Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
9 settembre 2011

1. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + 4\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{M} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_z + 5\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y$, calcolare $(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x$.

Ricordandosi dell'identità $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d})$ si può mostrare che

$$\boldsymbol{LM} = 15\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z$$

e

$$\boldsymbol{ML} = 9\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + 15\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$$

per cui

$$\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML} = 6\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z - 8\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - 15\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$$

e quindi

$$(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x = (12\boldsymbol{e}_z - 14\boldsymbol{e}_x) \cdot \boldsymbol{e}_x = -14.$$

2. *Trovare la curvatura della curva*

$$p(t) - O = \frac{4}{t^2+1}\boldsymbol{e}_x + 2\mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 3\sinh t\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Con calcoli diretti si ricava

$$\dot{p}(t) = -8\frac{t}{(1+t^2)^2}\boldsymbol{e}_x + 2\mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 3\cosh t\boldsymbol{e}_z,$$

e

$$\ddot{p}(t) = \left(-\frac{8}{(1+t^2)^2} + \frac{32t^2}{(1+t^2)^3}\right)\boldsymbol{e}_x + 2\mathrm{e}^t\boldsymbol{e}_y + 3\sinh t\boldsymbol{e}_z,$$

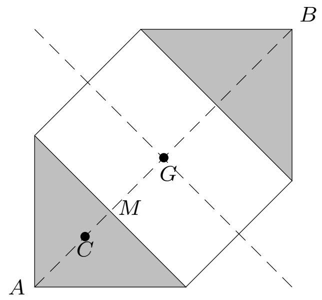
e quindi in $t = 0$ si ha

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z \qquad \text{e} \qquad \ddot{p}(0) = -8\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$\kappa(0) = \frac{2\sqrt{217}}{13\sqrt{13}}.$$

3. *Un corpo rigido piano è formato da due triangoli rettangoli isosceli, ciascuno di massa $3m$ e cateto di lunghezza ℓ, disposti in modo da avere le mediane relative alle ipotenuse poste sulla stessa retta. Agli estremi delle ipotenuse sono saldate due aste, ciascuna di massa $5m$ e lunghezza ℓ, ortogonali alle ipotenuse.*



Determinare il rapporto ϱ tra i momenti centrali di inerzia del corpo totale rispetto alla direzione di AB e a quella ortogonale ad AB, posta nel piano della figura.

In figura abbiamo indicato la direzione ortogonale ad AB e passante per il centro di massa G dell'intero sistema, che coincide col punto medio di AB. Il momento centrale di inerzia lungo la direzione $\boldsymbol{e}_1$ di AB si ottiene osservando che, traslando uno dei triangoli lungo $\boldsymbol{e}_1$ fino a portarne l'ipotenusa a contatto con quella dell'altro triangolo, non si altera il momento di inerzia del sistema dei due triangoli lungo questa direzione che diventa però in questo modo uguale a quello di un quadrato di massa $6m$ e lato pari ad ℓ e pertanto vale $\frac{m}{2}\ell^2$. Inoltre, le due aste danno ciascuna un contributo $\frac{5}{2}m\ell^2$, come si ottiene applicando loro il teorema di Huygens-Steiner. Pertanto il momento $I_{G,\boldsymbol{e}_1}$ del sistema lungo $\boldsymbol{e}_1$ è $I_{G,\boldsymbol{e}_1} = \frac{11}{2}m\ell^2$. Passando alla direzione centrale $\boldsymbol{e}_2$, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$, il contributo di ogni asta è $\frac{5}{12}m\ell^2$ mentre i due triangoli danno lo stesso contributo. Per calcolarlo indichiamo con $\mathcal{T}$ il triangolo di vertice A ed introduciamo il punto medio M dell'ipotenusa, nonché il centro di massa C di $\mathcal{T}$. Ricordiamo dalla geometria elementare che $CM = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Poiché il momento centrale di inerzia per un triangolo non è tabulato, applichiamo due volte il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{G,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) = I_{C,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) + 3m|CG|^2$$

e

$$I_{M,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) = I_{C,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) + 3m|CM|^2$$

Poiché $I_{M,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T})$ è la metà del momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{e}_2$ di un quadrato di lato pari ad ℓ e massa $6m$, abbiamo

$$I_{M,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) = \frac{m}{4}\ell^2$$

e quindi, siccome $CG = \ell\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$, concludiamo che

$$I_{G,\boldsymbol{e}_2}(\mathcal{T}) = \frac{m}{4}\ell^2 + 3m\ell^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = m\ell^2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

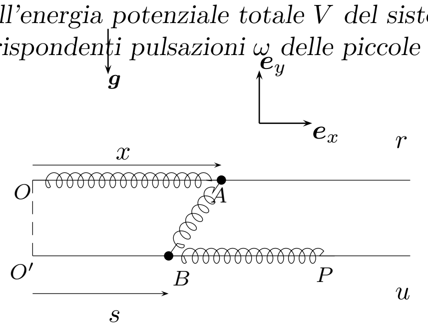
per cui, sommando i vari contributi, il momento centrale di inerzia per l'intero sistema lungo $\boldsymbol{e}_2$ vale

$$I_{G,\boldsymbol{e}_2} = m\ell^2\left(\frac{5}{6} + 2 + \sqrt{2}\right) = m\ell^2\frac{1}{6}(17 + 6\sqrt{2})$$

e dunque

$$\varrho = \frac{33}{17 + 6\sqrt{2}}.$$

4. *In un piano verticale due punti materiali A e B di masse m e $3m$, rispettivamente, sono mobili su due rette parallele r ed u, dirette lungo $\boldsymbol{e}_x$, distanti h tra loro. Il punto A è attratto verso un punto O di r da una molla ideale di costante elastica k e verso B da un'altra molla di costante elastica $2k$; il punto B è poi attratto da una molla ideale di costante k verso un punto P di u, con P distante 2ℓ dalla proiezione O' di O su s. Introdotte le coordinate x e s indicate in Figura determinare l'espressione dell'energia cinetica totale T del sistema; l'espressione dell'energia potenziale totale V del sistema; i valori di x ed s nella configurazione di equilibrio stabile e le corrispondenti pulsazioni ω delle piccole oscillazioni.*



L'energia cinetica dei due punti materiali è

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{3}{2}m\dot{s}^2$$

mentre, considerando rispettivamente le molle OA, AB e BP, l'energia potenziale è

$$V = \frac{k}{2}x^2 + k(x-s)^2 + \frac{k}{2}(2\ell - s)^2 = \frac{3}{2}kx^2 + \frac{3}{2}ks^2 - 2k\ell s - 2kxs.$$

Derivando rispetto alle coordinate lagrangiane scelte si hanno le condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} V_{,x} = 3kx - 2ks = 0 \\ \\ V_{,s} = 3ks - 2k\ell - 2kx = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene come sola configurazione di equilibrio quella caratterizzata da

$$x_e = \frac{4}{5}\ell \qquad s_e = \frac{6}{5}\ell.$$

La matrice hessiana di V in questa configurazione è

$$B = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ 2k & 3k \end{pmatrix}$$

ed è definita positiva per cui la configurazione di equilibrioè stabile grazie al teorema di Dirichlet-Lagrange. La forma quadratica A associata all'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix}$$

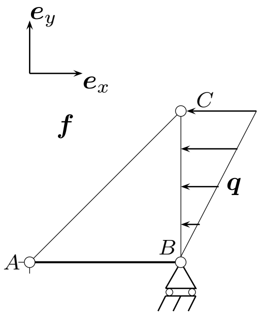
e dunque la condizione $\det(\lambda A - B) = 0$ diventa

$$3\lambda^2 m^2 - 12km\lambda + 5k^2 = 0$$

che ha per radici$\lambda_\pm = \frac{k}{m}\left(\frac{12\pm 2\sqrt{21}}{6}\right)$ da cui si ottengono le espressioni

$$\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{21}}.$$

5. *La struttura articolata piana in Figura è formata da tre aste: AB, di lunghezza ℓ e peso specifico lineare uniforme $2p$; BC, di lunghezza ℓ, peso trascurabile, su cui agisce un carico avente densità lineare $\boldsymbol{q} = -\frac{6p}{\ell} y \boldsymbol{e}_x$, dove y è la quota del generico punto di BC rispetto a B; CA, di lunghezza $\ell\sqrt{2}$ e peso trascurabile. La struttura è vincolata a terra in A da una cerniera cilindrica ed in B da un appoggio bilatero; una cerniera interna collega AC e BC. Calcolare, in condizioni di equilibrio, la reazione vincolare in B; le componenti della reazione vincolare in A lungo $\boldsymbol{e}_x$ e lungo $\boldsymbol{e}_y$; il modulo dello sforzo di taglio nel punto medio di BC.*



Il carico distribuito con legge lineare su BC ha come risultante il vettore

$$\boldsymbol{R} = \int_0^\ell \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}y = -3p\ell\boldsymbol{e}_x$$

applicato nel punto P dell'asta posto a distanza $\frac{2}{3}\ell$ dall'estremo B. La reazione a terra in B è del tipo $\boldsymbol{\Phi}_B = \phi_B \boldsymbol{e}_y$, visto che si tratta di un carrello bilatero. Richiediamo l'equilibrio dei momenti per l'intera struttura rispetto al polo A, rispetto al quale generano momento il peso di AB, il vettore $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{\Phi}_B$: nello specifico si ha

$$-p\ell^2 + 3p\ell \cdot \frac{2}{3}\ell + \Phi_B\ell = 0$$

da cui si ottiene

$$\boldsymbol{\Phi}_B = -p\ell\boldsymbol{e}_y.$$

Chiedendo ora l'equilibrio delle forze lungo $\boldsymbol{e}_x$ e lungo $\boldsymbol{e}_y$ per l'intera struttura si ottiene

$$\boldsymbol{\Phi}_A = 3(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)p\ell.$$

Qualche attenzione in più richiede il calcolo dello sforzo di taglio nel punto medio M di BC. Spezziamo l'asta in M ed isoliamo il tratto MB su cui agisce la porzione di carico compresa tra B ed M, di risultante

$$\boldsymbol{R}_1 = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \boldsymbol{q e}_y = -\frac{3}{4} p\ell \boldsymbol{e}_x,$$

la reazione a terra $\boldsymbol{\Phi}_B$ e quella $\boldsymbol{\Phi}_{AB}$ che AB esplica in B su BC. Per i nostri scopi è sufficiente determinarne la componente Φ_{ABx} lungo $\boldsymbol{e}_x$. Per questo, torniamo all'intera asta BC e richiediamo che i momenti rispetto a C siano equilibrati, il che equivale ad imporre

$$\Phi_{ABx}\ell - 3p\ell\frac{\ell}{3} = 0$$

da cui segue subito $\Phi_{ABx} = p\ell$. Detto $T_\perp \boldsymbol{e}_x$ lo sforzo di taglio in M, l'equazione cui deve obbedire è

$$T_\perp + \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{e}_x + \Phi_{ABx} = 0$$

da cui si ricava $T_\perp = -\frac{1}{4}p\ell$ che ha per modulo $\frac{1}{4}p\ell$.