

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE  
**Prova scritta di Fisica Matematica**  
11 settembre 2018

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

La *prova* consta di **3** Quesiti e durerà **2 ore e 30 minuti**. *Non è permesso* consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

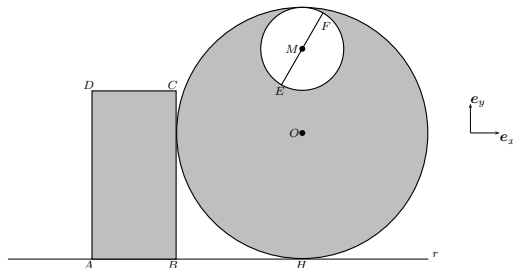
1. Assegnato il sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 3\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1, 4, -1), \\ \mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2, -2, 1), \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (3, 1, -2) \end{cases}$$

determinarne

risultante (**1** punto); momento risultante rispetto ad  $O$  (**3** punti); il trinomio invariante (**1** punto); l'equazione dell'asse centrale (**2** punti).

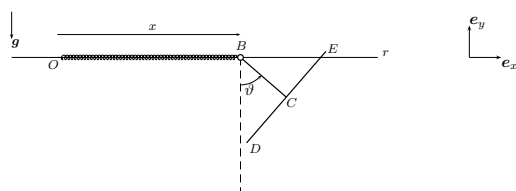
2. Un corpo rigido è formato da un rettangolo omogeneo  $ABCD$  di lati  $AB = 2R$ ,  $BC = 4R$  e massa  $m$ ; da un disco di centro  $O$ , massa  $2m$  e raggio  $3R$  da cui viene asportato un altro disco di centro  $M$  e raggio  $R$ , con  $M$  sulla verticale passante per  $O$ , con  $OM = 2R$ ; da un' asta  $EF$ , inclinata di  $\frac{\pi}{3}$  sull'orizzontale, di massa  $3m$  e lunghezza  $2R$ , con il punto medio coincidente con  $M$ . Il disco centrato in  $O$  ed il rettangolo sono tangenti entrambi ad una stessa retta orizzontale  $r$  e tangenti tra loro. All'istante  $t = 0$  il corpo



occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di  $A$  è  $\mathbf{v}_A = v_0(\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y)$  mentre quella di  $C$  è  $\mathbf{v}_C = v_0(-3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y)$ , dove  $v_0$  è una velocità caratteristica. Determinare

1. la velocità angolare  $\omega(0)$  del corpo all'istante  $t = 0$  (**2** punti).
2. la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante  $t = 0$  rispetto al punto  $A$ , per via analitica (**2** punti).
3. il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per il punto di contatto  $H$  tra  $r$  ed il disco di centro  $O$  ed inclinato di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto all'orizzontale, specificando i contributi del rettangolo, del disco forato e dell'asta (**9** punti).

**3.** In un piano verticale, un'asta formata da due bracci  $BC$  e  $DE$  saldati tra loro ortogonalmente con  $C$  nel punto medio di  $DE$ , ha l'estremo  $B$  mobile su una guida orizzontale  $r$  e può ruotare attorno all'asse passante per  $B$ , ortogonale al piano. Il braccio  $BC$  ha lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$  mentre  $DE$  ha lunghezza  $4\ell$  e massa  $2m$ . Il punto  $B$  è attratto da una molla di costante elastica  $\frac{2mg}{\ell}$  e lunghezza a riposo  $\ell$  verso un punto fisso  $O$  di  $r$ . Introdotte le coordinate  $\vartheta$  ed  $x$  indicate in figura determinare: l'espressione dell'energia



cinetica  $T$  del sistema (**4** punti); l'espressione dell'energia potenziale  $V$  del sistema (**2** punti); le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile (**4** punti).