Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
Esame di Meccanica Razionale
30 gennaio 2012

1. *Dati i tensori:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = 3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + 3\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$, determinare il valore di $(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x$.

Occorre ripetutamente applicare la regola $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d}$ per ottenere

$$\boldsymbol{LM} = -3\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + 6\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z$$

e

$$\boldsymbol{ML} = 6\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_z + 12\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_x$$

da cui segue

$$(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x = 36.$$

2. *Trovare la curvatura della curva*

$$p(t) - O = \mathrm{e}^t \boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^{3t^2} \boldsymbol{e}_y + \mathrm{e}^{-2t} \boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Derivando rispetto al parametro t due volte, otteniamo

$$\dot{p}(t) = \mathrm{e}^t \boldsymbol{e}_x + 6t\mathrm{e}^{3t^2} \boldsymbol{e}_y - 2\mathrm{e}^{-2t} \boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p}(t) = \mathrm{e}^t \boldsymbol{e}_x + (6 + 36t^2)\mathrm{e}^{3t^2} \boldsymbol{e}_y + 4\mathrm{e}^{-2t} \boldsymbol{e}_z.$$

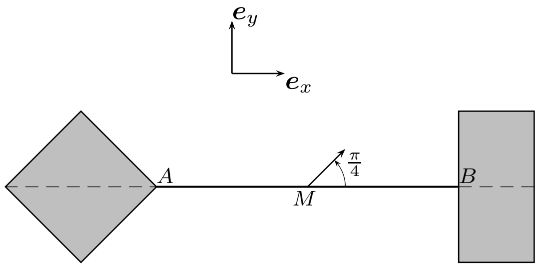
da cui si ricava, per sostituzione diretta,

$$\dot{p}(0) = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_z \qquad \text{e} \qquad \ddot{p}(0) = \boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z :$$

usando la definizione di curvatura, si ha

$$\kappa = \frac{6\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}.$$

3. *Un corpo rigido piano è formato da un'asta AB di lunghezza 16ℓ e massa $m/2$, da un quadrato di massa m e lato $4\ell\sqrt{2}$ e da un un rettangolo di massa $m/4$ e lati 4ℓ e 8ℓ disposti come in Figura, con un vertice del*



quadrato saldato in A ed una sua diagonale sul prolungamento di AB e con il lato maggiore del rettangolo ortogonale ad AB e punto medio coincidente con B. Determinare per il sistema il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto medio di AB, nella direzione $\boldsymbol{n}$ inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto ad AB.

Calcoliamo separatamente i contributi dell'asta, del rettangolo e del quadrato al momento di inerzia richiesto. Per quanto riguarda l'asta, indicato con M il suo punto medio, poiché $\boldsymbol{n}$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asta stessa, abbiamo

$$I^{(AB)}_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{1}{12}\frac{m}{2}256\ell^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{16}{3}m\ell^2.$$

Per il rettangolo, osserviamo anzitutto che il suo centro di massa dista 10ℓ dal punto medio dell'asta per cui i due assi paralleli ad $\boldsymbol{n}$, uno passante per il centro di massa del rettangolo, l'altro per M, distano $d = 5\sqrt{2}\ell$. Dai dati del problema sappiamo che il tensore centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}^{(R)} = \frac{m\ell^2}{3}\left[4\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z\right]$$

per cui, essendo $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$, abbiamo che il momento centrale di inerzia del rettangolo lungo $\boldsymbol{n}$ vale $\frac{5}{6}m\ell^2$ e dunque, grazie al teorema di Huygens-Steiner, il contributo al momento richiesto è

$$I^{(R)}_{M,\boldsymbol{n}} = m\ell^2\left(\frac{5}{6} + \frac{25}{2}\right) = \frac{40}{3}m\ell^2.$$

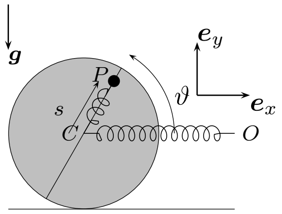
Siccome il momento centrale di inerzia del quadrato rispetto ad una direzione, come è $\boldsymbol{n}$, giacente nel suo piano di appartenenza è $\frac{8m\ell^2}{3}$, mentre la distanza dei due assi paralleli ad $\boldsymbol{n}$, uno passante per M, l'altro per il centro di massa del quadrato, è $d = 6\sqrt{2}\ell$, abbiamo

$$I^{(Q)}_{M,\boldsymbol{n}} = m\ell^2\left(\frac{8}{3} + 72\right) = \frac{224}{3}m\ell^2 :$$

sommando i tre contributi ottenuti otteniamo

$$I_{M,\boldsymbol{n}} = \frac{280}{3}m\ell^2.$$

4.*In un piano verticale, un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale ed ha il centro C attratto verso un punto O fisso ed alla sua stessa quota da una molla ideale di costante elastica mg/R. Lungo un diametro AB del disco è mobile un punto materiale P di massa $2m$ attratto verso C da una molla ideale di costante elastica $3mg/R$. Introdotte le coordinate s e ϑ indicate in figura e supponendo che $\vartheta = 0$ quando C è sovrapposto ad O, determinare l'espressione dell'energia cinetica*



totale T, dell'energia potenziale totale V del sistema ed il valore di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{s}(0)$ se all'istante iniziale il sistema parte in quiete dalla configurazione $\vartheta(0) = 0$, $s(0) = \frac{R}{2}$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$ $\dot{s}(0) = 0$.

Il legame tra s e ϑ presentato nel testo impone che sia $|C - O| = R\vartheta$. Grazie al vincolo di puro rotolamento, l'energia cinetica del disco si riduce a $\frac{3}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2$, dove abbiamo osservato che, grazie al teorema di Huygens-Steiner il momento di inerzia del disco rispetto al punto di contatto con il terreno è $\frac{3}{2}mR^2$. Il contributo del punto P si ottiene scrivendo

$$P - O = -R\vartheta\boldsymbol{e}_x + s\boldsymbol{e}_1$$

dove $\boldsymbol{e}_1 = \frac{P-C}{|P-C|}$. Se $\boldsymbol{e}_2$ è un altro versore solidale alla lamina, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson, otteniamo

$$\boldsymbol{v}_P = -R\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x + \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e quindi

$$T_p = mv_P^2 = m[R^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\vartheta}\dot{s}\cos\vartheta + 2sR\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta,$$

siccome $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_1 = \cos\vartheta$ e $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta) = -\sin\vartheta$. L'energia cinetica complessiva è allora

$$T = \frac{7}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + m[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\vartheta}\dot{s}\cos\vartheta + 2sR\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta].$$

Per il calcolo dell'energia potenziale, osserviamo che essa consta di tre termini non costanti: $2mgs\sin\vartheta$ relativo alla forza peso agente su P, $\frac{3mg}{2R}s^2$, corrispondente alla molla PC e $\frac{mg}{2R}|C - O|^2 = \frac{1}{2}mgR\vartheta^2$, relativo alla molla CO. In definitiva

$$V = 2mgs\sin\vartheta + \frac{3mg}{2R}s^2 + \frac{1}{2}mgR\vartheta^2.$$

Per rispondere all'ultimo quesito, scriviamo le equazioni di Lagrange, a partire dalla Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{7}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 + m[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{\vartheta}\dot{s}\cos\vartheta + 2sR\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta] - 2mgs\sin\vartheta - \frac{3mg}{2R}s^2 - \frac{1}{2}mgR\vartheta^2.$$

Abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(2m\dot{s} - 2mR\dot{\vartheta}\cos\vartheta\Big) = 2m[\ddot{s} - R\ddot{\vartheta}\cos\vartheta + R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta],$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 2m[s\dot{\vartheta}^2 + R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta - g\sin\vartheta] - \frac{3mg}{R}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\tfrac{7}{2}mR^2\dot{\vartheta} + 2m(s^2\dot{\vartheta} - R\dot{s}\cos\vartheta + 2Rs\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\Big] =$$

$$\tfrac{7}{2}mR^2\ddot{\vartheta} + 2m[2s\dot{s}\dot{\vartheta} + s^2\ddot{\vartheta} - R\ddot{s}\cos\vartheta + R\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 2R(\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + s\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta)]$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2m[R\dot{s}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + Rs\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - 2mgs\cos\vartheta - \frac{1}{2}gR\vartheta]$$

da cui si possono scrivere le equazioni di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial s}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta}.$$

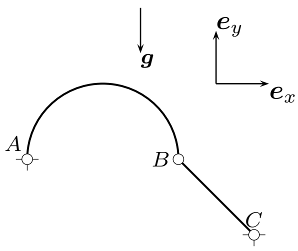
Se ora inseriamo le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{s}(0) - R\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3}{4}g \\ \\ -2\ddot{s}(0) + 4R\ddot{\vartheta}(0) = -g \end{cases}$$

e quindi, risolvendo,

$$\ddot{s}(0) = -2g \qquad \ddot{\vartheta}(0) = -\frac{5}{4}\frac{g}{R}.$$

5. *La struttura articolata in figura è formata da due aste omogenee: AB, semicircolare, di massa m e raggio 2ℓ e BC, rettilinea, di massa $3m$, lunghezza $2\ell\sqrt{2}$. La struttura è vincolata a terra da due cerniere cilindriche in A e C ed in B vi è un'ulteriore cerniera cilindrica interna. Se A e B sono alla stessa quota e BC è inclinata di $\pi/4$ sull'orizzontale, determinare le componenti lungo $\boldsymbol{e}_y$ ed $\boldsymbol{e}_x$ della reazione vincolare in A; la componente della reazione vincolare in C lungo $\boldsymbol{e}_y$; il modulo del momento flettente alla sommità dell'arco AB;*



Isoliamo l'asta AB e richiediamo l'equilibrio dei momenti rispetto al polo B, cosicché l'unica reazione vincolare a contribuire è $\Phi_{Ay}\boldsymbol{e}_y$ che soddisfa l'equazione

$$4\Phi_{Ay}\ell - 2mg\ell = 0.$$

per cui $\Phi_{Ay} = \frac{1}{2}mg$. Ora che conosciamo Φ_{Ay}, per trovare Φ_{Ax} possiamo imporre l'equilibrio dei momenti per l'*intera* struttura rispetto al polo C, ottenendo

$$-3mg\ell - 2\Phi_{Ax}\ell + 4mg\ell + 3mg\ell = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \Phi_{Ax} = 2mg$$

e quindi, in definitiva,

$$\boldsymbol{\Phi}_A = mg(2\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y).$$

Per trovare Φ_{Cy} è sufficiente chiedere l'equilibrio nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ delle forze agenti sul sistema, ricavando

$$\Phi_{Cy} - 4mg + \frac{1}{2}mg = 0,$$

ovvero $\Phi_{Cy} = \frac{7}{2}mg$.

Detta M la sommità di AB, sull'asta AM agiscono la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_A$, il peso $-\frac{1}{2}mg\boldsymbol{e}_y$, pari a metà del peso di AB ed applicato in un punto sulla bisettrice del settore AB, distante $4\ell/\pi$ da AB e dalla verticale per M, per il teorema di Pappo-Guldino. Abbiamo dunque, chiedendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad M

$$4mg\ell - mg\ell + 2mg\frac{\ell}{\pi} + M_f = 0$$

in cui i primi due contributi sono dovuti alle componenti di $\boldsymbol{\Phi}_A$ lungo $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$, rispettivamente. Dunque

$$|M_f| = \left(3 + \frac{2}{\pi}\right) mg\ell.$$