Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
11 luglio 2012

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

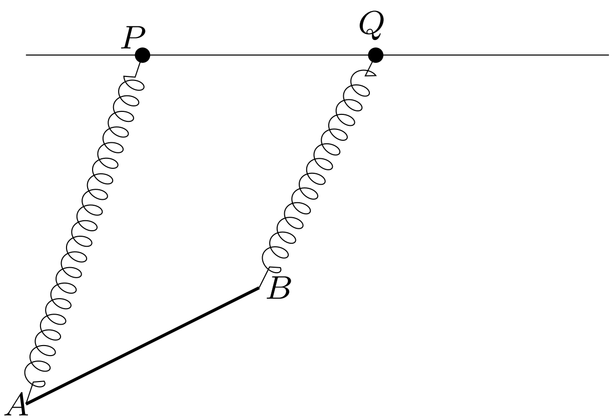
$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,-1,3), \\ \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1,2,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2,0,1) \end{cases}$$

il risultante ed il momento risultante; il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale.

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 13\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = 35$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 17$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -32\boldsymbol{e}_x + 25\boldsymbol{e}_y + 38\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x &= \frac{32}{17} + 3\lambda \\ y &= \frac{25}{17} - 2\lambda \\ z &= \frac{38}{17} + 3\lambda. \end{cases}$$

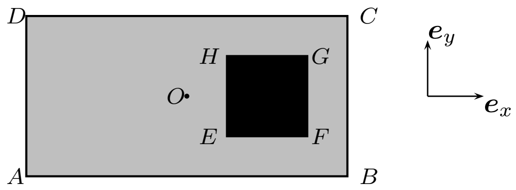
2. *Un'asta AB è libera di muoversi in un piano ed ha gli estremi A e B collegati da due molle, rispettivamente, a due punti materiali P e Q mobili su una guida fissa dello stesso piano. Determinare il numero di gradi di*



libertà del sistema ed individuare un opportuno sistema di coordinate lagrangiane.

Fissata un'origine O sulla guida fissa su cui sono mobili P e Q, occorre una coordinata per fissare la posizione di ciascuno dei punti mobili: ad esempio, le loro ascisse x_P ed x_Q. Per fissare la posizione dell'asta occorre bloccare il centro di massa G–assegnando un valore alle sue coordinate (x_G, y_G)–e l'inclinazione dell'asta, fissando il valore dell'angolo ϑ che AB forma con una direzione fissa di riferimento, ad esempio quella orizzontale. Dunque il sistema possiede 5 gradi di libertà

3. *Da un rettangolo $ABCD$ di centro O, lati $AB = 4\ell$ e $BC = 2\ell$ e massa $4m$ viene asportato un quadrato $EFGH$ di lato ℓ, con i lati EF, FG e GH distanti $\ell/2$ da AB, BC e CD, rispettivamente. Nella posizione del quadrato asportato viene collocato un altro quadrato, sempre di lato ℓ, ma di massa $3m$. Determinare il momento di inerzia della lamina ottenuta in questo modo rispetto all'asse passante per O, diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$, il momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ e quello rispetto all'asse BH.*



Osserviamo che la lamina ottenuta al termine delle operazioni descritte nel testo può essere vista come il rettangolo $ABCD$ pieno, cui viene sovrapposto un quadrato $EFGH$ di massa pari alla differenza tra $3m$, la massa del quadrato posto a riempimento del foro, e la massa del quadrato asportato. Siccome l'area di $ABCD$ è $8\ell^2$ mentre quella di $EFGH$ è ℓ^2, la massa del quadrato asportato è $m/2$ per cui considereremo la lamina ottenuta come un rettangolo $ABCD$ pieno cui viene sovrapposto un quadrato $EFGH$ di massa $5m/2$. L'asse passante per O e diretto lungo $\boldsymbol{e}_x$ passa per i centri di massa sia di $ABCD$ che di $EFGH$ per cui il momento di inerzia complessivo rispetto a quest'asse è

$$I_{O,\boldsymbol{e}_x} = \frac{4}{3}m\ell^2 + \frac{5}{24}m\ell^2 = \frac{37}{24}m\ell^2.$$

Per il calcolo del momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ può esser utile ricorrere al teorema di composizione, osservando che la massa ridotta è $\frac{20}{13}m$, mentre la distanza tra i due assi passanti per i centri di massa di $ABCD$ ed $EFGH$ e diretti lungo $\boldsymbol{e}_y$ è ℓ per cui

$$I_{G,\boldsymbol{e}_y} = \frac{16}{3}m\ell^2 + \frac{5}{24}m\ell^2 + \frac{20}{13}m\ell^2 = \frac{2209}{312}m\ell^2.$$

Infine, per il calcolo del momento di inerzia lungo BH osserviamo che quest'asse passa per il centro di massa di $EFGH$ per cui il contributo del quadrato è $\frac{5}{24}m\ell^2$. La distanza di BH del centro di massa O del rettangolo è $\ell/\sqrt{2}$ per cui il contributo di $ABCD$ al momento di inerzia è

$$I_{BH} = I_{O,\boldsymbol{n}} + 2m\ell^2$$

dove con $I_{O,\boldsymbol{n}}$ indichiamo il momento centrale di inerzia del rettangolo lungo la direzione $\boldsymbol{n}$ di BH. La matrice centrale di inerzia di $ABCD$ nella base associata ad $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ è

$$\mathbb{I}_O = \frac{4m\ell^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

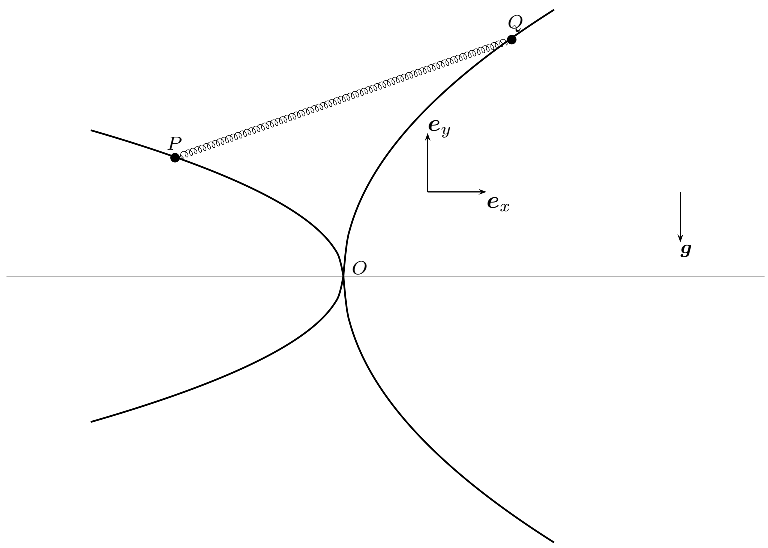
e siccome

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dalla definizione di momento di inerzia, $I_{O,\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{n}$ abbiamo

$$I_{O,\boldsymbol{n}} = \frac{10}{3} m\ell^2.$$

4. *In un piano verticale, due punti materiali P e Q, di masse m e $2m$ sono vincolati, rispettivamente, a muoversi lungo le parabole $x = -y^2/\ell$ e $x = 2y^2/\ell$. I punti si attraggono con una forza elastica ideale di costante $k = \frac{mg}{\ell}$. Dette y e η le ordinate di P e Q, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Supponendo che all'istante $t = 0$ i punti siano in quiete con $y(0) = \eta(0) = \ell$, determinare $\ddot{y}(0)$ e $\ddot{\eta}(0)$.*



Possiamo scrivere i vettori posizione dei punti materiali come

$$P - O = -\frac{y^2}{\ell}\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \qquad Q - O = \frac{2\eta^2}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \eta\boldsymbol{e}_y$$

da cui, derivando rispetto al tempo, si ottengono le loro velocità

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{y}\left(\frac{2y}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right) \qquad \boldsymbol{v}_Q = \dot{\eta}\left(\frac{4\eta}{\ell}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right)$$

per cui l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2}v_P^2 + mv_Q^2 = \frac{m}{2}\dot{y}^2\left(1 + \frac{4y^2}{\ell^2}\right) + m\dot{\eta}^2\left(1 + \frac{16\eta^2}{\ell^2}\right).$$

All'energia potenziale V contribuisco la forza peso di entrambi i punti e la forza elastica:

$$V = mgy + 2mg\eta + \frac{mg}{2\ell}|P-Q|^2 = mgy + 2mg\eta + \frac{mg}{2\ell}\left[(y-\eta)^2 + \frac{1}{\ell^2}\left(2\eta^2+y^2\right)^2\right].$$

Introdotta la lagrangiana $L = T - V$, per scrivere le equazioni di Lagrange dobbiamo calcolare

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\left[\frac{4y^2}{\ell^2}+1\right]\dot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = 2m\left[\frac{16\eta^2}{\ell^2}+1\right]\dot{\eta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4m}{\ell^2}y\dot{y}^2 - mg - \frac{mg}{2\ell}\left[2(y-\eta) + \frac{4}{\ell^2}(2\eta^2+y^2)y\right]$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{32m}{\ell^2}\eta\dot{\eta}^2 - 2mg - \frac{mg}{2\ell}\left[-2(y-\eta) + \frac{8}{\ell^2}(2\eta^2+y^2)\eta\right].$$

Le equazioni di Lagrange sonon allora

$$m\ddot{y}\left[\frac{4y^2}{\ell^2}+1\right] + \frac{8m}{\ell^2}y\dot{y}^2 = \frac{\partial L}{\partial y}$$

e

$$2m\ddot{\eta}\left[\frac{16\eta^2}{\ell^2}+1\right] + \frac{64m}{\ell^2}\eta\dot{\eta}^2 = \frac{\partial L}{\partial \eta}$$

e, posto $t = 0$ e considerate le condizioni iniziali proposte, in cui $\dot{y}(0) = \dot{\eta}(0) = 0$, abbiamo

$$\begin{cases} 5m\ddot{y}(0) = -7mg \\ \\ 34m\ddot{\eta}(0) = -14mg \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $\ddot{y}(0) = -\frac{7}{5}g$ e $\ddot{\eta}(0) = -\frac{7}{17}g$.