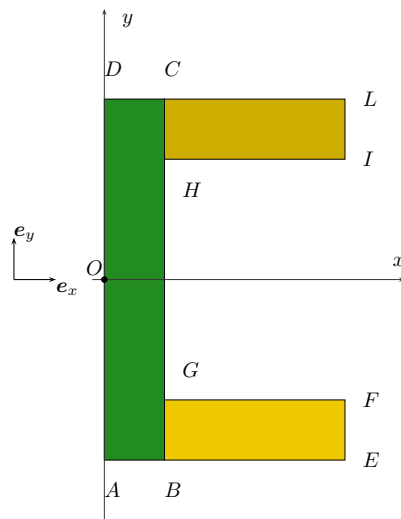


**SOLUZIONI**

ESERCIZIO 1. Un corpo rigido piano è composto da tre lamine rettangolari omogenee, saldate come in figura:  $ABCD$  di lati  $AB = \ell$  e  $AD = 6\ell$  e massa  $3m$ ;  $BEFG$  di lati  $BE = 3\ell$  e  $BG = \ell$  e massa  $2m$ ;  $CHIL$  di lati  $CL = 3\ell$  e  $CH = \ell$  e massa  $m$ . Utilizzando il riferimento cartesiano ortogonale centrato in  $O$ , punto medio di  $AD$ , e con assi  $x$  ed  $y$  paralleli ad  $AE$  e  $AD$ , calcolare:

- (1) La posizione del baricentro  $M$  del corpo nel riferimento assegnato.
- (2) I momenti di inerzia  $I(ABCD)_x$ ,  $I(BEFG)_x$ ,  $I(CHIL)_x$ , rispetto all'asse  $x$ .
- (3) Il momento **centrale** di inerzia  $I_M^z$  del corpo rispetto alla direzione ortogonale al piano.
- (4) La matrice di inerzia complessiva  $[\mathbb{I}_O]$  del corpo rispetto al sistema assegnato.



RISOLUZIONE. Punto 1. Le caratteristiche di inerzia (centro di massa o baricentro e tensore centrale) per le tre lamine rettangolari separatamente sono note. Per trovare il baricentro (centro di massa) del corpo piano complessivo, basta applicare opportunamente il teorema di composizione per i centri di massa (proprietà distributiva). Indicando con  $m_i$  le masse delle tre lamine e con  $C_i$  le coordinate dei loro centri di massa ( $i = 1 \dots 3$ , usando l'indice 1 per  $ABCD$ , 2 per  $BEFG$  e 3 per  $CHIL$ ), abbiamo

$$(1) \quad M - O = \frac{m_1(C_1 - O) + m_2(C_2 - O) + m_3(C_3 - O)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

ossia:

$$(2a) \quad x_M = \frac{m_1 x_{C_1} + m_2 x_{C_2} + m_3 x_{C_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3m\ell/2 + 2m5\ell/2 + m5\ell/2}{6m} = \frac{3}{2}\ell$$

$$(2b) \quad y_M = \frac{m_1 y_{C_1} + m_2 y_{C_2} + m_3 y_{C_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3m \cdot 0 + 2m(-5\ell/2) + m5\ell/2}{6m} = -\frac{5}{12}\ell$$

$$(2c) \quad z_M = 0$$

Punto 2. Per la lamina  $ABCD$  l'asse  $x$  è centrale, quindi:

$$(3) \quad I_x^{(1)} = I(ABCD)_x = \frac{1}{12}m_1(\overline{AD})^2 = \frac{1}{12}3m(6\ell)^2 = 9m\ell^2;$$

per le rimanenti due, basta applicare correttamente la formula di HUYGENS-STEINER, dopo avere osservato che in entrambi i casi l'asse  $x$  è parallelo ad un asse centrale di inerzia per ciascuna lamina, e che la distanza fra essi è, in entrambi i casi,  $d = d_2 = d_3 = \frac{5}{2}\ell$ :

$$(4a) \quad I_x^{(2)} = I(BEFG)_x = \frac{1}{12}m_2(\overline{BG})^2 + m_2 d_2^2 = \frac{38}{3}m\ell^2;$$

$$(4b) \quad I_x^{(3)} = I(CHIL)_x = \frac{1}{12}m_3(\overline{CH})^2 + m_3 d_3^2 = \frac{19}{3}m\ell^2;$$

Punto 3. Basta sommare i contributi delle tre lamine calcolati separatamente. Anche in questo caso, occorre calcolare i momenti di inerzia richiesti partendo dai momenti centrali di inerzia opportunamente trasportati mediante la formula HUYGENS-STEINER; in questo caso gli assi sono perpendicolari al piano della lamina, e le distanze di trasporto fra gli assi coincidono con le distanze fra il baricentro complessivo  $M$  ed i centri di massa delle singole lamine  $C_i$ :

$$(5) \quad d_{MC_i}^2 = (x_M - x_{C_i})^2 + (y_M - y_{C_i})^2.$$

Abbiamo, quindi:

$$(6a) \quad I_M^z(ABCD) = \frac{1}{12}m_1((\overline{AB})^2 + (\overline{AD})^2) + m_1 d_{MC_1}^2 = \frac{1}{12}3m(\ell^2 + (6\ell)^2) + 3m((\frac{\ell}{2})^2 + 0),$$

$$(6b) \quad I_M^z(BEFG) = \frac{1}{12}m_2((\overline{BG})^2 + (\overline{BE})^2) + m_2 d_{MC_2}^2 = \frac{1}{12}2m(\ell^2 + (3\ell)^2) + 2m((2\ell)^2 + (\frac{5\ell}{2})^2),$$

$$(6c) \quad I_M^z(CHIL) = \frac{1}{12}m_3((\overline{CH})^2 + (\overline{HI})^2) + m_3 d_{MC_3}^2 = \frac{1}{12}m(\ell^2 + (3\ell)^2) + m((2\ell)^2 + (\frac{5\ell}{2})^2).$$

Sommando i contributi delle equazioni (6a,6b, 6c) e svolgendo i calcoli otteniamo

$$(7) \quad I_M^z = I_M^z(ABCD) + I_M^z(BEFG) + I_M^z(CHIL) = \frac{613}{48}m\ell^2 + \frac{889}{72}m\ell^2 + \frac{1489}{144}m\ell^2 = \frac{851}{24}m\ell^2.$$

Punto 4. La matrice richiesta è la rappresentazione sulla base canonica delle matrici  $3 \times 3$  del tensore di inerzia calcolato in  $O$ , e la sua struttura generale sarà:

$$(8) \quad I_O = [\mathbb{I}_O] = \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & 0 \\ I_{1,2} & I_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3,3} \end{pmatrix},$$

dove abbiamo sfruttato le proprietà di simmetria della matrice; il teorema degli assi perpendicolari garantisce, inoltre, che  $I_{3,3} = I_{1,1} + I_{2,2}$ . Osserviamo che il termine  $I_{1,1}$  è già noto dal punto 2; infatti, usando le Eq. (3,4a,4b):

$$(9) \quad I_{1,1} = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = I(ABCD)_x + I(BEFG)_x + I(CHIL)_x = 28m\ell^2.$$

In generale, ogni contributo si trova applicando il teorema di HUYGENS-STEINER:

$$(10) \quad \mathbb{I}_O(i) = \mathbb{I}_{C_i}(i) + m_i d_i^2 (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \quad i = 1 \dots 3,$$

dove  $\mathbb{I}_{C_i}(i)$  è il tensore centrale di inerzia (ossia, calcolato in  $C_i$ ) della lamina  $i$ -esima,  $d_i$  la distanza tra  $O$  e  $C_i$  ed  $\mathbf{n}_i$  un versore diretto come  $C_i - O$  ( $\mathbf{I}$  è il tensore identità di ordine 3).

Per la lamina  $ABCD$  si ha immediatamente che

$$(11) \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_x, \quad d_1 = \frac{\ell}{2};$$

dalle posizioni dei centri di massa delle altre lamine otteniamo, invece

$$(12a) \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y), \quad d_2 = 5\sqrt{2}\frac{\ell}{2},$$

$$(12b) \quad \mathbf{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad d_3 = 5\sqrt{2}\frac{\ell}{2}$$

(ossia, in altre parole, i versori  $\mathbf{n}_2$  ed  $\mathbf{n}_3$  sono inclinati di  $\pm\frac{\pi}{4}$  rispetto all'asse  $x$ ).

Ogni termine della matrice di inerzia si ottengono calcolando il corrispondente termine nella rappresentazione:

$$(13) \quad \begin{aligned} I_{k,j}(i) &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbb{I}_O(i) \mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{e}_k \cdot \mathbb{I}_{C_i}(i) \mathbf{e}_j + m_i d_i^2 \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{I}(3) - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \mathbf{e}_j \\ &= (I_{C_i})_{k,j} + m_i d_i^2 (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j - (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_j)), \end{aligned}$$

con  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$  ed  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ .

Per esempio, il contributo fuori diagonale per la lamina  $BEFG$  è l'entrata

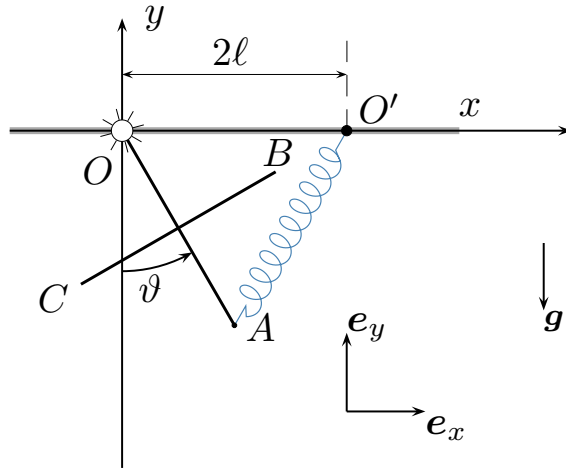
$$(14) \quad I_{1,2}(2) = 0 + 2m(d_2)^2 \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{I}(3) - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \mathbf{e}_y = 2m(5\sqrt{2}\frac{\ell}{2})^2 (0 - \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{25}{2}m\ell^2.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo per la matrice complessiva:

$$(15) \quad I_O = [\mathbb{I}_O] = \begin{pmatrix} 28m\ell^2 & \frac{25}{4}m\ell^2 & 0 \\ \frac{25}{4}m\ell^2 & 22m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 50m\ell^2 \end{pmatrix}.$$

**ESERCIZIO 2.** In un piano verticale, due aste  $OA$  e  $BC$ , di lunghezza  $2\ell$  ciascuna e massa  $3m$  e  $m$ , sono saldate a croce nei rispettivi punti medi. Il corpo piano così ottenuto è incernierato nell'estremo  $O$ ; l'estremo  $A$  è soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante  $k = \frac{mg}{\ell}$  verso il punto fisso  $O'$  posto sulla stessa quota di  $O$ , a distanza  $2\ell$  da esso. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\vartheta$  che  $OA$  forma con la verticale discendente, contato positivamente in senso antiorario (vedi figura), si determini:

- (1) l'energia cinetica  $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$  del sistema;
- (2) il potenziale  $U(\vartheta)$  del sistema;
- (3) la/le configurazioni di equilibrio del sistema
- (4) la qualificazione della stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate;
- (5) l'equazione del moto (equazione di Lagrange);



RISOLUZIONE. Punto 1. La velocità angolare del corpo rigido è

$$(16) \quad \omega = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_z.$$

Per calcolare l'energia cinetica, è sufficiente osservare che il punto  $O$ , che partecipa al moto rigido, è fisso; il teorema di KÖNIG permette di scrivere

$$(17) \quad T = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbb{I}_O \omega = \frac{1}{2} I_O^z \dot{\vartheta}^2,$$

dove  $\mathbb{I}_O$  è il tensore di inerzia del corpo calcolato in  $O$  e  $I_O^z$  è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto, passante per  $O$ ; occorre calcolare esplicitamente quest'ultima quantità.

Per fare ciò, ricorriamo alla formula di HUYGENS-STEINER, essendo noto il momento centrale di inerzia di un'asta, rispetto ad una direzione ortogonale all'asta:

$$(18) \quad I_O^z = \frac{1}{3} 3m (2\ell)^2 + \left( \frac{1}{12} m (2\ell)^2 + m\ell^2 \right) = \frac{16}{3} m \ell^2.$$

Sostituendo l'Eq. (18) nell'Eq. (17) otteniamo

$$(19) \quad T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{8}{3} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Punto 2. Il centro di massa (baricentro) complessivo del corpo si trova nel punto  $M$  di incrocio delle aste, per simmetria.

Al potenziale totale contribuiscono un termine gravitazionale ed uno elastico;

$$(20) \quad U = -4mg y_M - \frac{1}{2} k (\overline{AO'})^2,$$

dove  $y_M$  è l'ordinata di  $M$  nel sistema di riferimento usato. Per il secondo termine, occorre esprimere il quadrato della distanza tra i punti  $A$  ed  $O'$  (che rappresenta l'allungamento della molla ideale di richiamo elastico) in funzione di  $\vartheta$ ; l'angolo in  $O$  del triangolo  $AOO'$  è  $\widehat{AOO'} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ . Usando il teorema di CARNOT per i triangoli abbiamo:

$$(21) \quad (\overline{AO'})^2 = (\overline{AO})^2 + (\overline{OO'})^2 - 2\overline{AO}\overline{OO'} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = 8\ell^2 - 8\ell^2 \sin \vartheta.$$

Sostituendo l'Eq. (21) nell'Eq. (20) otteniamo:

$$(22) \quad U(\vartheta) = 4mgl \cos \vartheta + 4mgl \sin \vartheta,$$

dove abbiamo ommesso le costanti additive, inessenziali, ed abbiamo sfruttato il valore della costante elastica  $k = \frac{mg}{\ell}$ .

Punto 3. Non vi sono configurazioni limite da esaminare; la regolarità del potenziale consente di individuare tutte le configurazioni di equilibrio come quelle che annullano la derivata prima  $U'(\vartheta)$ , che garantiscono la stazionarietà del potenziale. Abbiamo

$$(23) \quad U'(\vartheta) = -4mgl \sin \vartheta + 4mgl \cos \vartheta = 0,$$

ossia

$$(24) \quad \tan \vartheta = 1,$$

che è soddisfatta dagli angoli distinti

$$(25) \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \vartheta_2 = 5\frac{\pi}{4},$$

a meno di multipli interi di  $2\pi$ , inessenziali per individuare le configurazioni descritte.

Punto 4. La regolarità della funzione potenziale consente di caratterizzare la stabilità delle configurazioni di equilibrio dalla derivata seconda. Otteniamo

$$(26) \quad U''(\vartheta) = -4mgl \cos \vartheta - 4mgl \sin \vartheta;$$

ora, per  $\vartheta_1$ ,

$$(27) \quad U''(\vartheta_1) = -4mgl \cos \frac{\pi}{4} - 4mgl \sin \frac{\pi}{4} = -4mgl\sqrt{2} < 0,$$

in  $\vartheta_1$  il potenziale  $U(\vartheta)$  ha un massimo isolato, quindi la configurazione è *stabile* in base al criterio di *Dirichlet-Lagrange*.

Invece, per per  $\vartheta_2$ ,

$$(28) \quad U''(\vartheta_2) = -4mgl \cos 5\frac{\pi}{4} - 4mgl \sin 5\frac{\pi}{4} = 4mgl\sqrt{2} > 0,$$

dall'analisi della derivata seconda è possibile stabilire che in  $\vartheta_2$  il potenziale  $U(\vartheta)$  *non* ha un massimo isolato, quindi la configurazione è *instabile* in base al criterio di LIAPUNOV.

Punto 5. Il sistema presenta un grado di libertà; le forze attive sono conservative. La funzione di LAGRANGE  $L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = T(\dot{\vartheta}) + U(\vartheta)$  permette di scrivere subito l'equazione pura del moto (equazione di Lagrange):

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \right) = 0,$$

ossia:

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\vartheta} \right) - 4mgl \sin \vartheta + 4mgl \cos \vartheta = \frac{4}{3} m \ell^2 \ddot{\vartheta} + 4mgl \sin \vartheta - 4mgl \cos \vartheta = 0$$

o, anche, semplificando:

$$(31) \quad \ddot{\vartheta} = 3\frac{g}{\ell}(\sin \vartheta - \cos \vartheta).$$