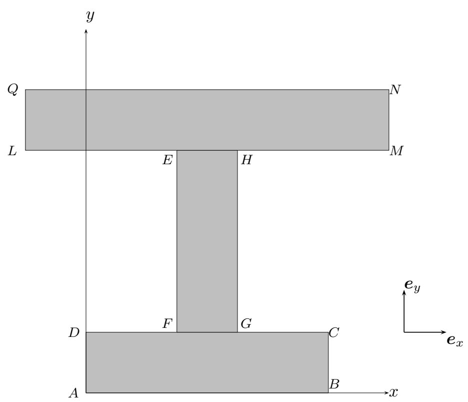
Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica Matematica (Ingegneria Civile ed Ambientale)
Appello del 18 gennaio 2012

Un corpo rigido piano è ottenuto saldando tre rettangoli omogenei $ABCD$, $EFGH$ e $LMNQ$, disposti come in figura, con i punti medi di FG e CD coincidenti e con i punti medi di EH ed LM pure coincidenti. Il rettangolo $ABCD$, di massa $4m$ ha lati $AB = 4\ell$ e $BC = \ell$; il rettangolo $EFGH$, di massa m, ha lati $EF = 4\ell$ e $FG = \ell$; il rettangolo $LMNQ$, di massa $4m$, ha lati $LM = 6\ell$ ed $MN = \ell$. Si determinino:



1. le coordinate del baricentro R del corpo rigido rispetto al punto A;
2. il momento di inerzia del corpo rigido rispetto ad AB;
3. il momento centrale di inerzia del corpo rigido nella direzione $\boldsymbol{e}_y$.

L'ascissa del baricentro è 2ℓ, visto che i baricentri delle lamine componenti sono tutti allineati sulla retta $x = 2\ell$. Per il calcolo dell'ordinata, osserviamo che i baricentri di $ABCD$, $EFGH$ ed $LMNQ$ hanno ordinate, rispettivamente $\frac{\ell}{2}$, 3ℓ e $\frac{11}{2}\ell$, per cui

$$y_R = 3\ell.$$

Grazie al teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia di $ABCD$ rispetto alla retta AB è $\frac{4}{3}m\ell^2$, quello di $EFGH$ è $\frac{31}{3}m\ell^2$ mentre quello di $LMNQ$ è $\frac{364}{3}m\ell^2$ per cui, sommando i risultati, si ottiene

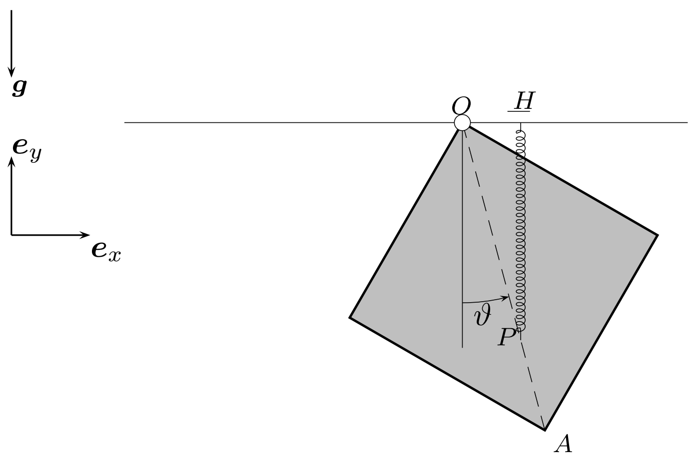
$$I_{AB} = 133m\ell^2.$$

Il calcolo del momento centrale di inerzia nella direzione $\boldsymbol{e}_y$ è semplificato dal fatto che i baricentri dei tre rettangoli sono allineati lungo $\boldsymbol{e}_y$ per cui è sufficiente sommare direttamente i tre momenti centrali in quella direzione, ottenendo

$$I_{R,\boldsymbol{e}_y} = \left[\frac{64}{12} + \frac{1}{12} + \frac{144}{12}\right] m\ell^2 = \frac{209}{12} m\ell^2.$$

In un piano verticale, un quadrato omogeneo di massa $3\sqrt{2}m$ e lato di lunghezza ℓ è libero di ruotare attorno al suo vertice O, incernierato ad un punto fisso. Il quadrato è soggetto ad una forza elastica ideale di costante $\gamma mg/\ell$ che attrae il punto P posto sulla diagonale OA e tale che $OP = \frac{3}{4}OA$ verso il punto H sull'orizzontale passante per O tale che PH è sempre verticale. Introdotta la coordinata ϑ indicata in figura, si determini

1. l'energia cinetica $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$ del sistema;
2. il potenziale $U(\vartheta)$ del sistema;
3. i valori di ϑ nelle configuazioni di equilibrio;
4. la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di γ;
5. posto $\gamma = 2$ si determini la frequenza delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile.



La lamina quadrata ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ per cui l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{I\!I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_{O,\boldsymbol{e}_z} \dot{\vartheta}^2 = \sqrt{2} m\ell^2 \dot{\vartheta}^2$$

dove, per trovare il momento di inerzia della lamina $I_{O,\boldsymbol{e}_z}$ rispetto all'asse $\boldsymbol{e}_z$ passante per O, ci siamo serviti del teorema di Huygens-Steiner.

Il potenziale è formato da un termine gravitazionale $3mg\ell\cos\vartheta$ e dal termine elastico $-\frac{9}{16}\gamma mg\ell\cos^2\vartheta$ per cui, in definitiva

$$U = 3mg\ell\cos\vartheta - \frac{9}{16}\gamma mg\ell\cos^2\vartheta.$$

Le configurazioni di equilibrio annullano la derivata di U rispetto a ϑ, cioè risolvono l'equazione

$$U' = -3mg\ell\sin\vartheta + \frac{9}{8}\gamma mg\ell\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

che si fattorizza in

$$3mg\ell\sin\vartheta(-1 + \frac{3}{8}\gamma\cos\vartheta) = 0$$

da cui segue che

$$\vartheta = 0 \qquad \vartheta = \pi$$

sono sempre configurazioni di equilibrio mentre

$$\cos\vartheta = \frac{8}{3\gamma} \tag{1}$$

può fornire altre configurazioni di equilibrio a patto che sia $\gamma \geq \frac{8}{3}$. Per lo studio della stabilità occorre calcolare la derivata seconda di U,

$$U'' = -3mg\ell\cos\vartheta + \frac{9}{8}\gamma mg\ell[\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta]$$

e studiarne il segno nelle configurazioni di equilibrio trovate. Ora,

$$U''(0) = mg\ell(-3 + \frac{9}{8}\gamma) < 0$$

quando

$$\gamma < \frac{8}{3}:$$

per i valori di $\gamma \in [0, \frac{8}{3})$, $\vartheta = 0$ è stabile, mentre è instabile se $\gamma > \frac{8}{3}$. Poiché

$$U''(\pi) = mg\ell(3 + \frac{9}{8}\gamma) > 0$$

la configurazione $\vartheta = \pi$ è sempre instabile mentre, riscritta

$$U'' = -3mg\ell\cos\vartheta + \frac{9}{8}\gamma mg\ell[2\cos^2\vartheta - 1],$$

nelle configurazioni caratterizzate da (1) si ha

$$U'' = mg\ell\left(\frac{8}{\gamma} - \frac{9}{8}\gamma\right)$$

che è negativa a patto di prendere $\gamma > \frac{8}{3}$: le configurazioni per cui vale (1) sono dunque stabili laddove esistono.

Ponendo $\gamma = 2$, la sola configurazione di equilibrio stabile che sopravvive è $\vartheta = 0$. Se indichiamo con A e B le derivate seconde di T rispetto a $\dot{\vartheta}$ e di U rispetto a ϑ, la pulsazione ω delle piccole oscillazioni in un intorno di una configurazione di equilibrio stabile è

$$\omega = \sqrt{\frac{-B}{A}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}}.$$

e la frequenza è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}}.$$