Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
25 giugno 2015

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,2,4), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (3,-1,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2,3,-4) \end{cases}$$

determinarne

risultante (**1** pt.); momento risultante rispetto ad O (**3** pt.); ridurre il sistema ad un altro, ad esso equivalente, formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q - O \equiv (2,-3,1)$ (**3** pt.).

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 5\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 10\boldsymbol{e}_x + 36\boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z$. Grazie al teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = 11\boldsymbol{e}_x + 29\boldsymbol{e}_y - 11\boldsymbol{e}_z$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre che

$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

e dunque bisogna scegliere $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$: ad esempio $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z$. Allora sarà

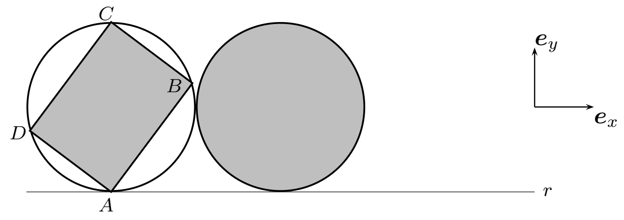
$$S - Q = \frac{1}{2}(-29\boldsymbol{e}_x + 22\boldsymbol{e}_y + 29\boldsymbol{e}_z)$$

per cui $S - O = -\frac{25}{2}\boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_y + \frac{33}{2}\boldsymbol{e}_z$.

2. *Un corpo rigido piano è formato da un rettangolo omogeneo $ABCD$ di massa $3m$ e lati $AB = 8R$ e $BC = 6R$, inscritto in un anello di massa $2m$ e raggio $5R$, con il lato AB inclinato rispetto alla retta orizzontale r su cui giace A di un angolo α tale che $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; da un disco omogeneo di massa $4m$ e raggio $5R$, tangente all'anello, con il centro alla stessa quota di quello dell'anello. Supponendo che all'istante $t = 0$ il sistema si trovi nella configurazione indicata in figura, con $\boldsymbol{v}_A = v_0(-\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$ e $\boldsymbol{v}_C = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica, determinare: la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ (**1** punto), la velocità del centro del disco, allo stesso istante (**1** punto); le coordinate del centro di istantanea rotazione a $t = 0$, riferite al punto A (**2** punti); il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per A, diretto come $\boldsymbol{e}_x$ precisando i contributi del rettangolo, dell'anello e del disco (**5** punti); il momento centrale di inerzia del sistema nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ (**4** punti).*

Osserviamo anzitutto che il diametro AC $\boldsymbol{e}$verticale. Infatti, dalla geometria del problema abbiamo che

$$\cos C\hat{A}B = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$



che coincide con il valore di $\sin\alpha$ e pertanto $C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ dimostrando quanto affermato. Posto $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega \boldsymbol{e}_z$, siccome $C - A = 10R\boldsymbol{e}_y$ si ha

$$\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A = 3v_0\boldsymbol{e}_x = 10\omega R\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_y = -10\omega R\boldsymbol{e}_x$$

da cui si ottiene $\omega = -\frac{3v_0}{10R}$ e quindi la velocità del centro O del disco è

$$\boldsymbol{v}_O(0) = \boldsymbol{v}_A(0) - \frac{3v_0}{10R}\boldsymbol{e}_z \wedge (10R\boldsymbol{e}_x + 5R\boldsymbol{e}_y) = v_0(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y).$$

Infine, scritto il vettore posizione del centro C^* di istantanea rotazione rispetto ad A come

$$C^* - A = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y,$$

abbiamo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (C^* - A)$$

da cui segue

$$x = \frac{40}{3}R \qquad y = -\frac{10R}{3}.$$

Calcoliamo ora i momenti di inerzia di anello, disco e rettangolo nella direzione di $\boldsymbol{e}_x$. Grazie al teorema di Huygens-Steiner ricaviamo per l'anello

$$I^A_{xx} = 25mR^2 + 50mR^2 = 75mR^2,$$

per il disco abbiamo poi

$$I^A_{xx} = 25mR^2 + 100mR^2 = 125mR^2.$$

Per il rettangolo, conviene introdurre la base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$ con $\boldsymbol{e}_1 = \frac{B-A}{|B-A|}$ e $\boldsymbol{e}_2 = \frac{C-B}{|C-B|}$ perché in questa base la matrice centrale di inerzia è

$$\frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

e siccome

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_1 - \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_y = \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

per cui

$$I^A_{xx} = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + 75mR^2 = \frac{337}{25}mR^2 + 75mR^2 = \frac{2212}{25}mR^2.$$

Per calcolare il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ applichiamo il teorema di composizione dapprima all'insieme dell'anello e del rettangolo, che hanno lo stesso centro di massa. Il momento centrale di inerzia dell'anello nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ è

$$I_{yy} = 25mR^2$$

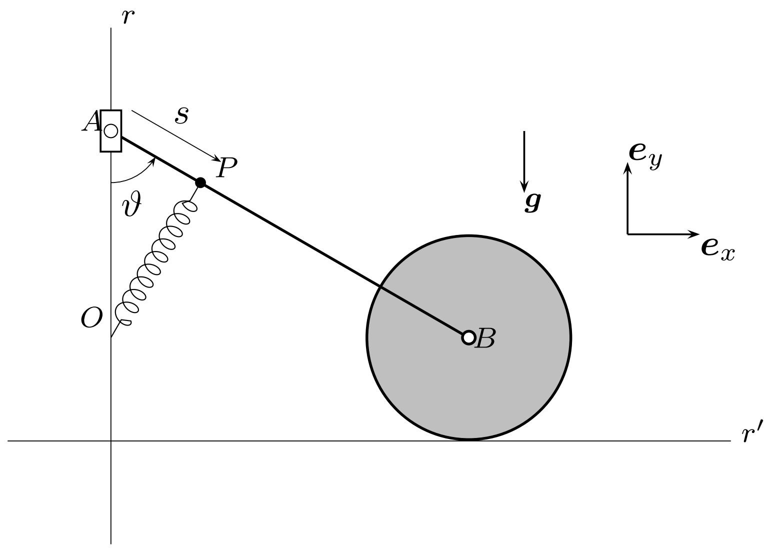
mentre per il rettangolo è

$$I_{yy} = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{288}{25}mR^2.$$

Prendiamo ora il corpo formato da disco ed anello, di massa $5m$ ed applichiamo il teorema di composizione ad esso ed al disco, pensato come secondo corpo. Poiché la distanza tra le rette verticali passanti per i centri di massa di questi due corpi è $10R$ e la massa ridotta è $\frac{20}{9}m$, abbiamo

$$I_{yy} = \frac{288}{25}mR^2 + 25mR^2 + \frac{2000}{9}mR^2 = \frac{58217}{225}mR^2.$$

3.*In un piano verticale un'asta omogenea AB di massa $3m$ e lunghezza $4R$ ha l'estremo A mobile su una guida fissa r verticale mentre B è incernierato senza attrito al centro di un disco di raggio R e massa m, libero di rotolare senza strisciare su una guida orizzontale r'. Un punto materiale P di massa m scorre senza attrito su AB, attratto verso il punto fisso O posto su r, a distanza R da r', da una molla ideale di costante elastica $2mg/R$. Introdotte le coordinate ϑ e s indicate in figura, determinare: l'espressione dell'energia cinetica totale T (***5 punti***); dell'energia potenziale totale (***3 punti***); determinare i valori di $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{s}(0)$ sapendo che, all'istante iniziale il sistema parte dalla quiete con $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ ed $s(0) = 2R$. (***2 punti***)*



La velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ mentre per determinare quella del disco—$\boldsymbol{\omega}_D = \omega_D\boldsymbol{e}_z$ osserviamo che il centro B del disco ha vettore posizione

$$B - O = 4R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x$$

per cui la sua velocità è

$$\boldsymbol{v}_B = 4R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x.$$

D'altra parte, se chiamiamo H il punto di contatto istantaneo tra il disco ed r', deve anche essere, grazie al vincolo di puro rotolamento

$$\boldsymbol{v}_B = \omega_D R\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_y = -\omega_D R\boldsymbol{e}_x$$

per cui, confrontando le due espressioni di $\boldsymbol{v}_B$ abbiamo che

$$\boldsymbol{\omega}_D = -4\dot{\vartheta}\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z.$$

Possiamo allora completare il calcolo dell'energia cinetica del sistema. Per quanto riguarda l'asta, osserviamo che il suo centro di istantanea rotazione si trova nell-intersezione Q tra la verticale passante per B e l'orizzontale per A. Quindi

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_Q\boldsymbol{e}_z = 8mR^2\dot{\vartheta}^2.$$

Quanto al disco, il suo centro di istantanea rotazione è H e dunque

$$T_D = 8\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta\boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_H\boldsymbol{e}_z = 12mR^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta.$$

Infine, per il contributo del punto P osserviamo che

$$P - O = 4R\cos\vartheta\boldsymbol{e}_y + s\boldsymbol{e}_1$$

dove $\boldsymbol{e}_1 := \frac{B-A}{|B-A|}$. Indicando con $\boldsymbol{e}_2$ il versore del piano di moto ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$ ed applicando la formule di Poisson, otteniamo

$$\boldsymbol{v}_P = -4R\dot{\vartheta}\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y + \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

e quindi

$$T_P = \frac{m}{2}[16R\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 - 8R\dot{\vartheta}\sin\vartheta(-\dot{s}\cos\vartheta + s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)].$$

Sommando i tre contributi ottenuti ricaviamo per l'energia cinetica T l'espressione

$$T = 8mR^2\dot{\vartheta}^2 + 12mR^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + 8mR^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 4mR\dot{\vartheta}\sin\vartheta(-\dot{s}\cos\vartheta + s\dot{\vartheta}\sin\vartheta) + \frac{m}{2}[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2].$$

Per il calcolo dell'energia potenziale del sistema, assumiamo come quota di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale l'orizzontale per O e per B e serviamoci del teorema di Carnot per il calcolo della lunghezza di OP. Abbiamo allora

$$V = 8mgR\cos\vartheta - mgs\cos\vartheta + \frac{mg}{R}[s^2 + 16R^2\cos^2\vartheta - 8Rs\cos\vartheta].$$

Possiamo ora scrivere le equazioni di Lagrange per la variabile s e per la variabile ϑ e poi inserire i valori proposti delle coordinate e quelli delle velocità generalizzate $\dot{\vartheta}(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, ottenendo

$$m\ddot{s}(0) = mg - 2\frac{mg}{R}s(0), \qquad \text{cioè} \qquad \ddot{s}(0) = -3g.$$

Per la variabile ϑ otteniamo, in modo analogo:

$$36mR^2\ddot{\vartheta}(0) = -10mgR$$

e quindi

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{5g}{36R}.$$