Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
23 settembre 2011

1. *Determinare il trinomio invariante del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,3,2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (2,3,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,-1,-1). \end{cases}$$

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 12\boldsymbol{e}_x + 5ey - 6\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante ha valore $\mathcal{I} = 50$.

2. *Trovare il versore* $\boldsymbol{b}$ *binormale della curva*

$$p(t) - O = 2\frac{t}{t^2+1}\boldsymbol{e}_x + (t-1)^3\boldsymbol{e}_y + t(\frac{t}{2} - 1)\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Il versore binormale $\boldsymbol{b}$ è dato da

$$\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p} \wedge \ddot{p}}{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|}$$

e siccome

$$\dot{p}(t) = 2\left(\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\right)\boldsymbol{e}_x + 3(t-1)^2\boldsymbol{e}_y + (t-1)\boldsymbol{e}_z$$

e

$$\ddot{p} = -4t\left(\frac{3-t^2}{(t^2+1)^3}\right)\boldsymbol{e}_x + 6(t-1)\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z,$$

posto $t = 0$ si ha

$$\dot{p}(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \qquad \ddot{p}(0) = -6\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$$

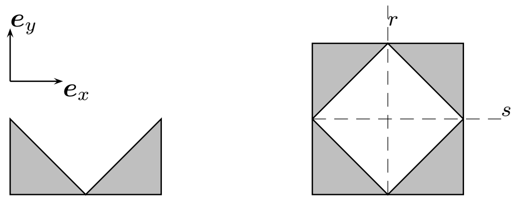
e dunque

$$\boldsymbol{b}(0) = -\frac{1}{\sqrt{157}}\left[3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z\right].$$

3. *Un corpo rigido piano è formato da due triangoli rettangoli isosceli congruenti ed omogenei, disposti come nella Figura di sinistra. Ogni triangolo ha massa* $4m$ *e cateto di lunghezza* 3ℓ. *Trovare il momento centrale di inerzia nella direzione* $\mathbf{e}_y$ *per il corpo rigido.*

Consideriamo la lamina ottenuta da quella di partenza aggiungendo un'altra lamina uguale e disposta simmetricamente alla prima rispetto alla retta s orizzontale, indicata nella figura di destra. Il centro di massa della lamina di partenza giace sulla retta r verticale e se chiamiamo $\mathcal{T}_2$ la lamina iniziale e $\mathcal{T}_4$ quella appena costruita, è chiaro che

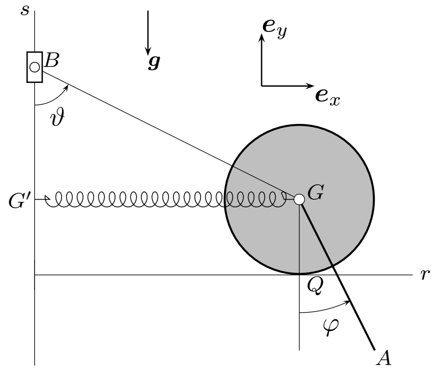
$$I_r(\mathcal{T}_2) = \frac{1}{2}\mathcal{T}_4.$$



D'altra parte $\mathcal{T}_4$ si può vedere come un quadrato pieno, di lato 6ℓ e massa $32m$, visto che è formato da otto triangoli congruenti a ciascuno dei due di partenza, cui viene sottratto un altro quadrato, di lato $3\ell\sqrt{2}$ e massa $16m$. Questi quadrati hanno entrambi il centro di massa su r per cui il momento di inerzia richiesto è

$$I_r(\mathcal{T}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{32 \cdot 36}{12} - \frac{16 \cdot 18}{12}\right) m\ell^2 = 36m\ell^2.$$

4. *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio ℓ è libero di rotolare senza strisciare su una guida orizzontale r. Al suo centro G sono vincolati gli estremi di due aste AG e BG, la prima di lunghezza 2ℓ e massa m, la seconda di massa trascurabile e lunghezza 4ℓ. L'estremo B di BG è vincolato a scorrere su una guida verticale s, mentre AG è libera di ruotare attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per G (vedi figura). Infine, G è attratto verso il punto $G' \in s$ posto alla stessa quota da una molla ideale di costante elastica $k = 2mg/\ell$. Introdotte le coordinate generalizzate ϑ e φ indicate in figura, determinare: l'energia cinetica del disco e di AG; l'energia potenziale totale del sistema; il valore di $\ddot{\vartheta}(0)$ se le condizioni iniziali sono $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$*



La velocità angolare del disco $\omega\boldsymbol{e}_z$ si ricava osservando che, da una parte, essendo $G - G' = 4\ell \sin\vartheta \boldsymbol{e}_x$, si ha

$$\boldsymbol{v}_G = 4\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x.$$

D'altra parte, imponendo il vincolo di puro rotolamento si ha

$$\boldsymbol{v}_G = \omega \boldsymbol{e}_z \wedge \ell \boldsymbol{e}_y = -\omega \ell \boldsymbol{e}_x$$

da cui segue

$$\boldsymbol{\omega} = -4\dot{\vartheta}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_z.$$

Siccome la velocità istantanea del punto Q del disco a contatto con la guida è nulla per il vincolo di puro rotolamento, applicando i teoremi di König e di Huygens-Steiner si ottiene

$$T_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbb{I}_Q \boldsymbol{\omega} = 24m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta.$$

Indichiamo con M il centro di massa dell'asta AG, abbiamo

$$M - G' = G - G' + M - G = 4\ell\sin\vartheta \boldsymbol{e}_x + \ell \boldsymbol{e}_1$$

dove $\boldsymbol{e}_1 = \frac{A-G}{|A-G|}$ è il versore diretto lungo l'asta, orientato da G ad A. Derivando rispetto al tempo e ricordando che l'asta ruota con velocità angolare $\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson si ottiene

$$\boldsymbol{v}_M = 4\ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta \boldsymbol{e}_x + \ell\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2,$$

dove $\boldsymbol{e}_2$ è il versore del piano di moto, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Elevando al quadrato, osservando che $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi$ ed applicando il teorema di König ricaviamo

$$T_{AG} = 8m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi}.$$

Quanto all'energia potenziale, fissata come quota di riferimento l'orizzontale per G, per il contributo gravitazionale abbiamo

$$V = 16mg\ell\sin^2\vartheta - mg\ell\cos\varphi.$$

Possiamo dunque scrivere la lagrangiana

$$L = 32m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\cos\varphi\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} - 16mg\ell\sin^2\vartheta + mg\ell\cos\varphi$$

da cui ricavare le equazioni di moto

$$\begin{cases} 64m\ell^2(\ddot{\vartheta}\cos^2\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta) + 4m\ell^2[\cos\varphi\cos\vartheta\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\vartheta\dot{\varphi}^2] = -32mg\ell\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \\ \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + 4m\ell^2[\cos\varphi\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\varphi\dot{\vartheta}^2] = -mg\ell\sin\varphi \end{cases}$$

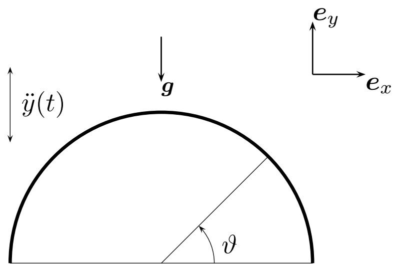
che, imponendo le condizioni iniziali diventano

$$\begin{cases} 32m\ell^2\ddot{\vartheta}(0) + m\ell^2\sqrt{6}\ddot{\varphi}(0) = -16mg\ell \\ \\ \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi}(0) + m\ell^2\sqrt{6}\ddot{\vartheta}(0) = -mg\frac{\ell}{2} \end{cases}$$

da cui ricaviamo il valore

$$\ddot{\vartheta}(0) = \frac{1}{220}(3\sqrt{6} - 128)\frac{g}{\ell}.$$

5. *In un piano verticale, un filo omogeneo di lunghezza πR e peso per unità di lunghezza $4mg/R$ è appoggiato senza attrito ad un supporto a forma di semidisco di raggio R, libero di traslare in direzione $\boldsymbol{e}_y$ con legge oraria $y(t) = 3R\sin\omega t$, dove $\omega = \sqrt{\frac{\gamma g}{R}}$ (vedi figura). Introdotto l'angolo ϑ che il generico raggio forma con la direzione $\boldsymbol{e}_x$, determinare: il valore della tensione in tutti i punti del filo, come funzione di ϑ; i valori di γ compatibili con il contatto tra il filo ed il supporto durante l'intera oscillazione di quest'ultimo; Se $\gamma = 4/3$, trovare il primo istante $t_0 > 0$ nel quale si perde il contatto.*



Studiamo il problema nel riferimento non inerziale che trasla col supporto. Oltre alla forza peso, dovremo pertanto considerare una forza fittizia distribuita lungo il filo con densità lineare $-4\frac{m}{R}\ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y$ per cui la forza distribuita $\boldsymbol{f}$ lungo il filo è

$$\boldsymbol{f} = -4\frac{m}{R}(g + \ddot{y}(t))\boldsymbol{e}_y.$$

Proiettando l'equazione indefinita di equilbrio per il filo nella direzione della sua tangente $\boldsymbol{t}$, orientata concordemente al verso positivo di ϑ, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta} = 4\frac{m}{R}(g + \ddot{y}(t))\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{t} = 4\frac{m}{R}(g + \ddot{y}(t))\cos\vartheta$$

da cui ricaviamo

$$\tau(\vartheta) = 4m(g + \ddot{y})\sin\vartheta + c$$

dove la costante di integrazione c si determina imponendo $\tau(0) = 0$ ovvero $\tau(\pi) = 0$ per cui, inserendo il valore di $\ddot{y}$ si ha

$$\tau(\vartheta) = 4mg(1 - 3\gamma\sin\omega t)\sin\vartheta.$$

Il contatto con il supporto è garantito finché

$$\phi_n = -f_n - \frac{\tau}{R} \leq 0$$

che si ottiene proiettando l'equazione di equilibrio indefinita lungo la normale principale $\boldsymbol{n}$ del filo e dove $f_n = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}$ e $\phi_n = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}$ è la proiezione su $\boldsymbol{n}$ della reazione vincolare per unità di lunghezza che deve essere negativa, cioè puntare perso l'esterno del supporto, affinché vi sia contatto. Inserendo il valore di τ trovato e osservando che $f_n = -4\frac{m}{R}(g + \ddot{y}(t))\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{n} = 4\frac{m}{R}(g + \ddot{y}(t))\sin\vartheta$ si ricava

$$\phi_n = -\frac{8mg}{R}(1 - 3\gamma\sin\omega t)\sin\vartheta \leq 0 \tag{1}$$

che deve essere soddisfatta per tutti i valori di $\vartheta \in [0, \pi]$ e per tutti $t \leq 0$, il che richiede che sia

$$\gamma \leq \frac{1}{3}.$$

Per l'ultimo quesito, dove si suppone $\gamma > \frac{1}{3}$, occorre tornare alla condizione di contatto (1) e risolverla per $\sin \omega t$, ottenendo

$$\sin \omega t \leq \frac{1}{4}$$

per cui l'istante t_0 è

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{3R}{4g}} \arcsin \frac{1}{4}.$$