lasciare dei dubbi, e che l'esperimento sarà forse irrealizzabile se il numero di lanci, anziché essere pari a quattro, come si è supposto, sarà molto maggiore, come cento; ecco però, così mi sembra, il solo modo di ottenere in questo caso un risultato che sia almeno prossimo al vero. ([11], pp. 14-15)

Questo passo mi sembra significativo perché richiama quella che sarà l'impostazione di tipo frequentista al calcolo delle probabilità che però D'Alembert, più preoccupato a mostrare l'inconsistenza dell'approccio tradizionale, no sviluppò. Un altro passaggio dove emerge chiaramente la dicotomia tra certezza e possibilità fisica è quello in cui D'Alembert giustifica il fatto che, ottenuta testa una prima volta, al lancio successivo la probabilità di riottenere testa sia ridotta. D'Alembert suppone che, inizialmente, vi siano n modi per ottenere testa ed altrettanti per ottenere croce. Supponendo di aver ottenuto croce al primo lancio, D'Alembert si domanda:

> è verosimile che l'impulso che mi fornirà ancora croce al secondo lancio sia *esattamente* lo stesso che me lo ha fornito al primo lancio? A me non sembra. Infatti, in questo caso, non resteranno che $n-1$ modi per ottenere *croce* al secondo tentativo mentre ve ne sono ancora n per ottenere *testa* al secondo lancio. Vi è dunque già un po' più di probabilità di ottenere *testa* rispetto a *croce* al secondo lancio. ([16], p. 39)

D'Alembert, pienamente consapevole della impossibilità pratica di riprodurre due volte le stesse condizioni di un lancio di una moneta, ritiene che ogni lancio che ha dato, ad esempio, croce come esito, riduca il numero di condizioni favorevoli a quell'evento. Se una moneta non è truccata, dopo avere ottenuto tante volte di seguito croce si è indotti a congetturare che, al lancio successivo, si otterrà testa. Alla base di questo ragionamento c'è la constatazione che

> l'esperienza e la conoscenza che abbiamo delle leggi di natura ci insegnano che uno stesso evento non si presenta mai un gran numero di volte di seguito; è in virtù di questa *conoscenza acquisita* che noi dubitiamo della ripetizione di *testa* o *croce* un gran numero di volte consecutivo. Dal momento che tutto è legato nell'ordine delle cose, noi potremmo, conoscendo la concatenazione delle cause e degli effetti, divinare e predire l'esito di ogni lancio, se sarà *testa* o *croce*; nell'ignoranza dei segreti della natura in cui siamo, non possiamo dire con certezza se otterremo *testa* o *croce*; poiché però l'esperienza ci ha insegnato che lo stesso effetto si ripete raramente, potremo almeno congetturare che, se *croce* si è verificata molte volte di seguito, allora si otterrà verosimilmente *testa* al prossimo lancio. ([16], p. 48)

In tutto questo, è bene ricordarlo, D'Alembert suppone che la moneta sia equilibrata perché, in caso contrario, la conclusione potrebbe essere molto diversa.

2. Strettamente legata a questa problematica è la proposta di una revisione radicale dei concetti di probabilità ed aspettazione matematica. È possibile, si chiede D'Alembert, considerare equivalenti un gioco in cui vi sia certezza di ottenere 500 scudi ed un altro in cui vi sia probabilità $\frac{1}{2}$ di ottenerne 1000?

> La difficoltà proviene, se non mi sbaglio, dal fatto che l'idea di *speranza* comprende due cose; la somma che ci si attende e la probabilità di guadagnarla. Ora, mi sembra che sia *soprattutto la probabilità* a dover stabilire la speranza e che la somma attesa non debba entrare (...) che in modo subordinato rispetto al grado di probabilità; tuttavia le si fa entrare entrambe e nella stessa misura nel calcolo.[30] ([14], pp. 82-83)

Le proposte di D'Alembert sono influenzate in parte dalle riflessioni di Buffon, che aveva proposto una diversa valutazione del guadagno e della perdita in un gioco, riferite a quanto posseduto da un giocatore: se egli ha beni pari ad a e può guadagnare x, i suoi beni dopo aver giocato diverranno $a+x$ ed il guadagno reale sarà $\frac{x}{a+x}$; al contrario, se egli perdesse x, allora la perdita è misurata da $\frac{x}{a-x}$ che, essendo sempre maggiore di $\frac{x}{a+x}$, dimostra per D'Alembert, tra l'altro, come la perdita sia sempre più grande del guadagno che si può ottenere al gioco.

Tornando al problema di San Pietroburgo, D'Alembert ritiene che l'ammissione del suo carattere paradossale da parte di Bernoulli dimostri il fatto che

[30] La difficulté vient, si je ne me trompe, de ce que l'idée d'espérance enferme deux choses; la somme qu'on espère, et la probabilité qu'on gagnera cette somme. Or il me semble que c'est *principalement la probabité* ui doit régler l'espérance; et que la somme espérée ne doit y entrer, si je puis parler de la sorte, que d'une maniere subordonnée au dégré de probabilité: cependant on les fait entrer toutes deux également et de la mm̂e maniere dans le calcul.

anche per lui una sequenza estremamente lunga di lanci di una moneta che diano sempre lo stesso risultato fosse fisicamente impossibile e che il realizzarsi effettivo di una simile sequenza nascondesse in realtà una causa che agisce a favore di una uniformità tanto singolare. D'Alembert alimenta il suo argomento proprio con alcune considerazioni di Bernoulli, per il quale il fatto che tutti i pianeti allora noti del sistema solare giacessero in una porzione molto piccola della sfera celeste provava la presenza di una causa soggiacente, diversa dalla pura casualità. D'Alembert riteneva questo atteggiamento una prova che un'uniformità singolare sia da considerarsi fisicamente impossibile, benché, dal punto di vista matematico, si tratta di una configurazione come tante. Egli non si limitava a proporre argomenti qualitativi ma mostrava come, accettando che la probabilità di ottenere testa ad un lancio, sapendo che si era ottenuto testa in n lanci precedenti fosse minore di $\frac{1}{2}$ allora, anche con la definizione di aspettazione in uso, era possibile ottenere per essa un valore finito. Il suo ragionamento era il seguente:

- Si suppone che la probabilità che testa esca al secondo lancio, sapendo che è uscita al primo lancio è $\frac{1-\varepsilon_1}{2}$, con $0 < \varepsilon_1 \ll 1$
- La probabilità che testa esca al terzo lancio, sapendo che è uscita ai primi due è $\frac{1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$, con $0 < \varepsilon_2 \ll 1$ e così via, supponendo che $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1$;
- Si calcola, con le regole tradizionali la probabilità che testa esca in $n-1$ lanci consecutivi e che croce esca all'n-esimo lancio:

  $$\frac{1}{2} \times \frac{1-\varepsilon_1}{2} \times \frac{1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} \cdot \frac{1-\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k}{2} \times \frac{1+\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k}{2}$$

  dove l'ultimo termine rappresenta la probabilità che croce esca, per la prima volta, dopo n lanci.
- Si calcola l'aspettazione sulla base delle regole *tradizionali*:

  $$\frac{1}{2}[1+1+\varepsilon_1+(1-\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\cdots]$$

- Si dimostra che, a patto di scegliere i valori di ε_n opportunamente, l'aspettazione resta *finita*.

L'obiettivo di D'Alembert non è tanto quello di proporre una teoria completa della probabilità che sia alternativa a quella accettata ma di mostrare l'opportunità di rivedere le basi del calcolo, visto che il contrasto con il buon senso può svanire se si considerano altri modelli per esso ed in effetti, anche se non sempre i ragionamenti di D'Alembert sono condivisibili, le sue argomentazioni mettono in luce come la validità dei fondamenti del calcolo delle probabilità non fosse scontata. Ribadiammo che D'Alembert non suppone la moneta truccata: assumere $\varepsilon_n \neq 0$ significa per D'Alembert tenere conto del fatto che il presentarsi più volte della medesima faccia della moneta riduce l'insieme di condizioni sotto le quali essa può presentarsi.

7.3 L'approccio di Condorcet

Il ruolo del Marchese di Condorcet (Marie-Jean-Antoine-Nicholas de Caritat, 1743-1794) nella storia del calcolo delle probabilità è controverso. Il calcolo delle probabilità giocava un ruolo fondamentale nel suo programma di *mathématique sociale*, di applicazione della matematica non solo alle scienze tradizionalmente affini come la fisica ma anche a discipline che coinvolgevano la vita sociale e politica. Questo programma era ereditato dalla visione di Anne-Robert-Jacques Turgot (1724-1781) che fu economista e filosofo oltre che ministro delle finanze sotto Luigi XVI, per poco meno di due anni. Come ricorda Condorcet nell'introduzione all'*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions*, Turgot

> era persuaso che le verità delle scienze morali e politiche fossero suscettibili dello stesso grado di certezza di quelle che formano il sistema delle scienze fisiche, e come quelle branche di queste scienze, come l'astronomia, che sembrano raggiungere la certezza matematica.[31] ([9], p. i)

Ora consideriamo l'approccio di Condorcet al problema di S. Pietroburgo che figura nella prima parte di una memoria del 1784, dedicata ad esaminare il concetto di speranza matematica. Condorcet anzitutto sottolinea che l'aspettazione non fornisce il reale vantaggio di un giocatore ma solamente un valore medio di questo vantaggio. L'argomento è semplice: se ho probabilità $\frac{1}{3}$ di guadagnare 2 e $\frac{2}{3}$ di guadagnare 1, il mio vantaggio, cioè l'aspettazione è $\frac{4}{3}$, valore che però non otterrò *mai*, dal momento che otterrò 2 oppure 1. La regola che definisce l'aspettazione fornisce un vantaggio medio, non già il vantaggio reale, una sorta di punto di equilibrio tra le parti. Osserviamo che in questo ragionamento l'aspettazione è calcolata su un singolo evento. Il punto è di stabilire se la formula proposta per il calcolo del vantaggio medio è attendibile o meno. Per Condorcet la risposta è affermativa dal momento che essa soddisfa a due condizioni: quella di rendere il caso in cui nessuno dei due giocatori vince come il più probabile, e quella di far in modo che la probabilità di vincere o di perdere da parte di ciascun giocatore approssimi il valore $\frac{1}{2}$ al crescere del numero di eventi che si considera. Condorcet non giustifica queste affermazioni e nel trattato elementare sul calcolo delle probabilità, pubblicato postumo, concede che l'adozione del concetto di speranza matematica fu favorita dal fatto che le conclusioni cui esso conduceva erano conformi al buon senso (*conformes à la raison commune*): fino alla crisi portata dal problema di S. Pietroburgo. Per Condorcet questo problema *non* è un problema reale, nel senso che non potrà mai presentarsi nella realtà e dunque deve essere considerato solo come un caso limite. Questo carattere asintotico fa perdere al paradosso la sua forza contro la bontà del concetto di speranza matematica. Poiché per Condorcet la probabilità che B vinca si avvicina ad $\frac{1}{2}$ solo se si possono fare un numero infinito di partite

[31] était persuadé que les vérités des Sciences morales et politiques, sont suscéptibles de la même certitude que celles qui forment le systéme des Sciences physiques, et même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paroissent approcher de la certitude mathématique.

> si vede che il principio che abbiamo asserito essere quello su cui deve basarsi la regola generale, cioè di stabilire la maggior uguaglianza possibile tra due stati essenzialmente differenti, non può verificarsi in questa situazione, perché richiederebbe di abbracciare un numero infinito di partite, cosicché il limite, che nei problemi ordinari è un numero infinito di partite, qui è necessariamente un infinito di second'ordine.[32] ([9], p. 714)

Condorcet però non liquida il problema in modo sbrigativo, come queste parole potrebbero lasciar pensare, ed egli stesso non ritiene soddisfacente questa spiegazione, perché il problema persiste anche limitando il numero di partite dal momento che

> la somma che B dovrebbe dare ad A per giocare a questo gioco senza questa ipotesi è ancora tale che, per poco che grande diventi il numero di lanci, nessuna persona dotata di senno vorrebbe rischiarla.[33] ([9], p. 714)

Condorcet suppone che il numero massimo di partite sia n e che al giocatore B siano corrisposte le somme di 1 denaro, se testa esce al primo lancio, 2 denari, se testa esce al secondo lancio, 4 denari se esce al terzo, e così via fino all'n-esimo lancio, quando gli sarà riconosciuta la somma di 2^{n-1} denari, se testa si presenta per la prima volta in quell'occasione e 2^n denari se testa non sarà mai uscita in alcuno degli n lanci. Le probabilità di successo di B sono: $\frac{1}{2}$ al primo lancio, $\frac{1}{2^2}$ al secondo lancio, $\frac{1}{2^3}$,... $\frac{1}{2^n}$, se testa si presenta all'ultimo lancio e ancora $\frac{1}{2^n}$ se testa non si presenta affatto. Per poter giocare, B deve versare una quota

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} + 2^n\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2} + 1.$$

Ora, B inizierà a guadagnare quando testa compare, per la prima volta, al lancio p tale che

$$2^{p-1} > \frac{n}{2} + 1$$

mentre al colpo in cui $2^{p-1} = \frac{n}{2} + 1$, ovvero quando $n = 2^p - 2$, si ha l'equilibrio tra vincite e perdite. In questo caso, la probabilità che B perda è pari a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} = 1 - \frac{1}{2^{p-1}}$$

che rappresenta la probabilità di aver ottenuto testa in uno dei $p-1$ lanci iniziali. Condorcet considera l'esempio in cui $p = 4$ e dunque $n = 2^4 - 2 = 14$. In questo caso la posta che B versa è $\frac{n}{2} + 1 = 8$ denari. La probabilità che B perda del

[32]on voit donc que le principe sur lequel nous avons dit que devoit être fondée la règle générale, celui de mettre la plus grande égalité possible entre deux états essentiellement différens, ne peut avoir lieu ici, puisque cette égalité exigeroit qu'on embrassât la combinaison d'un nombre infini de parties, en sorte que la limite qui, dans les problèmes ordinaires est un nombre infini des parties, est nécessairement ici un infini du second ordre.

[33]la somme que B devroit donner à A sans cette hypothèse pour jouer à jeu égal, est encore telle, pour peu que le nombre de coups soit grand, au'aucun homme raisonnable ne voudroit risquier de la donner.

denaro è, per quanto appena visto, $1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$; quella che B concluda con un bilancio in pareggio è $\frac{1}{16}$ così come quella che egli concluda il gioco realizzando un guadagno, benché sia possibile vincere, con probabilità $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$, una somma massima di $16376 = 16384 - 8$ denari. Al contrario, A ha probabilità $\frac{15}{16}$ di non perdere denaro, esponendosi ad una perdita di 16376 denari che ha probabilità $\frac{1}{16384}$ di verificarsi e ad un guadagno massimo di $7 = 8-1$ denari, con probabilità $\frac{1}{2}$, che si realizza quando esce subito testa. Vi è dunque una grande differenza, una discriminazione, fra le posizioni di A e B che non dovrebbero vincolarsi a stipulare l'accordo implicato dal gioco se non modificando la cifra che viene considerata come unità di misura ed il numero n di partite da giocare, in modo che le probabilità di vittoria dei due contendenti siano confrontabili e che, con grande probabilità, entrambi non possano perdere più di una frazione assegnata del capitale:

> vi sia una probabilità molto grande che né A ne B perdano, in un numero m di partite, una cifra il cui valore non ecceda una frazione assgnata con m.[34] ([9], pp. 715-716)

Negli *Élémens* postumi, Condorcet entrerà in ulteriori dettagli, osservando che, per decidersi a giocare ad un gioco dove si ha una piccola probabilità di vincere una grande somma, occorre una valutazione preliminare degli stati del giocatore prima dell'inizio e dopo la conclusione del gioco. Nel caso del problema di S. Pietroburgo la conclusione è la seguente

> Così, nell'esempio tratto dal gioco di testa o croce (...) si vede che, colui che scommette $\frac{n}{2}$ a fronte di una probabilità $\frac{1}{2^n}$ di guadagnare 2^{n-1} [denari] al lancio n-esimo, non deve risolversi a giocare se non quando potrà ripetere il gioco un numero di volte tale da conferirgli una probabilità pressoché uguale di vincere come di perdere. Similmente, colui che, al contrario, può trovarsi costretto a pagare 2^{n-1} [denari], non avendone ricevuti che $\frac{n}{2}$, non deve giocare, a dispetto della grande probabilità che ha di vincere, se non quando egli possa considerare $\frac{n}{2}$ o, meglio, le somme inferiori per le quali egli ha una fondata speranza di ottenere, come una compensazione del rischio molto piccolo di perdere la somma ben maggiore di 2^{n-1} [denari], ciò che costringe a prendere n molto piccolo. Allora i giocatori potranno decidersi a giocare e il paradosso scomparirà.[35] ([10], pp. 113-114)

[34] qu'on ait une assez grande probabilité que ni A ni B dans un nombre m de parties ne perdront au-delà d'une valeur qui ait une proportion donnée avec m.

[35] Ainsi, dans l'exemple tiré du jeu de *croix* ou *pile* (...) on voit que celui qui donne une mise $\frac{n}{2}$, et qui a probabilité $\frac{1}{2^n}$ de gagner 2^{n-1} au n^e coup, ne doit se déterminer à jouer, qu'autant qu'il pourra répéter le jeu assez souvent pour avoir une probabilité presque égale de gagner ou de perdre. De mm̂e celui qui, au contraire, peut être obligé de donner 2^{n-1} après n'avoir reçu que $\frac{n}{2}$, ne doit jouer, malgré la grande probabilité qu'il a de gagner, que lorsqu'il peut regarder $\frac{n}{2}$, ou plutôt les sommes moindres qu'il a une espérance fondée de gagner, comme un dédomaggement du risque très-petite de perdre la somme beaucoup plus grande 2^{n-1}, ce qui oblige a faire n très-petit. Alors les jouers pourront se déterminer à jouer le jeu, et le paradoxe disparoit.

L'asimmetria nelle condizioni di A e B fa inserire il problema di S. Pietroburgo nel quadro più generale della possibilità di derogare dalla condizione di gioco equo. L'opportunità di tale deroga è motivata da Condorcet osservando che, nei giochi dove il banco (*le banquier*) affronta più avversari (*les pontes*), egli va incontro ad una piccola probabilità di perdere una grossa cifra, mentre i giocatori hanno al ontrario una ragionevole aspettazione di vincere somme non troppo grandi. Affinché la perdita non sia troppo grande occorre che il gioco sia ripetuto tante e supporre la posta molto alta. Violare le regole del gioco equo a favore del banchiere è un sacrificio cui si espongono volontariamente i giocatori tentati di vincere una grossa somma. Similmente, le lotterie non vendono i biglietti al prezzo imposto dalle regole del gioco equo ma ad un costo superiore per compensare la necessità di rimbosrsare i premi, che deve essere garantita. Come ultimo esempio, non poteva mancare l'allusione alla pratica commerciale di applicare un interesse al prezzo da corrispondere per una merce il cui reperimento comporti un rischio concreto.

7.4 Gestire il rischio in modo razionale: l'inoculazione del vaiolo

Gli esempi che Daniel Bernoulli aveva esposto a corredo della sua teoria dell'utilità nello *Specimen* [2] mostravano come il calcolo delle probabilità potesse costituire uno strumento razionale per decidere una strategia di comportamento di fronte a decisioni che comportavano un rischio. Una di queste situazioni si ricollegava ad un problema di grande impatto sociale: è opportuno o meno praticare l'inoculazione[36] per ridurre il rischio di mortalità dovuta al vaiolo? Nel XVIII secolo il vaiolo rappresentò la maggiore causa di mortalità in Europa ed il dibattito sull'opportunità di campagne di vaccinazione fiorì in diversi paesi: in Francia esso coinvolse, tra gli altri, D'Alembert e Daniel Bernoulli. L'inoculazione comportava dei rischi poiché prevedeva il contatto diretto della pelle dell'individuo con pustole attive di vaiolo. Si stimava che, per un parigino, la probabilità di morire per aver contratto il vaiolo fosse di $\frac{1}{7}$ mentre la probabilità di morire a seguito dell'inoculazione era $\frac{1}{200}$. Si presentava dunque un dilemma: correre il rischio *certo* ed immediato legato all'inoculazione oppure non sottoporsi all'inoculazione e dunque diluire nel tempo il rischio [17]. Nel 1760 Daniel Bernoulli presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi un lavoro [3], in cui affrontava il problema dell'utilità dell'inoculazione, per rispondere ad un'obiezione piuttosto diffusa, non solo tra gli strati bassi della società: vale la pena sottoporsi all'inoculazione visto che, in media, si aggiunge una aspettativa di vita di soli due anni ai bambini nati da poco? Per rispondere in modo scientifico all'obiezione, Bernoulli, il cui lavoro sarà pubblicato solo nel 1766, riteneva che si dovessero confrontare due tavole di mortalità: una che tenesse conto delle morti per vaiolo; l'altra, ipotetica, che corrispondeva al caso in cui il

[36]In medicina l'inoculazione è l'introduzione nell'organismo di un agente patogeno tramite un'iniezione od un incisione cutanea.

vaiolo fosse stato debellato. A questo progetto si opponeva l'indisponibilità di un dato cruciale nelle tavole di mortalità esistenti: l'età delle persone decedute a causa del vaiolo. Per ovviare a questa carenza di informazioni Bernoulli svolse alcune considerazioni per stimare i due parametri ritenuti fondamentali:

1. la probabilità di contrarre la malattia, in un certo anno, a seconda dell'età del soggetto;

2. la probabilità di guarigione per un soggetto che abbia contratto la malattia.

Anche questi parametri erano difficili da ottenere ma Bernoulli riteneva di poterne surrogare la conoscenza con quella di due altri dati. Egli anzitutto contestava l'idea che il vaiolo si diffondesse tra i più giovani per un problema di costituzione. Se i giovani si ammalavano di più era perché la malattia, salve rare eccezioni, non veniva contratta più di una volta e molti adulti non contraevano la malattia perché l'avevano già contratta in giovinezza. Secondo l'analisi di Bernoulli, la probabilità di contrarre il vaiolo entro i cinque anni di età era $\frac{1}{2}$; entro i dieci anni era di $\frac{3}{4}$; entro i 20 anni di età era $\frac{15}{16}$ e $\frac{4000}{4001}$ entro i 60 anni di età. L'ipotesi formulata da Bernoulli era la seguente:

> finché non si è contratto il vaiolo, si corre sempre lo stesso rischio di contrarlo.[37] ([3], p. 4).

La seconda ipotesi riguardava la probabilità di morire, una volta contratta la malattia:

> il rischio di morte a seguito del vaiolo potrà essere considerato lo stesso ad ogni età, in un anno qualsiasi.[38] ([3], p. 4).

Queste ipotesi di lavoro si traducono formalmente in queste richieste:

1. indipendentemente dall'età degli individui, la probabilità di contrarre in un anno il vaiolo all'interno di un gruppo formato da un numero rilevante di persone è pari ad $\frac{1}{n}$;

2. indipendente dall'età dell'individuo che ha contratto il vaiolo, la probabilità di morirne è pari ad $\frac{1}{m}$.

Il modello epidemiologico di Bernoulli può ora essere costruito. Si indichi con x l'età espressa in anni; sia $\xi = \xi(x)$ in numero di individui che raggiungono quell'età all'interno di una popolazione; sia $s(x) \leq \xi(x)$ il numero di individui che non hanno ancora contratto il vaiolo all'età x. Allora $-\mathrm{d}s$ rappresenta il numero di individui che contraggono il vaiolo nel tempuscolo $\mathrm{d}x$ ed è $-\mathrm{d}s = \frac{s\mathrm{d}x}{n}$, comprendendo anche quelli che ne muoiono. Occorrerà poi anche tenere conto degli individui che muoiono, all'interno dello stesso tempuscolo $\mathrm{d}x$, per altre

[37] tant qu'on n's pas eu la petite vérole on court continuellement la même risque de l'avoir.

[38] le risque de mourir de la petite vérole, quand on en est attaqué, pourroit bien être, année commune, la même a tout âge.

cause. I morti per vaiolo sono $\frac{s\mathrm{d}x}{mn}$ e quindi il numero di individui che muoiono per altre cause è $-\mathrm{d}\xi - \frac{s\mathrm{d}x}{mn}$. Poiché questo numero va riferito al campione di s individui,[39] per avere l'espressione corretta di $-\mathrm{d}s$ occorre moltiplicare questo contributo per $\frac{s}{\xi}$ arrivando a

$$-\mathrm{d}s = \frac{s\mathrm{d}x}{n} - \frac{s\mathrm{d}\xi}{\xi} - \frac{s^2\mathrm{d}x}{mn\xi}. \tag{7.7}$$

Per integrare (7.7), Bernoulli riordinò i termini come

$$\frac{s\mathrm{d}\xi}{\xi} - \mathrm{d}s = \frac{s\mathrm{d}x}{n} - \frac{s^2\mathrm{d}x}{mn\xi}$$

e, moltiplica ambo i membri per $\frac{\xi}{s^2}$, ottenne

$$\frac{s\mathrm{d}\xi - \xi\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{\xi\mathrm{d}x}{ns} - \frac{\mathrm{d}x}{mn}.$$

Posto $q := \frac{\xi}{s}$ si ha

$$mn\mathrm{d}q = mq\mathrm{d}x - \mathrm{d}x$$

ovvero

$$\frac{mn\mathrm{d}q}{mq-1} = \mathrm{d}x$$

da cui segue finalmente

$$n\log(mq-1) = x + C$$

per una opportuna costante di integrazione C. Ripristinando le variabili iniziali e passando alla forma esponenziale si ottiene

$$\left(\frac{m\xi}{s} - 1\right)^n = \mathrm{e}^{x+C}$$

e quindi

$$s = \frac{m}{\mathrm{e}^{\frac{x+C}{n}} + 1}\xi.$$

Per determinare il valore di C, Bernoulli suppose che all'età $x = 0$ si avesse $\xi(0) = s(0)$, ricavando

$$\mathrm{e}^{\frac{C}{n}} = m - 1$$

e, infine,

$$s(x) = \frac{m}{(m-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + 1}\xi(x) \tag{7.8}$$

che esprime $s(x)$ in termini dei parametri di modello e della funzione $\xi(x)$ che si suppone nota, almeno per punti, dalle tavole di mortalità che Bernoulli utilizza

[39] Come ripeterà più avanti, Bernoulli ipotizza che i decessi all'interno della popolazoione dovuti a cause *diverse* dal vaiolo siano proporzionali al numero di individui che compongono la popolazione stessa.

per costruirne a sua volta un'altra in cui vengano messi in luce gli effetti del vaiolo, prendendo $m = n = 8$ cosicché

$$s(x) = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}} + 1}\xi(x)\,. \tag{7.9}$$

Osserviamo come Bernoulli sia ben consapevole del fatto che supporre m ed n costanti sia solo una approssimazione, ragionevolmente plausibile per individui di età inferiore ai 20 anni perché la mortalità aumenta in individui di età maggiore. L'accordo più favorevole tra la teoria e le osservazioni è che questa prevede come circa $\frac{1}{13}$ dell'intera generazione muoia per vaiolo, conformemente ai dati disponibili sulle cause di mortalità.

x	$\xi(x)$	$s(x)$	$\xi(x) - s(x)$	$I(x)$	$M(x)$	$\Sigma(x)$	$A(x)$
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17,1	17,1	283
2	855	685	170	99	12,4	29,5	133
3	798	571	227	78	9,7	39,2	47
4	760	485	275	66	8,3	47,5	30
5	732	416	316	56	7,0	54,5	21
6	710	359	351	48	6,0	60,5	16
7	692	311	381	42	5,2	65,7	12,8
8	680	272	408	36	4,5	70,2	7,5
9	670	237	433	32	4,0	74,2	6
10	661	208	453	28	3,5	77,7	5,5
11	653	182	471	24,4	3,0	80,7	5
12	646	160	486	21,4	2,7	83,4	4,3
13	640	140	500	18,7	2,3	85,7	3,7
14	634	123	511	16,6	2,1	87,8	3,9
15	628	108	520	14,4	1,8	89,6	4,2
16	622	94	528	12,6	1,6	91,2	4,4
17	616	83	533	11,0	1,4	92,6	4,6
18	610	72	538	9,7	1,2	93,8	4,8
19	604	63	541	8.4	1,0	94,8	5
20	598	56	542	7,4	0,9	95,7	5,1
21	592	48,5	543	6,5	0,8	96,5	5,2
22	586	42,5	543	5,6	0,7	97,2	5,3
23	579	37	542	5,0	0,6	97,8	6,4
24	572	32,4	540	4,4	0,5	98,3	6,5

La prima colonna della tabella di Bernoulli rappresenta l'età degli individui di una coorte di 1300 individui che si suppongono essere nati tutti al medesimo istante; la seconda colonna contiene il numero $\xi(x)$ di individui della coorte sopravvissuti all'età x; la terza colonna contiene $s(x)$, gli individui che all'anno x di vita non hanno ancora contratto il vaiolo, secondo quanto ottenuto dalla (7.9). La quarta colonna presenta le differenze $\xi(x) - s(x)$ che definiscono il numero di individui che, avendo raggiunto l'età x, hanno già contratto il vaiolo; la quinta colonna indica il numero $I(x)$ di individui di età x che hanno probabilmente contratto il vaiolo nell'anno precedente e andrebbe descritto, secondo l'ipotesi di Bernoulli, come $\frac{s}{8}$. Qui però Bernoulli introdusse una correzione considerando $I(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{s(x)+s(x-1)}{2}\right)$. La sesta colonna indica il numero $M(x) = \frac{I(x)}{8}$ di morti di vaiolo in un anno mentre, nella colonna successiva, $\Sigma(x)$ è la somma dei morti per vaiolo di età non superiore ad x. Infine, nell'ultima colonna sono contati i morti $A(x)$ per cause diverse dal vaiolo. È su questa colonna che occorre basarsi per le rendite vitalizie perché in alcuni contratti non era permesso stipulare una polizza a vantaggio di un giovane che ancora non avesse contratto (e superato) il vaiolo. Bernoulli non procede la tabella oltre $x = 24$ perché ritiene meno affidabili le ipotesi di modello per età più elevate. Per discutere quantitativamente i vantaggi della prevenzione del vaiolo, Bernoulli costruì una ulteriore tabella confrontando la mortalità nello stato naturale—in cui cioè il vaiolo è presente (*état naturel et variolique*)—con quella in un'ipotetica situazione dove il vaiolo è stato debellato (*état non variolique*).

x	$\xi(x)$	$z(x)$	$g(x)$
0	1300	1300	0
1	1000	1017,1	17,1
2	855	881,8	26,8
3	798	833,3	35,3
4	760	802,0	42,0
5	732	779,8	47,8
6	710	762,8	52,8
7	692	749,1	57,2
8	680	740,9	60,9
9	670	734,4	64,4
10	661	728,4	67,4
11	653	722,9	69,9
12	646	718,2	72,2
13	640	741,1	74,1
14	634	709,7	75,7
15	628	705,0	77,0
16	622	700,1	78,1
17	616	695,0	79,0
18	610	689,6	79,6
19	604	684,0	80,0
20	598	678,2	80,2
21	592	672,3	80,3
22	586	666,3	80,3
23	579	659,0	80,0
24	572	651,7	79,7
25	565	644,3	79,3

Le prime due colonne sono rimaste immutate mentre la terza colonna rappresenta la popolazione residua $z(x)$ di età x *se* non vi fosse il vaiolo; Per ottenere gli elementi di questa colonna si parte da $\xi(1) + M(1) = z(1)$ e si osserva che i morti per altre malattie si mantengono in proporzione al numero di individui che compongono la proporzione per cui, se su 1000 individui che nello stato naturale raggiungono il primo anno di vita, ne muoiono 133, partendo da $z(1) = 1017,1$ individui, ne moriranno un numero y tale che

$$\xi(1) : z(1) = 133 : y,$$

cioè $y = 135,2$, che rappresenta il numero di morti nel passaggio dal primo al secondo anno di vita nello stato ideale, senza vaiolo. Pertanto, $z(2) = z(1) - y = 881,8$ ed in modo analogo si costruiscono i valori successivi di $z(x)$. Infine la quarta colonna rappresenta il guadagno $g(x)$ dello stato ideale, senza vaiolo, rispetto allo stato naturale (*gain absolu*) definito semplicemente come $g(x) = z(x) - \xi(x)$ anche se in verità, come Bernoulli discute nel corso della memoria, è il guadagno relativo (*gain relatif*) $\frac{g(x)}{\xi(x)}$ a dare una misura precisa dell'impatto dell'inoculazione sulla mortalità. Ora, mentre il guadagno assoluto può anche diminuire al crescere di x, quello relativo si mantiene crescente, tendendo ad approssimare il valore $\frac{1}{7}$, quando x è sufficientemente grande. Per trovare analiticamente il valore del rapporto $\frac{z(x)}{\xi(x)}$ nel limite di x sufficientemente grandi, Bernoulli osservò che la diminuzione $-\mathrm{d}\xi$ nel tempuscolo $\mathrm{d}x$ della popolazione nello stato naturale ha una componente $\frac{s\mathrm{d}x}{mn}$ dovuta al vaiolo per cui la mortalità complessiva in assenza di vaiolo sarà $-\left(\mathrm{d}\xi + \frac{s\mathrm{d}x}{mn}\right)$. Questa mortalità è però riferita ad una popolazione di $\xi(x)$ individui; per riferirla alla popolazione dello stato senza vaiolo, occorre moltiplicarla per $\frac{z}{\xi}$ ottenendo dunque

$$-\frac{z}{\xi}\left(\mathrm{d}\xi + \frac{s\mathrm{d}x}{mn}\right) = -\mathrm{d}z$$

da cui segue

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{s\mathrm{d}x}{\xi mn}$$

e, sostituendo il valore di $s(x)$ trovato nell'equazione (7.8),

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{\frac{1}{n}\mathrm{d}x}{(m-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + 1}$$

che si riscrive come

$$\mathrm{d}\log z - \mathrm{d}\log\xi = \mathrm{d}\log\frac{z}{\xi} = \mathrm{d}\log \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} - \mathrm{d}\log\left[(m-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + 1\right] = \mathrm{d}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{(m-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + 1}$$

da cui si ottiene, osservando che $z(0) = \xi(0)$,

$$\frac{z}{\xi} = \frac{m\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{(m-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + 1}.$$

Bernoulli conclude che, se si prende un valore sufficientemente grande (*un peu grand*) per x, si ha $\frac{\xi}{z} \simeq \frac{m-1}{m}$ che misura il vantaggio dell'inoculazione. Prendendo $m = 8$ l'assenza di vaiolo offrirebbe ogni anno allo stato ed alla società francese 25 mila persone in più in età utile, cioè superiore ai 16 anni. Tutto questo porta al nucleo del problema: è chiaro che se non ci fosse rischio alcuno nell'inoculazione, non ci sarebbe alcun motivo per non intraprendere una campagna a favore di questa pratica. Il rischio di morte dovuto all'inoculazione, per quanto piccolo, gettava un'ombra di dubbio sulla validità della proposta. La questione viene formalizzata in questi termini da Bernoulli:

> Cosa sarebbe dello stato dell'umanità se, con un certo numero di vittime, gli si potesse procurare l'esenzione dal vaiolo presente in natura?[40] ([3], p. 31)

Se una persona su N muore a seguito dell'inoculazione, occorre modulare i valori di $z(x)$, moltiplicandoli per $\frac{N-1}{N}$: nel caso numerico esaminato in cui $N = 200$, Bernoulli mostra come, per effetto di questi rischi, la vita media si abbassi di un mese e 20 giorni rispetto a quella in assenza di vaiolo ma rimanga ancora molto al di sopra del valore nello stato naturale. Per rincarare la dose, Bernoulli mostrò come N dovesse scendere al valore 9.43 perché non vi fosse differenza di vita media con lo stato naturale, in cui il vaiolo non viene contrastato con azioni specifiche. Anche con un tasso di mortalità per inoculazione così alto, resterebbe un vantaggio a procedere comunque con l'inoculazione perché la mortalità colpirebbe soprattutto i bambini non ancora utili alla società, mentre sopra i 16 anni vi resterebbe un vantaggio rispetto allo stato naturale.

Bernoulli iniziò a leggere la propria memoria sull'inoculazione il 30 aprile del 1760; il 12 novembre di quello stesso anno, D'Alembert lesse la propria risposta in cui metteva a fuoco due problemi: a suo dire il punto di vista corretto da cui partire nei calcoli sul vantaggio dell'inoculazione non era ancora stato toccato in letteratura; inoltre, le difficoltà, forse insormontabili, di ridurre al calcolo il vantaggio dell'inoculazione non costituiscono una buona ragione per non attuarla. D'Alembert svolse il ruolo di avvocato del diavolo a favore dell'inoculazione, cercando i punti deboli nelle motivazioni addotte in suo favore, per fornire argomenti migliori. D'Alembert contestava l'argomento della disparità del rischio corso da chi non si vaccina, a fronte di una bassa mortalità dovuta all'inoculazione, perché si confrontano rischi che agiscono su scale temporali molto diverse: poiché la morte dovuta all'inoculazione si verificava entro qualche giorno, i rischi connessi andrebbero confrontati con quelli di contrarre il vaiolo entro lo stesso intervallo temporale. La differenza più significativa è che, superata positivamente l'inoculazione, non si temerebbe più la malattia, che invece è continuamente temuta da chi non si premunisce [11]. Se nella versione del lavoro [12] letta all'Accademia delle Scienze D'Alembert non fece uso di modelli matematici, negli *Opuscules Mathématiques* si trovano i dettagli matematici del suo modello ([13], [15]) che è più complesso di quello proposto da Bernoulli.

Tra i diversi problemi di indole statistica di cui è intessuto il Capitolo VIII della *Théorie analytique* di Laplace, trovò anche spazio lo studio della mortalità dovuta al vaiolo. Laplace si chiese quale sarebbe stata la durata media della

[40] Quel seroit l'état de l'humanité, si moyennant un certain nombre de victimes on pouvoit lui procurer une exemption de la pétite vérole naturelle?

vita se fosse stato possibile eliminare del tutto una causa di mortalità. I suoi calcoli non sono molto diversi da quelli di Bernoulli e non saranno discussi in questa sede.

Bibliografia

[1] L. Bachelier: *Calcul des probabilités.* Tome I. Gauthier-Villars, Paris, (1912).

[2] D. Bernoulli: Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, **4**, 175-193, (1738).

[3] D. Bernoulli: Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1-45, (1760).

[4] J. Bernoulli: *Ars Conjectandi, opus posthumum*, Basel, (1713).

[5] J. Bertrand: *Calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris, (1889).

[6] É. Borel: *Le Hasard.* Alcan, Paris, (1920).

[7] É. Borel: *Valeur pratique et philosophie des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris, (1952).

[8] G.-L. Leclerc de Buffon. *Essai d'arithmétique morale.* In *Œuvres Complètes de Buffon*, Vol. XV, Didot, Paris, (1829), pp. 338-447.

[9] J.-A.-N. De Caritat, marquis de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions.* Imprimerie Royale, Paris, (1785).

[10] J.-A.-N. De Caritat, marquis de Condorcet. *Élémens de probabilité, et son application aux jeux d'hazard, a la loterie et aux jugemens des hommes.* Royez, Paris, (1805).

[11] J.B. Le Rond D'Alembert: Reflexions sur le calcul des probabilités. In *Opuscules mathématiques.* Tome II. David, Paris, (1761), pp.1-25.

[12] J.B. Le Rond D'Alembert: Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. In *Opuscules mathématiques.* Tome II. David, Paris, (1761), pp. 26-46.

[13] J.B. Le Rond D'Alembert: Notes sur la mémoire précédent. In *Opuscules mathématiques.* Tome II. David, Paris, (1761), pp. 47-95.

[14] J.B. Le Rond D'Alembert: *Opuscules mathématiques.* Tome IV. Brisson, Paris, 1768.

[15] J.B. Le Rond D'Alembert: Sur la durée de la vie. In: *Opuscules mathématiques.* Tome IV. Brisson, Paris, 1768, pp. 92-105.

[16] J.B. Le Rond D'Alembert: Sur le calcul de probabilités. In: *Opuscules mathématiques.* Tome VII. Jombert, Paris, (1780), pp. 39-59.

[17] L. Daston: *Classical probability in the Enlightment.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., (1988).

[18] A. De Moivre: *The Doctrine of Chances: or, a method of calculating the probabilities in events of play.* III Edition. Millar, London, (1766).

[19] P. Dupont: Un joyau dans l'histoire des sciences: le mémoire de Thomas Bayes de 1763. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università Politecnica di Torino*, **37**, 105-138, (1979).

[20] D.A. Gillies: Was Bayes a Bayesian?. *Historia Mathematica*, **14**, 325-346, (1987).

[21] N. Giocoli: The 'true' hypothesis of Daniel Bernoulli: what did the marginalists really know? *History of Economic Ideas*, **6**, 7-43, (1998).

[22] J.M. Keynes: *A treatiseon probability.* Mac Millan & co., London, (1921).

[23] S.-F. Lacroix: *Traité élémentaire du calcul des probabilités.* Courcier, Paris, (1816).

[24] P. S. de Laplace: Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (Savants étrangers)*, **6**, 621-... . In: *Œuvres de Laplace.* Vol. 8, Gauthier-Villars, Paris, (1891), 27-65.

[25] K. Menger: Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre: Betrachtungen im Anschliss an das sogennante Petersburger Spiel. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, **5**, (1934), 459-485.

[26] P. Rémond de Montmort: *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* II Édition. Quillau, Paris, (1713).

[27] T. Simpson: *The nature and laws of Chance.* Cave, St. John's Gate, (1740).

[28] O. Spiess: Die Vorgeschichte des Petersburger Problems. In: *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Band 3. Springer, Basel, (1975), 557-567.