Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
24 febbraio 2011

Trovare l'intersezione con il piano $x = 0$ dell'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (0, 2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, -1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (-1, 2, 2). \end{cases}$$

Il risultante è $\boldsymbol{R} = -3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ mentre il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{e}_x - 10\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z$ per cui $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 30\boldsymbol{e}_x + 17\boldsymbol{e}_y + 28\boldsymbol{e}_z$ cosicché l'equazione in forma parametrica dell'asse centrale è

$$\begin{cases} x = \frac{30}{17} - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \frac{28}{17} + 2\lambda. \end{cases}$$

Il valore di λ corrispondente al punto cercato si ottiene ponendo $x = 0$ nell'equazione dell'asse centrale ricavando così $\lambda = \frac{10}{17}$ che, sostituito nelle equazioni restanti, fornisce le coordinate

$$y = \frac{37}{17} \qquad z = \frac{48}{17}$$

del punto di intersezione tra l'asse centrale ed il piano $x = 0$.

2. *Trovare la torsione della curva*

$$p(t) - O = \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{e}_x + \cosh 4t\boldsymbol{e}_y + 3t^3\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Derivando ripetutamente rispetto al parametro t abbiamo

$$p'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{e}_x + 4\sinh 4t\boldsymbol{e}_y + 9t^2\boldsymbol{e}_z \qquad p''(t) = 4\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{e}_x + 16\cosh 4t\boldsymbol{e}_y + 18t\boldsymbol{e}_z \qquad p'''(t) = 8\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{e}_x + 64\sinh 4t\boldsymbol{e}_y + 18\boldsymbol{e}_z$$

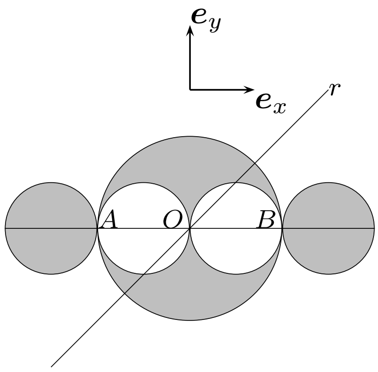
per cui, posto $t = 0$, si ha

$$p'(0) = 2\boldsymbol{e}_x \qquad p''(0) = 4\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y \qquad p'''(0) = 8\boldsymbol{e}_x + 18\boldsymbol{e}_z$$

da cui segue che $p'(0) \wedge p''(0) = 32\boldsymbol{e}_z$ e pertanto che

$$\tau = -\frac{9}{16}.$$

3.*Da una lamina circolare omogenea di massa $4m$ e raggio $10R$ vengono asportati due dischi di ugual raggio $5R$ che vengono ricollocati come indicato in Figura. Determinare il momento di inerzia dell'intero sistema*



rispetto all'asse r passante per il centro O del disco originario, diretto lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Osserviamo che, per simmetria della lamina,

$$I_{O,r}^{(tot.)} = I_{O,r}(\mathcal{D}_1) - 2I_{O,r}(\mathcal{D}_2) + 2I_{O,r}(\mathcal{D}_3)$$

dove $\mathcal{D}_1$ è il disco di partenza, $\mathcal{D}_2$ uno dei dischi asportati e $\mathcal{D}_3$ uno dei dischi più esterni. Dal momento che r è direzione centrale di inerzia per $\mathcal{D}_1$ si ha

$$I_{O,r}(\mathcal{D}_1) = \frac{1}{4}4m(10R)^2 = 100mR^2;$$

se applichiamo a $\mathcal{D}_2$ il teorema di Huygens-Steiner, osservando che la distanza di r dalla parallela passante per il centro di $\mathcal{D}_2$ è $OA\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}R\sqrt{2}$, otteniamo

$$I_{O,r}(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{4}M(5R)^2 + \frac{25}{2}MR^2 = \frac{75}{4}mR^2$$

dove si è osservato che la massa M di $\mathcal{D}_2$ è $M = m$. Infine, seguendo lo stesso procedimento per $\mathcal{D}_3$, con la sola accortezza di notare che la distanza di r dalla parallela per il centro di $\mathcal{D}_3$ è $\frac{15}{2}\sqrt{2}$, otteniamo

$$I_{O,r}(\mathcal{D}_3) = \frac{1}{4}m(5R)^2 + \frac{225}{2}mR^2 = \frac{475}{4}mR^2$$

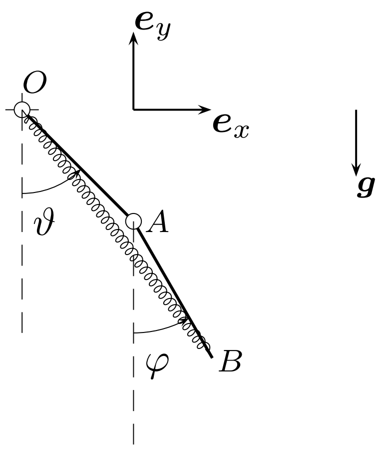
per cui, in conclusione,

$$I_{O,r}^{(tot.)} = 300mR^2.$$

4.*In un piano verticale, un'asta OA omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ è libera di ruotare attorno all'estremo O, incernierato ad un punto fisso. All'estremo A è incernierata una seconda asta omogenea AB, di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ. I punti O e B sono collegati da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ. Introdotti gli angoli ϑ e φ indicati in Figura 2, si supponga che all'istante iniziale $t = 0$ il sistema parta in quiete dalla configurazione $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$, determinare:*

QA1.1 L'energia cinetica del sistema.

QA1.2 L'energia potenziale del sistema.



QA1.3 Il valore di $\ddot{\vartheta}(0)$.

Siccome OA è dotata di punto fisso O e la sua velocità angolare è $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, possiamo scrivere

$$T_{OA} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 I_{O,z}$$

in cui $I_{O,z}$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_z$ e pertanto vale $\frac{4}{3}m\ell^2$ da cui ricaviamo

$$T_{OA} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per l'asta AB, detto G il suo centro di massa ed $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$ la sua velocità angolare, si ha

$$T_{AB} = mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}_1 = mv_G^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{G,\boldsymbol{e}_z} = mv_G^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2.$$

Per trovare la velocità $\boldsymbol{v}_G$ del centro di massa di AB introduciamo i versori $\boldsymbol{e}_1 := \frac{A-O}{|A-O|}$ ed $\boldsymbol{e}_3 = \frac{B-A}{|B-A|}$ diretti, rispettivamente lungo OA ed AB e completiamo due basi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{e}_z\}$ ed $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\, \boldsymbol{e}_z\}$, orientate in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_z$. Osserviamo che la coppia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ mentre la coppia $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$. Possiamo allora scrivere

$$G - O = \ell(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$$

e quindi, grazie alle formule di Poisson,

$$\boldsymbol{v}_G = \ell(2\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_4).$$

Per definizione di $\boldsymbol{e}_1$ ed e_3 abbiamo

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \cos(\varphi - \vartheta) = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_4$$

dove l'ultima uguagilanza segue dal fatto che $\boldsymbol{e}_2$ ed e_4 sono mutuamente ortogonali ad $\boldsymbol{e}_1$ ed e_3. Abbiamo allora

$$v_G^2 = \ell^2[4\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 4\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)].$$

Pertanto l'energia cinetica complessiva $T = T_{OA} + T_{AB}$ si esprime come

$$T = \frac{14}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi).$$

All'energia potenziale contribuiscono la forza peso, applicata nei centri di massa delle aste, e la forza elastica. Se osserviamo che nel triangolo OAB l'angolo in A ha ampiezza $\pi - \vartheta + \varphi$ abbiamo allora

$$V = -5mg\ell\cos\vartheta - 2mg\ell\cos\varphi + 4mg\ell\cos(\vartheta - \varphi).$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana $L = T - V$ come

$$L = T = \tfrac{14}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{4}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) + 5mg\ell\cos\vartheta + 2mg\ell\cos\varphi - 4mg\ell\cos(\vartheta - \varphi)$$

da cui, eseguendo i calcoli, si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -4m\ell^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin(\vartheta - \varphi) - 5mg\ell\sin\vartheta + 4mg\ell\sin(\vartheta - \varphi)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{28}{3}m\ell^2\dot{\vartheta} + 4m\ell^2\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi).$$

Con un'ulteriore derivazione rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{28}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} + 4m\ell^2\ddot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) - 4m\ell^2\dot{\varphi}(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi})\sin(\vartheta - \varphi).$$

Inserite le condizioni iniziali si ottiene allora

$$\frac{28}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta}(0) = -mg\ell$$

e quindi

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3}{28}\frac{g}{\ell}$$

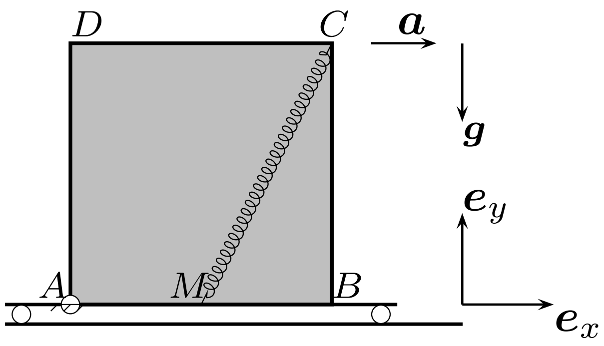
5. *In un piano verticale, una lamina quadrata omogenea di massa m e lato di lunghezza 2ℓ è appoggiata senza attrito ad un pianale che trasla con accelerazione $\boldsymbol{a} = \omega^2 g t^2/2$, dove la costante ω è una frequenza caratteristica. Il vertice A della lamina è incernierato ad un punto fisso sul pianale, mentre il vertice opposto C è attratto verso il punto M del pianale sovrapposto al punto medio del lato AB da una molla ideale di costante elastica $k = 4mg/\ell$. Determinare:*

QA2.1 il momento risultante delle reazioni di appoggio sviluppate su AB, quando la lamina è a contatto con il pianale;

QA2.2 l'istante a partire dal quale la lamina perde il contatto con il pianale;

QA2.3 il valore della componente lungo $\boldsymbol{e}_x$ della reazione vincolare sviluppata dalla cerniera in A all'istante $t = 2/\omega$.

Poniamoci nel riferimento che trasla con accelerazione $\boldsymbol{a}$ in modo da essere solidali alla lamina, risentendo così della forza inerziale $-m\boldsymbol{a}$, applicata nel centro di massa della lamina stessa, oltre beninteso a tutte le



altre forze. Indichiamo con $\psi \boldsymbol{e}_z$ il momento risultante rispetto ad A delle azioni di contatto esplicate lungo AB ed osserviamo che il contatto ha effettivamente luogo se $\psi \geq 0$. L'equilibrio dei momenti rispetto al polo A richiede allora

$$\psi - 4\frac{mg}{\ell}4\ell^2 + \frac{4mg}{\ell}2\ell^2 - mg\ell + \frac{1}{2}\omega^2 gt^2\ell = 0$$

dove, oltre a ψ, abbiamo considerato i contributi al momento delle componenti della forza elastica, della forza peso e della forza non inerziale. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\psi \boldsymbol{e}_z = mg\ell \left[9 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2 \ell\right] \boldsymbol{e}_z.$$

Il contatto permane per tutti gli istanti nei quali si ha $\psi \geq 0$, cioè per

$$t \leq \frac{3}{\omega}\sqrt{2}\,:$$

l'istante $t \leq \frac{3}{\omega}\sqrt{2}$ è quello a partire dal quale il contatto tra lamina e supporto viene meno. Infine, chiedendo l'equilibrio delle forze nella direzione $\boldsymbol{e}_x$ ed indicando con $\boldsymbol{\Phi}_A = \phi_{Ax}\boldsymbol{e}_x + \phi_{Ay}\boldsymbol{e}_y$, si ottiene

$$\phi_{Ax} - \frac{1}{2}\omega^2 mgt^2 - 4mg = 0,$$

dove l'ultimo termine è la componente lungo $\boldsymbol{e}_x$ della forza elastica. Posto $t = 2/\omega$, istante in cui vi è ancora contato per quanto determinato in precedenza, si ottiene

$$\phi_{Ax} = 6mg.$$