

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
 FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE  
**Prova scritta di Fisica Matematica**  
 22 febbraio 2013

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

La *prova* consta di 4 Quesiti e durerà **2 ore e 30 minuti**. *Non è permesso* consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

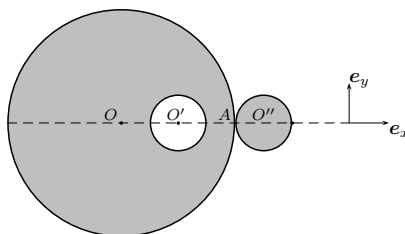
1. Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2, -2, 1), \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 0, 1), \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 1, 3) \end{cases}$$

il risultante, il momento risultante, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale. Trovare inoltre un sistema di vettori applicati, equivalente a quello assegnato e formato da due vettori, di cui uno applicato in  $Q - O \equiv (1, 1, 1)$ .

2. Si consideri, nello spazio tridimensionale, un sistema formato da 3 corpi rigidi liberi, sulla superficie di ciascuno dei quali è libero di muoversi un punto materiale e da 2 corpi rigidi liberi di ruotare attorno ad un loro punto fisso, sulla superficie di ciascuno dei quali sono liberi di muoversi due punti materiali. Quanti sono i gradi di libertà totali del sistema?

3. Un corpo rigido piano è formato da due dischi. Dal primo, di centro  $O$ , massa  $m$  e raggio  $R$  viene asportato un disco di raggio  $R/4$  centrato nel punto  $O'$  tale che  $O' - O = \frac{R}{2}\mathbf{e}_x$ . L'altro disco ha centro  $O''$ , raggio  $R/4$  e massa  $2m$  è tangente esternamente in  $A$  al primo disco e disposto in modo che sia  $O' - O''$  parallelo ad  $\mathbf{e}_x$ .



1. determinare il momento centrale di inerzia per il corpo rigido nella direzione  $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y)$ ;
2. determinare il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse passante per  $A$  e diretto lungo  $\mathbf{e}_x$ .

4. In un piano verticale un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare su una guida fissa rettilinea. Nel centro del disco è incernierato l'estremo  $A$  di un'asta omogenea  $AB$  di lunghezza  $2R$  e massa  $2m$ . Il centro del disco è soggetto a due forze elastiche ideali che lo attraggono verso due punti fissi  $O$  e  $Q$ , posti alla stessa quota di  $A$  e distanti tra loro  $4R$ . La molla che attrae  $A$  verso  $O$  ha costante elastica  $\frac{mg}{R}$ , quella che attrae  $A$  verso  $Q$  ha costante elastica  $4\frac{mg}{R}$ . Introdotta le coordinate  $x$  e  $\vartheta$  indicate in figura determinare: l'espressione dell'energia cinetica totale  $T$  del sistema; l'espressione dell'energia potenziale totale  $V$  del sistema; scrivere le equazioni di Lagrange e, supponendo che all'istante  $t = 0$  il sistema parta dalla quiete con  $x(0) = 2R$  e  $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ , determinare il valore di  $\ddot{x}(0)$  e  $\ddot{\vartheta}(0)$ .

