Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 4 febbraio 2021 (II Turno)

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2, -1, 3), \\ \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (-1, 2, -2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1, -3, 1) \end{cases}$$

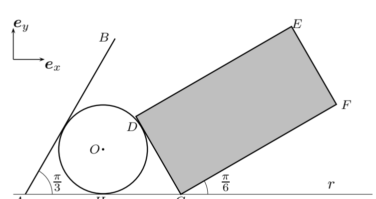
determinarne il risultante (**1** punto); il momento risultante rispetto ad O (**3** punti); il trinomio invariante (**1** punto); l'equazione dell'asse centrale (**2** punti).

Il riusltante è $\boldsymbol{R} = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = 11\boldsymbol{e}_x + 13\boldsymbol{e}_y + 15\boldsymbol{e}_z$, per cui il trinomio invariante è dato da $\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = 53$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale osserviamo che $|\boldsymbol{R}|^2 = 29$ e che $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 71\boldsymbol{e}_x - 82\boldsymbol{e}_y + 19\boldsymbol{e}_z$. Pertanto i punti Q dell'asse centrale hanno vettore posizione $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dato da

$$\begin{cases} x = \frac{71}{29} + 4\lambda \\ \\ y = -\frac{82}{29} + 3\lambda \\ \\ z = \frac{19}{29} - 2\lambda \end{cases}$$

dove λ è un numero reale.

2. *Un corpo rigido è formato da un anello di raggio R e massa $2m$, tangente ad una retta orizzontale r; da un'asta AB di massa $4m$ e lunghezza $4R$, appoggiata ad r, tangente all'anello ed inclinata di $\frac{\pi}{3}$ sull'orizzontale; da un rettangolo $CDEF$ di massa $4m$ e lati $CD = 2R$ e $CF = 4R$, inclinato di un angolo $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale. All'istante $t = 0$ il sistema è nella configurazione indicata in figura con $\boldsymbol{v}_O = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 3\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)$ e $\boldsymbol{v}_A = v_0(3\boldsymbol{e}_x + 2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)$. Determinare: la*



*velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$ (**2** punti); la velocità $\boldsymbol{v}_C(0)$ del vertice C del rettangolo all'istante $t = 0$ (**1** punto); la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$, rispetto al punto O, per via analitica (**2** punti); il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi rispetto alla retta passante per il punto H di contatto tra l'anello e la guida r, parallela ad AB (**8** punti).*

La formula fondamentale della cinematica rigida permette di scrivere

$$\boldsymbol{v}_O - \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge (O - A)$$

ed essendo $O - A = R\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x + R\boldsymbol{e}_y$, scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ abbiamo

$$v_0(-\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y) = \omega R\boldsymbol{e}_z \wedge (\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = \omega R(-\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)$$

che consente di ottenere

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v_0}{R}\boldsymbol{e}_z \, .$$

Quindi avremo anche

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \frac{v_0}{R}\boldsymbol{e}_z \wedge (C - O) = \boldsymbol{v}_O + \frac{v_0}{R}\boldsymbol{e}_z \wedge R(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{v}_O + v_0(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_x)$$

da cui otteniamo

$$\boldsymbol{v}_C = v_0(3\boldsymbol{e}_x + 4\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y) \, .$$

L'equazione della retta s passante per H, parallela ad AB è

$$y = \sqrt{3}x \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{3}x - y = 0 \, ,$$

posta l'origine del riferimento cartesiano ortogonale in H. Indichiamo con $\boldsymbol{n}$ il versore diretto lungo AB; il contributo dell'anello è

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{2mR^2}{2} + 2md^2$$

dove d è la distanza del centro O dell'anello da s e, siccome O ha coordinate $(0, R)$, sarà

$$d = \frac{|0 - R|}{2} = \frac{R}{2}$$

per cui il contributo dell'anello è

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{2mR^2}{2} + 2m\frac{R^2}{4} = \frac{3mR^2}{2} \, .$$

Siccome s è parallela all'asta, il momento centrale di inerzia lungo $\boldsymbol{n}$ è nullo e si ha come contributo

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = 4mh^2$$

dove h è la distanza da H del centro di massa M dell'asta, di coordinate $[R(1-\sqrt{3}), R\sqrt{3}]$:

$$h = \frac{R|\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3}|}{2} = \frac{3R}{2}$$

per cui

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = 9mR^2 \,.$$

Infine, se G indica il centro di massa del rettangolo, avremo

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = I_{G,\boldsymbol{n}} + 4m\lambda^2 \,,$$

dove λ è la distanza tra G ed s.

Indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori associati ai vettori $F-C$ e $D-C$, rispettivamente. Sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la matrice centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_G = \frac{4mR^2}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} .$$

Poiché

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \,,$$

abbiamo

$$I_{G,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{n} = \frac{7m}{3}R^2.$$

Per calcolare λ osserviamo che

$$G - H = R\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x + 2R\boldsymbol{e}_1 + R\boldsymbol{e}_2$$

per cui abbiamo

$$x_G = (G-H)\cdot \boldsymbol{e}_x = R\sqrt{3} + R\sqrt{3} - \frac{R}{2} = R\left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$$

e

$$y_G = (G-H)\cdot \boldsymbol{e}_y = R + R\frac{\sqrt{3}}{2} = R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

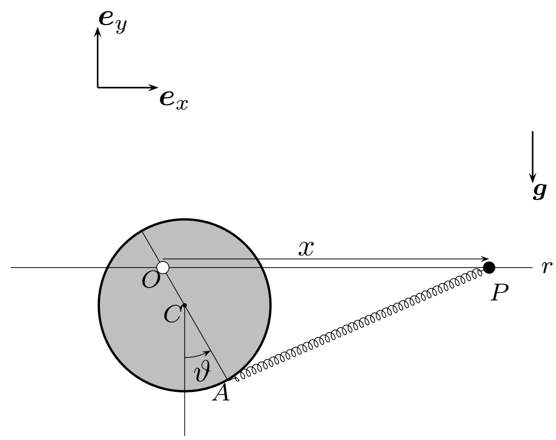
da cui possiamo ricavare

$$\lambda = \frac{R\left|6 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}R$$

e quindi

$$I_{H,\boldsymbol{n}} = \frac{7}{3}mR^2 + 4m\frac{28 - 10\sqrt{3}}{4}R^2 = \left(\frac{91}{3} - 10\sqrt{3}\right)mR^2 \,.$$

3.*In un piano verticale, un disco di massa $4m$ e raggio R è libero di ruotare intorno ad un proprio punto fisso O distante $\frac{R}{2}$ dal centro C. Sull'orizzontale r*



*passante per O è libero di muoversi un punto materiale P di massa $2m$, attratto da una molla ideale di costante elastica $\gamma\frac{mg}{R}$, verso il punto A della circonferenza del disco, posto sullo stesso diametro di O. Introdotte le coordinate x e ϑ indicate in figura, determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema, studiandone la stabilità al variare di $\gamma > 0$ (**6** punti). Posto $\gamma = \frac{1}{3}$, trovare l'energia cinetica del sistema (**2** punti). Calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile. (**2** punti)*

Presa come quota di riferimento quella della retta r, l'energia potenziale gravitazionale si riduce al contributo del disco, pari a $-4mg\frac{R}{2}\cos\vartheta = -2mgR\cos\vartheta$. Per il contributo della forza elastica, osserviamo che il triangolo OPA ha l'angolo in O di ampiezza $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ per cui, applicando il teorema del coseno, otteniamo

$$|P - A|^2 = x^2 + \frac{9}{4}R^2 - 3Rx\sin\vartheta$$

e di conseguenza il contributo all'energia potenziale $\gamma\frac{mg}{R}|P - A|^2$ permette di scrivere l'energia potenziale complessiva come

$$V = -2mgR\cos\vartheta + \gamma\frac{mg}{R}\left[x^2 + \frac{9}{4}R^2 - 3Rx\sin\vartheta\right].$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio ordinarie, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma mg\left[\frac{x}{R} - \frac{3}{2}\sin\vartheta\right] = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg[2R\sin\vartheta - \frac{3}{2}\gamma x\cos\vartheta] = 0\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il legame tra x e ϑ all'equilibrio

$$x = \frac{3}{2}R\sin\vartheta$$

che ricorda come, all'equilibrio, P ed A stanno sulla stessa verticale. Sostituendo nella seconda equazione, ricaviamo

$$mgR[2\sin\vartheta - \frac{9}{4}\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta] = 0$$

che ammette per soluzioni i valori di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ per i quali $\sin\vartheta = 0$, cioè $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, indipendenti dal valore di γ, ed eventualmente i valori di ϑ che risolvono l'equazione

$$2 - \frac{9}{4}\gamma\cos\vartheta = 0$$

e che sono dati da

$$\vartheta^* \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \text{tale che} \qquad \cos\vartheta^* = \frac{8}{9\gamma} \qquad \text{e} \qquad 2\pi - \vartheta^*$$

che però esistono a patto che

$$\frac{8}{9\gamma} \leq 1 \qquad \text{cioè} \qquad \gamma \geq \frac{8}{9}.$$

in corrispondenza, avremo le seguenti coppie (x, ϑ) corrispondenti a configurazioni ordinarie di equilibrio

$$E_1 = (0, 0) \qquad E_2 = (0, \pi)$$

cui si aggiungono, quando $\gamma \geq \frac{8}{9}$,

$$E_3 = \left(\vartheta^*, \frac{3}{2}R\sin\vartheta^*\right) \qquad E_4 = \left(2\pi - \vartheta^*, -\frac{3}{2}R\sin\vartheta^*\right).$$

Per studiare la stabilità di queste configurazioni, calcoliamo le derivate seconde di V:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma\frac{mg}{R} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial x} = -\frac{3}{2}\gamma mg\cos\vartheta \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = mg[2R\cos\vartheta + \frac{3}{2}\gamma x\sin\vartheta] \end{cases}$$

e studiamo le forme hessiane delle configurazioni di equilibrio.

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} \gamma\frac{mg}{R} & -\frac{3}{2}\gamma mg \\ -\frac{3}{2}\gamma mg & 2mgR \end{pmatrix}$$

che ha la traccia positiva ed il determinante

$$\gamma m^2 g^2 [2 - \frac{9}{4}\gamma]$$

che è positivo se $\gamma < \frac{8}{9}$, negativo se $\gamma > \frac{8}{9}$. E_1 è stabile nel primo regime, instabile nel secondo. Passiamo ad E_2 per la quale

$$B(E_2) = \begin{pmatrix} \gamma\frac{mg}{R} & \frac{3}{2}\gamma mg \\ \frac{3}{2}\gamma mg & -2mgR \end{pmatrix}$$

che ha determinante
$$-\gamma m^2 g^2[2+\frac{9}{4}\gamma]<0$$
per cui corrisponde ad un punto di sella di V. La configurazione di equilibrio E_2 non è mai stabile. Per E_3, calcoliamo preliminarmente l'elemento

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}=mg[2R\cos\vartheta^*+\frac{3}{2}\gamma\frac{3}{2}R\sin^2\vartheta^*]$$

che, ricordando il valore di $\cos^*$, è data da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}=mgR\left[\frac{16}{9\gamma}+\frac{9}{4}\left(\gamma-\frac{64}{81\gamma}\right)\right]$$

e la forma hessiana sarà

$$B(E_3)=\begin{pmatrix} \gamma\frac{mg}{R} & -\frac{4}{3}mg \\ -\frac{4}{3}mg & \frac{9}{4}\gamma mgR \end{pmatrix}$$

la cui traccia è positiva mentre il determinante è

$$m^2g^2\left[\frac{9}{4}\gamma^2-\frac{16}{9}\right]$$

ed è positivo quando
$$\gamma^2>\frac{64}{81}$$
ovvero, essendo $\gamma>0$, quando $\gamma>\frac{8}{9}$: dunque, E_3 è stabile quando esiste. Poiché la sostituzione di ϑ^* con $2\pi-\vartheta^*$ non cambia la forma hessiana rispetto a $B(E_3)$ le stesse conclusioni per E_3 valgono per E_4 che ha lo stesso carattere di stabilità.

Per completare l'analisi dei modi normali occorre calcolare l'energia cinetica che consta del contributo del punto materiale P, dato da $m\dot{x}^2$, e di quello del disco, pari a $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}$ dove la velocità angolare del disco è $\boldsymbol{\omega}=\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Pertanto

$$T=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\boldsymbol{e}_z\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_z$$

e, usando il teorema di Huygens-Steiner per calcolare

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\mathbb{I}_O\boldsymbol{e}_z=\frac{4m}{2}R^2+4m\frac{R^2}{4}=3mR^2$$

si ottiene
$$T=m\dot{x}^2+\frac{3}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2$$
e la corrispondente forma quadratica è

$$A=\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3mR^2 \end{pmatrix}.$$

Siccome per $\gamma = \frac{1}{3}$ è E_1 la sola configurazione di equilibrio stabile, la cui hessiana è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{mg}{3R} & -\frac{mg}{2} \\ -\frac{mg}{2} & 2mgR \end{pmatrix}$$

dovremo risolvere l'equazione

$$\det(\lambda A - B) = \det \begin{pmatrix} 2m\lambda - \frac{mg}{3R} & \frac{mg}{2} \\ \frac{mg}{2} & 3mR^2\lambda - 2mgR \end{pmatrix} = 0$$

che si riduce all'equazione algebrica di secondo grado

$$6\lambda^2 R^2 - 5gR\lambda + \frac{5}{12}g^2 = 0$$

che ha le soluzioni reali e positive

$$\lambda_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{12}\frac{g}{R}$$

cui corrispondono le pulsazioni delle piccole oscillazioni

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{15}}{12}\frac{g}{R}}\,.$$