Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
30 giugno 2011

1 *Determinare il trinomio invariante del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,-1,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2,0,3), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (3,-1,2). \end{cases}$$

Il risultante è $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_z$ mentre il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -10\boldsymbol{e}_x - 12\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante ha valore $\mathcal{I} = 8$.

2. *Trovare la torsione della curva*

$$p(t) - O = (t^2 - \frac{1}{2}t + 1)\boldsymbol{e}_x + (t^2 - 3t - 3)\boldsymbol{e}_y + (t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5)\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Derivando ripetutamente rispetto al parametro t abbiamo

$$p'(t) = (2t - \frac{1}{2})\boldsymbol{e}_x + (2t - 3)\boldsymbol{e}_y + (3t^2 - t)\boldsymbol{e}_z \qquad p''(t) = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + (6t - 1)\boldsymbol{e}_z \qquad p'''(t) = 6\boldsymbol{e}_z$$

per cui, posto $t = 0$, si ha

$$p'(0) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y \qquad p''(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z \qquad p'''(0) = 6\boldsymbol{e}_z$$

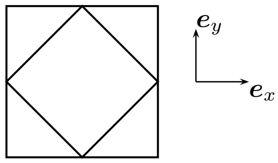
e dunque $p'(0) \wedge p''(0) = 3\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z$, da cui si ottiene

$$\tau = -\frac{120}{137}.$$

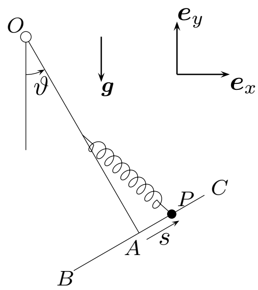
3. *Un telaio quadrato è formato da quattro aste, ciascuna di massa $3m$ e lunghezza ℓ. Un secondo telaio quadrato è formato da altre quattro aste, ciascuna di massa $4m$, disposte in modo da congiungere i punti medi delle aste del primo telaio. Trovare il momento centrale di inerzia per il sistema dei due telai nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.*

Il centro di massa dell'intera figura coincide con quello di entrambi i telai. Ciascuna delle due aste verticali del telaio esterno contribuisce al momento di inerzia con un termine $\frac{3}{4}m\ell^2$ mentre le due aste orizzontali contribuiscono ciascuna con il termine $\frac{1}{4}m\ell^2$. Per simmetria, tutte le aste del telaio interno danno lo stesso contributo $\frac{1}{3}m\ell^2$ in quanto inclinate di $\pm\frac{\pi}{4}$ rispetto alla direzione $\boldsymbol{e}_y$ e di lunghezza $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto il momento centrale richiesto è

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y} = \frac{10}{3}m\ell^2.$$



4. *In un piano verticale, un'asta sagomata a forma di T è formata da due bracci: OA di lunghezza ℓ e massa $2m$, e BC di lunghezza 2ℓ e massa m, saldato ortogonalmente nel suo punto medio ad OA in A. L'asta è libera di ruotare senza attrito attorno all' asse passante per il punto fisso O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{e}_y$. Sull'intero segmento BC è libero di muoversi un punto materiale P di massa $m/2$, attratto da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ verso il punto medio di OA. Introdotte le coordinate ϑ ed s indicate in figura, determinare: l'espressione dell'energia cinetica totale T del sistema; l'espressione dell'energia potenziale totale V del sistema; le pulsazioni ω delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile in cui OA è verticale.*



L'asta a forma di T forma un unico corpo rigido dotato di punto O fisso e ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. L'energia cinetica dell'asta è dunque $\frac{1}{2}I\omega^2$ dove I è il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione che, applicando il teorema di Huygens-Steiner, è pari a $I = 2m\ell^2$ da cui segue che il contributo all'energia cinetica è $m\ell^2\dot{\vartheta}^2$. Quanto al contributo di P, conviene utilizzare le formule di Poisson adoperando i versori $\boldsymbol{e}_r$ e $\boldsymbol{e}_\vartheta$ solidali all'asta e diretti, rispettivamente come $A-O$ e come $C-A$ in modo che $\boldsymbol{e}_r \wedge \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_z$. In questa base mobile

$$P - O = \ell\boldsymbol{e}_r + s\boldsymbol{e}_\vartheta$$

per cui, siccome $\dot{\boldsymbol{e}_r} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta$ e $\dot{\boldsymbol{e}_\vartheta} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_r$, concludiamo che

$$\boldsymbol{v}_P = -s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_r + (\ell\dot{\vartheta} + \dot{s})\boldsymbol{e}_\vartheta$$

e dunque il contributo di P all'energia cinetica è $T_P = \frac{1}{4}m[s^2\dot{\vartheta}^2 + (\ell\dot{\vartheta} + \dot{s})^2]$ per cui, in definitiva, l'energia cinetica del sistema è

$$T = m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{4}[s^2\dot{\vartheta}^2 + (\ell\dot{\vartheta} + \dot{s})^2].$$

Per l'energia potenziale, occorre considerare i contributi della forza peso di OA ($-mg\ell\cos\vartheta$), di BC ($-mg\ell\cos\vartheta$) e di P ($\frac{1}{2}mg(-\ell\cos\vartheta + s\sin\vartheta)$) e della forza elastica ($\frac{mg}{2\ell}s^2$) per avere

$$V = -\frac{5}{2}mg\ell\cos\vartheta + \frac{1}{2}mgs\sin\vartheta + \frac{mg}{2\ell}s^2.$$

Le configurazioni di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} V_{,s} = \frac{mg}{\ell}s + \frac{1}{2}mg\sin\vartheta = 0 \\ \\ V_{,\vartheta} = \frac{5}{2}mg\ell\sin\vartheta + \frac{1}{2}mgs\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

e la configurazione in cui $\vartheta = 0$ ed $s = 0$ è di equilibrio. La forma hessiana associata a V è ottenuta calcolando le derivate seconde

$$\begin{cases} V_{,ss} = \frac{mg}{\ell} \\ \\ V_{,s\vartheta} = \frac{1}{2}mg\cos\vartheta \\ \\ V_{,\vartheta\vartheta} = \frac{5}{2}mg\ell\cos\vartheta - \frac{1}{2}mgs\sin\vartheta \end{cases}$$

che, nella configurazione di equilibrio prescelta dà luogo alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} & \frac{1}{2}mg \\ \frac{1}{2}mg & \frac{5}{2}mg\ell \end{pmatrix}$$

che si verifica essere definita positiva: la configurazione $\vartheta = 0$, $s = 0$ è dunque stabile nel senso di Ljapunov. Al contrario, la configurazione di equilibrio $\vartheta = \pi$ e $s = 0$ ha una hessiana

$$B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} & -\frac{1}{2}mg \\ -\frac{1}{2}mg & -\frac{5}{2}mg\ell \end{pmatrix}$$

che ha autovalori di segno opposto, per cui V ha un punto di sella che rende questa configurazione instabile. La forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} & \frac{1}{2}m\ell \\ \frac{1}{2}m\ell & \frac{5}{2}m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

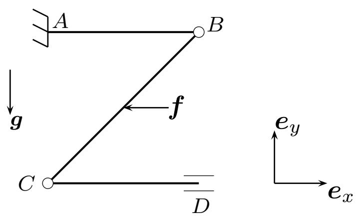
La diagonalizzazione simultanea di queste forme quadratiche conduce all'equazione di secondo grado $\det(\lambda A - B) = 0$ che, sviluppata, equivale a

$$\lambda^2 - \frac{13}{4}\frac{g}{\ell}\lambda + \frac{9}{4}\frac{g^2}{\ell^2} = 0$$

che ha come radici $\lambda_1 = \frac{9}{4}\frac{g}{\ell}$ e $\lambda_2 = \frac{g}{\ell}$ da cui si ottengono per le pulsazioni delle piccole oscillazioni i valori

$$\omega_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

5.*La struttura articolata in figura è formata da tre aste: AB, di peso $4p$ e lunghezza ℓ, BC di peso $3p$ e lunghezza $\ell\sqrt{2}$ e CD, di peso $2p$ e lunghezza ℓ. Nei nodi B e C vi sono cerniere cilindriche mentre la struttura è vincolata a terra in A da un incastro completo ed in D da un manicotto e le coppie di punti A, C e B, D sono su verticali parallele. Infine il carico $\boldsymbol{f} = -5p\boldsymbol{e}_x$ agisce nel punto medio di CB. Calcolare le componenti lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$ della reazione vincolare in A; calcolare la coppia reattiva $\psi\boldsymbol{e}_z$ sviluppata dall'incastro in A; calcolare il modulo del momento flettente nel punto medio di CD.*



Consideriamo la sola asta CD. La reazione di cerniera in C può avere solo componente lungo $\boldsymbol{e}_y$, visto il manicotto in D ed il carico verticale. Pertanto, isolata BC, su di essa in C agirà una forza verticale, $\phi_C \boldsymbol{e}_y$. Dall'equilibrio dei momenti per BC rispetto al polo B segue

$$\boldsymbol{\Phi}_C = -p\boldsymbol{e}_y.$$

Sempre restando su BC, l'equilibrio delle forze lungo la verticale richiede che la componente verticale della reazione di cerniera in B sia $\phi_{By} = 4p$ che, cambiata di segno, dà la sollecitazione verticale cui è sottoposta AB in B; l'equilibrio lungo la verticale delle forze agenti su AB richiede allora che $\phi_{Ay} = 8p$. Con un ragionamento simile, imponendo però i bilanci delle forze lungo $\boldsymbol{e}_x$ concludiamo che $\phi_{Ax} = 5p$ per cui la reazione in A vale $\boldsymbol{\Phi} = p(5\boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_y)$. L'equilibrio dei momenti per AB, rispetto ad A, permette di mostrare che la coppia reattiva esplicata in A dall'incastro vale $6p\ell\boldsymbol{e}_z$. Se torniamo ora all'asta CD, da quanto abbiamo visto concludiamo che in C essa risente della forza $p\boldsymbol{e}_y$; spezzata l'asta nel suo punto medio e richiedendo l'equilibrio dei momenti rispetto a quel punto si ottiene il valore $\frac{p\ell}{4}$ per il modulo del momento flettente agente in M.