Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile/Architettura
Correzione prova scritta
Esame di Meccanica Razionale
13 febbraio 2012

1. *Determinare il trinomio invariante del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2,0,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,-1,0), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (0,2,3). \end{cases}$$

Il risultante del sistema proposto è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 4\boldsymbol{e}_x - 8\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante richiesto è

$$\mathcal{I} = 16.$$

2. *Trovare la torsione della curva*

$$p(t) - O = (t^3 - t)\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}(t^2 + 3\sin t)\boldsymbol{e}_y + (2\cos t - \frac{t^3}{3})\boldsymbol{e}_z$$

nel punto corrispondente a $t = 0$.

Derivando rispetto al parametro t più volte, otteniamo

$$p'(t) = (3t^2 - 1)\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}(2t + 3\cos t)\boldsymbol{e}_y - (2\sin t + t^2)\boldsymbol{e}_z,$$

$$p''(t) = 6t\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}(2 - 3\sin t)\boldsymbol{e}_y - 2(\cos t + t)\boldsymbol{e}_z,$$

e

$$p'''(t) = 6\boldsymbol{e}_x - \frac{3}{2}\cos t\boldsymbol{e}_y - 2(1 - \sin t)\boldsymbol{e}_z,$$

da cui si ricava, per sostituzione diretta,

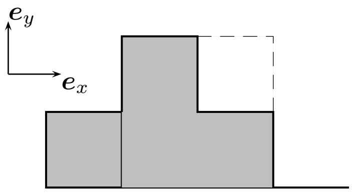
$$p'(0) = -\boldsymbol{e}_x + \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_y \qquad p''(0) = \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z \quad \text{e} \qquad p'''(0) = 6\boldsymbol{e}_x - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$$

e quindi

$$p'(0) \wedge p''(0) = -3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$$

per cui, dalla definizione di torsione, si ha

$$\tau = \frac{13}{14}.$$



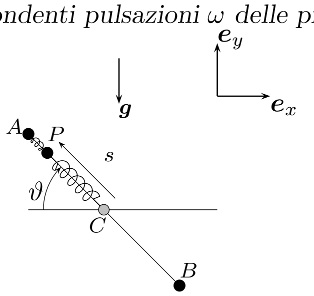
3.*Da una lamina quadrata omogenea di massa $3m$ e lato 4ℓ viene asportato un quadrato di lato 2ℓ collocato come in figura che viene riposizionato con un lato adiacente a quello del quadrato di partenza. Per la lamina così ottenuta determinare il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.*

La lamina ottenuta dopo la trasposizione del blocco quadrato si può vedere come composta da un rettangolo—di lati 2ℓ e 6ℓ e massa $\frac{9}{4}m$—formato dai tre quadrati sottostanti e dal quadrato soprastante, di lato 2ℓ e massa $\frac{3}{4}m$. Applicando il teorema di composizione abbiamo allora

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y} = \frac{9}{48}36m\ell^2 + \frac{3}{48}4m\ell^2 = 7m\ell^2,$$

dove manca il termine proporzionale alla massa ridotta del sistema, dal momento che i centri di massa del rettangolo e del quadrato sono allineati lungo $\boldsymbol{e}_y$.

4.*In un piano verticale, un'asta AB di massa trascurabile e lunghezza 2ℓ reca agli estremi A e B due masse $2m$ e $4m$, rispettivamente, ed è libera di ruotare attorno al proprio centro C fisso. Sull'asta è libero di scorrere un anellino P di massa m attratto verso A e C da due molle ideali di costanti elastiche $4mg/\ell$ e mg/ℓ. Introdotte le coordinate ϑ ed s indicate in Figura, determinare: l'espressione dell'energia cinetica totale T del sistema; l'espressione dell'energia potenziale totale V del sistema; i valori di ϑ ed s nella configurazione di equilibrio stabile e le corrispondenti pulsazioni ω delle piccole oscillazioni.*



Introdotto il versore $\boldsymbol{e}_1$ diretto come $A - C$ ed il versore $\boldsymbol{e}_2$ ad esso ortogonale, orientato in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, abbiamo

$$P - C = s\boldsymbol{e}_1$$

e dunque, grazie alle formule di Poisson, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2;$$

Poiché i punti A e B descrivono una circonferenza di raggio ℓ centrata in C ed i loro raggi vettori ruotano entrambi con velocità angolare $-\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, abbiamo $\boldsymbol{v}_A = -\ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{v}_B$ per cui l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2) + 3m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

I contributi all'energia potenziale gravitazionale dei punti A, B e P sono, rispettivamente, $2mg\ell\cos\vartheta$, $-4mg\ell\cos\vartheta$ $mgs\cos\vartheta$, mentre le molle che attraggono P verso A e verso B contribuiscono all'energia potenziale con $\frac{2mg}{\ell}(\ell-s)^2$ ed $\frac{mg}{2\ell}s^2$ per cui abbiamo che

$$V = -2mg\ell\sin\vartheta + mgs\sin\vartheta - 4mgs + \frac{5mg}{2\ell}s^2,$$

dove abbiamo eliminato un'inessenziale costante additiva.

Le configurazioni di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = mg\sin\vartheta - 4mg + \frac{5mg}{\ell}s = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg\cos\vartheta(-2\ell + s) = 0; \end{cases}$$

la seconda equazione ammette come sole soluzioni accettabili $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ in quanto $s \in (-\ell, \ell)$ e quindi non è accettabile la configurazione di equlibrio in cui $s = 2\ell$. Sostituendo i valori di θ nella prima equazione otteniamo, rispettivamente $s = \frac{3}{5}\ell$ ed $s = -\ell$ ma quest'ultima non è accettabile perché rappresenta una configurazione di equilibrio di confine e dunque deve essere trattata con altri metodi. Resta dunque una sola configurazione di equilibrio E_1 da studiare, caratterizzata dalla coppia $(\vartheta, s) \equiv \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{5}\ell\right)$. Per questo, valutiamo la matrice hessiana in E_1 osservando che

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{5mg}{\ell} \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial s} = mg\cos\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = mg\sin\vartheta(2\ell - s); \end{cases}$$

per cui, se si inseriscono i valori di s e ϑ all'equilibrio si ottiene

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{5mg}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{7}{5}mg\ell \end{pmatrix}$$

che è chiaramente definita positiva. Concludiamo che E_1 è configurazione di equilibrio stabile nel senso di Ljapunov, grazie al teorema di Dirichlet-Lagrange. Per lo studio delle piccole oscillazioni, osserviamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}^2} = m \\ \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta} \partial \dot{s}} = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = m(s^2 + 6\ell^2) \end{cases}$$

e quindi la forma quadratica associata all'energia cinetica nella configurazione E_1 è

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{159}{25}m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

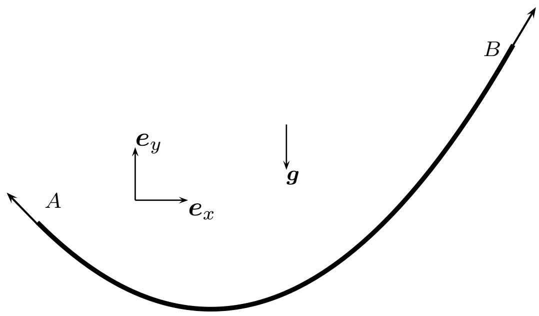
Poiché sia A che B sono già diagonali, le radici dell'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ sono

$$\lambda_1 = \frac{5g}{\ell} \qquad \lambda_2 = \frac{35}{159}\frac{g}{\ell}$$

e le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{35}{159}\frac{g}{\ell}}.$$

5._In un piano verticale, una catenaria omogenea di peso per unità di lunghezza $2p$ è mantenuta in equilibrio grazie a due forze applicate negli estremi A e B, inclinate rispettivamente di $\pi/6$ e $\pi/3$ sull'orizzontale. Sapendo che la forza applicata in B ha intensità $3p\ell$, determinare il valore della tensione nel punto più basso della catenaria AB; l'intensità della forza applicata in A; il dislivello tra i punti A e B._



Se centriamo l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali centrato nel vertice della catenaria, con assi paralleli ad $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$, l'equazione della catenatia si esprime come

$$y(x) = \frac{\psi}{2p}\left[\cosh\left(\frac{2p}{\psi}x\right) - 1\right]$$

dove ψ è il valore della componente della tensione lungo $\boldsymbol{e}_x$, costante lungo il filo. Esso si ricava osservando che in B la tensione ha modulo $3p\ell$ e quindi, vista l'inclinazione del filo in quel punto, $\psi = 3p\ell\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3p\ell}{2}$ per cui

$$y(x) = \frac{3\ell}{4}\left[\cosh\left(\frac{4}{3\ell}x\right) - 1\right].$$

Il minimo del modulo della tensione si ha nel punto dove è minima la sua componente lungo $\boldsymbol{e}_y$, cioè nel vertice, dove la tensione si riduce a $\psi = \frac{3}{2}p\ell$. L'intensità della forza in A coincide con il modulo della tensione del filo in quel punto: vista l'inclinazione della tangente alla catenaria in A, deve essere

$$F_A = \frac{\psi}{\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}p\ell.$$

Il dislivello tra i punti A e B è

$$\Delta y = y(x_B) - y(x_A) = \frac{3\ell}{4}\left[\cosh\left(\frac{4}{3\ell}x_B\right) - \cosh\left(\frac{4}{3\ell}x_A\right)\right]$$

e per ottenere i valori di $\cosh \frac{4}{3\ell} x$ in A e B, deriviamo rispetto ad x la funzione $y(x)$, ricavando

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{4}{3\ell}x\right)$$

e siccome $y'(x)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente alla catenaria forma con l'asse delle ascisse nel punto $(x, y(x))$, abbiamo

$$y'(x_A) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \sinh\left(\frac{4}{3\ell}x_A\right) \qquad y'(x_B) = \sqrt{3} = \sinh\left(\frac{4}{3\ell}x_B\right),$$

dove il segno negativo riflette il fatto che in A la tangente alla catenaria forma un angolo pari a $\frac{5\pi}{6}$ con l'asse delle ascisse. Abbiamo allora trovato i valori di $\sinh\left(\frac{4}{3\ell}x\right)$ in A e B: utilizzando il legame fondamentale $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ otteniamo allora

$$\cosh\left(\frac{4}{3\ell}x_A\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \cosh\left(\frac{4}{3\ell}x_B\right) = 2$$

sicché

$$\Delta y = \frac{3}{2}\ell\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$