Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Industriale)
Appello del 4 febbraio 2021

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = -2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (-2,1,-1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,-4,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 4\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (3,-2,1) \end{cases}$$

*determinarne il risultante (***1** *punto); il momento risultante rispetto ad O (***3** *punti); il trinomio invariante (***1** *punto); l'equazione dell'asse centrale (***2** *punti).*

Il riusltante è $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto al polo O è $\boldsymbol{M}_O = -11\boldsymbol{e}_x - 15\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$, per cui il trinomio invariante è dato da $\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = -38$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale osserviamo che $|\boldsymbol{R}|^2 = 6$ e che $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 21\boldsymbol{e}_x - 14\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$. Pertanto i punti Q dell'asse centrale hanno vettore posizione $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dato da

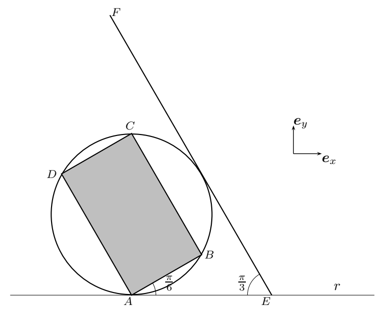
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} + \lambda \\ \\ y = -\frac{7}{3} + 2\lambda \\ \\ z = \frac{7}{6} + \lambda \end{cases}$$

dove λ è un numero reale.

2. *Un corpo rigido è formato da un anello di raggio R e massa m, tangente ad una retta orizzontale r; da un rettangolo $ABCD$ inscritto nella circonferenza, di massa $2m$ e lati AB di lunghezza R, inclinato di $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale, e $BC = R\sqrt{3}$; da un'asta EF di lunghezza $4R$, massa $3m$, con l'estremo E su r, inclinata di $\frac{\pi}{3}$ rispetto ad r, tangente all'anello. Determinare il momento di inerzia di ciascuno dei tre corpi rispetto alla retta r (***7** *punti); Determinare il momento centrale di inerzia del corpo nella direzione di AB (***5** *punti).*

La distanza del centro O dell'anello dalla retta r è R per cui il contributo dell'anello al momento di inerzia lungo r è

$$\frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \,.$$



Quanto al contributo dell'asta, osserviamo che il suo estremo E giace su r per cui

$$I_r = \frac{3m}{3} 16R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16mR^2 \frac{3}{4} = 12mR^2 \,.$$

Quanto al rettangolo $ABCD$, osserviamo che il suo centro coincide con quello O dell'anello ed indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori associati ai vettori $B - A$ e $D - A$, rispettivamente. Sulla base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la matrice centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}_{G_R} = \frac{2mR^2}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Poiché

$$\boldsymbol{e}_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \,,$$

abbiamo

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x} = \boldsymbol{e}_x \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{e}_x = \frac{5m}{12} R^2.$$

La distanza da r del centro di massa del rettangolo è ancora R per cui il contributo del rettangolo al momento di inerzia cercato è

$$I_r = \frac{5}{12} mR^2 + 2mR^2 = \frac{29}{12} mR^2 \,.$$

Per il calcolo del momento centrale di inerzia dell'intero corpo nella direzione $\boldsymbol{e}_1$, suddividiamo il sistema in due sottocorpi: il primo, $\mathcal{B}_1$, costituito da anello e rettangolo, che hanno centro di massa comune in O; il secondo, $\mathcal{B}_2$, formato dalla sola asta, di cui diciamo M il centro di massa. Se G è il centro di massa complessivo, applicando il teorema di composizione, avremo

$$I_{G,\boldsymbol{e}_1} = I_{O,\boldsymbol{e}_1}(\mathcal{B}_1) + I_{M,\boldsymbol{e}_1}(\mathcal{B}_2) + \mu d^2 \,.$$

Poiché il rettangolo e l'anello hanno il centro di massa in comune,

$$I_{O,\boldsymbol{e}_1}(\mathcal{B}_1) = I_{O,\boldsymbol{e}_1}(ABCD) + I_{O,\boldsymbol{e}_1}(\text{anello}) = \frac{2m}{12} 3R^2 + \frac{mR^2}{2} = mR^2$$

mentre per l'asta, osservando che $\boldsymbol{e}_1$ è ortogonale ad EF, abbiamo

$$I_{M,\boldsymbol{e}_1}(\mathcal{B}_2) = \frac{3m}{12} 16R^2 = 4mR^2 \, .$$

Per il calcolo della massa ridotta μ, siccome la massa di $\mathcal{B}_1$ è $3m$, come pure la massa dell'asta, abbiamo $\mu = \frac{3}{2}m$. Infine, d è la distanza di M, centro di massa dell'asta, dalla retta passante per O, diretta lungo $\boldsymbol{e}_1$. Siccome questa retta è ortogonale ad EF, tangente all'anello, essa taglierà l'anello nel punto H di tangenza tra anello ed EF. Dunque

$$d = ME - HE = 2R - HE$$

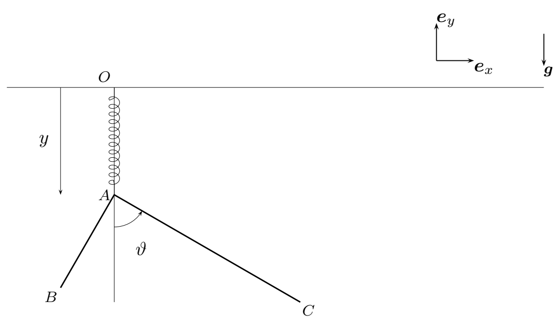
e la geometria del problema consente di concludere che $HE = R\sqrt{3}$ per cui

$$d = R(2 - \sqrt{3}) \, .$$

In definitiva

$$I_{G,\boldsymbol{e}_1} = 5mR^2 + \frac{3mR^2}{2}(7 - 4\sqrt{3}) = \frac{mR^2}{2}[31 - 12\sqrt{3}] \, .$$

3.*In un piano verticale vi è un'asta BAC formata da due bracci $AB = 2\ell$ di massa $2m$ ed $AC = 4\ell$, di massa m, saldati ortogonalmente nell'estremo comune A, mobile lungo una guida fissa verticale e attorno al quale l'asta può oscillare. Inoltre il punto A che è attratto verso un punto O fisso, posto sulla sua verticale, da una molla ideale di costante elastica $\frac{3mg}{\ell}$. Introdotte le coordinate y e ϑ in*



*figura, determinare l'energia cinetica (**5** punti) e l'energia potenziale del sistema (**2** punti). Determinare il valore di $\ddot{y}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$ sapendo che all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y(0) = \ell$. (**4** punti)*

Siano G ed M i centri di massa dei bracci AB ed AC. Avremo, indicati con $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ i versori lungo i bracci $B - A$ e $C - A$:

$$G - O = (A - O) + (G - A) = -y\boldsymbol{e}_y + \ell\boldsymbol{e}_1 \qquad M - O = (A - O) + (M - A) = -y\boldsymbol{e}_y + 2\ell\boldsymbol{e}_2$$

e, se osserviamo che la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ solidale all'asta ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, avremo

$$\boldsymbol{v}_G = -\dot{y}\boldsymbol{e}_y + \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\dot{y}\boldsymbol{e}_y + \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e

$$\boldsymbol{v}_M = -\dot{y}\boldsymbol{e}_y + 2\ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\dot{y}\boldsymbol{e}_y - 2\ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_1\,.$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}2mv_G^2 + \frac{1}{2}mv_M^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbb{I}_G^{(AB)}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathbb{I}_M^{(AC)}\boldsymbol{\omega}$$

ovvero

$$\begin{aligned}T = m[\dot{y}^2 + \ell^2\dot{\vartheta}^2 - 2\ell\dot{y}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_2] + \tfrac{m}{2}[\dot{y}^2 + 4\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 4\ell\dot{y}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_1] +\\ +\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2m}{12}4\ell^2 + \tfrac{m}{12}16\ell^2\right]\dot{\vartheta}^2\end{aligned}$$

che possiamo semplificare ulteriormente osservando che

$$\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_2 = \cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\sin\vartheta$$

per cui

$$T = \frac{3}{2}m\dot{y}^2 + 2m\ell\dot{y}\dot{\vartheta}(\cos\vartheta - \sin\vartheta) + 4m\ell^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

Per l'energia potenziale, consideriamo come quota di riferimento l'orizzontale passante per O. Avremo allora

$$V = -2mg(y + \ell\sin\vartheta) - mg(y + 2\ell\cos\vartheta) + \frac{3}{2}\frac{mg}{\ell}y^2$$

e quindi la lagrangiana $L = T - V$ è

$$L = \frac{3}{2}m\dot{y}^2 + 2m\ell\dot{y}\dot{\vartheta}(\cos\vartheta - \sin\vartheta) + 4m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 3mgy + 2mg\ell(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - \frac{3}{2}\frac{mg}{\ell}y^2\,.$$

Possiamo scrivere l'equazione di Lagrange rispetto ad y come

$$3\ddot{y} + 2\ell\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta - \sin\vartheta) - 2\ell\dot{\vartheta}^2(\sin\vartheta + \cos\vartheta) = 3g\left(1 - \frac{y}{\ell}\right)$$

e quella relativa a ϑ, come

$$\ddot{y}(\cos\vartheta - \sin\vartheta) + 4\ell\ddot{\vartheta} = g(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\,.$$

Inserendo le condizioni iniziali, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 3\ddot{y}(0) - 2\ell\ddot{\vartheta}(0) = 0 \\ -\ddot{y}(0) + 4\ell\ddot{\vartheta}(0) = -g \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{3}{10}\frac{g}{\ell} \qquad \ddot{y}(0) = \frac{g}{5}\,.$$