Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Correzione prova scritta
Esame di Fisica Matematica
7 settembre 2011

1. *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2,-1,2), \\ \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1,1,3), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,4,-1) \end{cases}$$

1. *il risultante ed il momento risultante;*
2. *il trinomio invariante;*
3. *l'equazione dell'asse centrale;*
4. *(per gli studenti che hanno frequentato nell'anno accademico corrente) Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (1,1,1)$.*

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -12\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$ per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = -26$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 24$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 36\boldsymbol{e}_x - 38\boldsymbol{e}_y + 40\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = -\frac{19}{12} + 4\lambda \\ z = \frac{5}{3} + 2\lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, dal teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = -10\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre che

$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

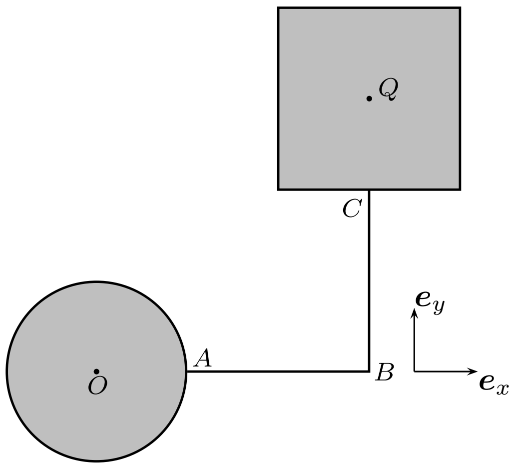
e dunque bisogna scegliere $\boldsymbol{v}$ in modo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$: ad esempio $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z$. Allora sarà

$$S - Q = \frac{1}{5}(8\boldsymbol{e}_x - 25\boldsymbol{e}_y - 4\boldsymbol{e}_z)$$

per cui $S - O = \frac{1}{5}(13\boldsymbol{e}_x - 20\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$.

2. *Un corpo rigido piano è formato da due aste AB e BC ciascuna di massa $2m$ e lunghezza 2ℓ, saldate tra loro ortogonalmente in B, da un disco di massa $3m$ e raggio ℓ saldato ad A in un punto della sua* *circonferenza in modo che O sia sul prolungamento di AB e da un quadrato di massa m e lato 2ℓ avente il punto medio di un suo lato saldato in C e con il centro di simmetria Q sul prolungamento di BC, come indicato in figura. Ad un certo istante $t = 0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di O è $\boldsymbol{v}_O = v_0(5\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y)$ mentre quella di Q è $\boldsymbol{v}_Q = v_0(2\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y)$, dove v_0 è una velocità caratteristica.*

1. *Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(0)$ del corpo all'istante $t = 0$;*
2. *trovare la velocità $\boldsymbol{v}_B(0)$ del punto B all'istante $t = 0$;*
3. *trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t = 0$ rispetto al punto O;*
4. *determinare le coordinate del centro di massa del corpo rispetto al punto O;*
5. *determinare il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per O e inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto all'orizzontale;*
6. *determinare il momento centrale di inerzia del corpo nella direzione $\boldsymbol{e}_x$.*



Al solito, poniamo $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega \boldsymbol{e}_z$ per cui

$$\boldsymbol{v}_Q - \boldsymbol{v}_O = v_0(-3\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y) = 3\omega\ell \boldsymbol{e}_z \wedge (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$$

da cui segue $\omega = \frac{v_0}{\ell}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + 3v_0 \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_x = v_0(5\boldsymbol{e}_x + 7\boldsymbol{e}_y).$$

Infine, scritto il vettore posizione del centro C^* di istantanea rotazione rispetto ad O come $C^* - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, deve essere

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (C^* - O)$$

che equivale a

$$x = -4\ell \qquad y = 5\ell.$$

Le coordinate (x_G, y_G) del centro di massa del sistema rispetto ad O si ottengono osservando che quelle del disco, di AB, di BC e del quadrato sono, rispettivamente: $(0,0)$, $(2\ell,0)$, $(3\ell,\ell)$ e $(3\ell,3\ell)$ per cui, considerando le masse delle varie parti del sistema,

$$x_G = \frac{4m\ell + 6m\ell + 3m\ell}{8m} = \frac{13}{8}\ell \qquad y_G = \frac{2m\ell + 3m\ell}{8m} = \frac{5}{8}\ell.$$

L'asse per O di direzione $\boldsymbol{n}$ che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale passa per il centro di massa Q del quadrato mentre l'asse diretto lungo $\boldsymbol{n}$ ma passante per il centro di massa di AB passa in realtà anche per il centro di massa di BC e dista dal primo asse $\ell\sqrt{2}$. Quindi, grazie al teorema di Huygens-Steiner, si ha

$$I_{O,\boldsymbol{n}} = \frac{3}{4}m\ell^2 + 2\left(\frac{1}{12}2m4\ell^2\sin^2\frac{\pi}{4} + 4m\ell^2\right) + \frac{1}{12}4m\ell^2 = \frac{39}{4}m\ell^2.$$

Per rispondere all'ultimo quesito è sufficiente applicare ad ogni sottocorpo che forma il sistema il teorema di Huygens-Steiner e ricordare il valore di y_G trovato in precedenza. I vari contributi sono: per il disco

$$\frac{3}{4}m\ell^2 + 3m\frac{25}{64}\ell^2 = \frac{123}{64}m\ell^2;$$

per AB

$$2m\frac{25}{64}\ell^2 = \frac{50}{64}m\ell^2;$$

per BC

$$\frac{1}{12}8m\ell^2 + 2m\frac{9}{64}\ell^2 = \frac{182}{192}m\ell^2;$$

e per il quadrato

$$\frac{1}{12}4m\ell^2 + m\frac{361}{64}\ell^2 = \frac{1147}{192}m\ell^2.$$

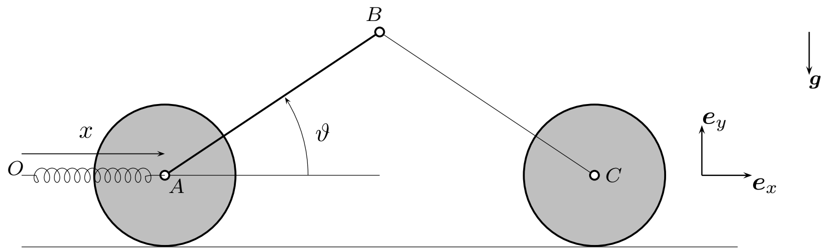
Sommando tutti questi contributi si ottiene

$$I_{G,\boldsymbol{e}_x} = \frac{231}{24}m\ell^2.$$

3. *In un piano verticale, due dischi di ugual raggio R ed ugual massa m rotolano senza strisciare su una guida orizzontale e recano incernierati nei centri rispettivi gli estremi A e C di due aste AB e BC di ugual lunghezza $4R$ che sono ulteriormente incernierate nell'estremo comune B. L'asta AB ha massa $2m$ mentre l'asta BC ha massa trascurabile. Il centro A del primo disco è poi attratto da una molla ideale di costante elastica $2mg/R$ verso un punto fisso O posto alla stessa quota di A. Introdotte le coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in figura, determinare l'energia potenziale e l'energia cinetica del sistema. Se all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $x = R$ e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, determinare i valori di $\ddot{x}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$.*

Il momento di inerzia di ciascun disco rispetto al punto di contatto con la guida è, dal teorema di Huygens-Steiner, $\frac{3}{2}mR^2$. La velocità angolare del disco centrato in A è $-\frac{\dot{x}}{R}\boldsymbol{e}_z$, in virtù del vincolo di puro rotolamento. Per il secondo disco abbiamo

$$C - O = (x + 8R\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_x \qquad \text{e pertanto} \qquad \boldsymbol{v}_C = (\dot{x} - 8R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\boldsymbol{e}_x$$



D'altra parte il vincolo di puro rotolamento impone, detto H il punto di contatto del disco con la guida, $\boldsymbol{v}_C = \omega \boldsymbol{e}_z \wedge (C - H) = \omega R \boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{e}_y = -\omega R \boldsymbol{e}_x$ per cui deve essere

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(8R\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \dot{x})}{R}\boldsymbol{e}_z.$$

Infine, detto $\boldsymbol{e}_1$ il versore diretto come $B - A$ e dunque solidale all'asta AB, che ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, poiché il vettore posizione del centro di massa G dell'asta è

$$G - O = x\boldsymbol{e}_x + 2R\boldsymbol{e}_1 \qquad \text{abbiamo} \qquad \boldsymbol{v}_G = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + 2R\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2,$$

dove $\boldsymbol{e}_2$ è il versore del piano di moto ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. In definitiva, i contributi dell'energia cinetica sono: per il disco di centro A, $\frac{3}{4}m\dot{x}^2$; per il disco di centro C, $\frac{3}{4}m(8R\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \dot{x})^2$; per l'asta AB

$$m[\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\vartheta}^2 + 4R\dot{x}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2] + \frac{4}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2 = m\dot{x}^2 + \frac{16}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2 - 4mR\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

Sommando questi contributi otteniamo

$$T = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{16}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2 + 48mR^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 16mR\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

L'enegia potenziale consta del solo termine elastico per la molla che sollecita A e del termine gravitazionale dovuto al peso dell'asta AB, la sola il cui centro di massa cambi di quota durante il moto, per cui

$$V = 4mgR\sin\vartheta + \frac{mg}{R}x^2.$$

Pertanto la lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{16}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2 + 48mR^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 16mR\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - 4mgR\sin\vartheta - \frac{mg}{R}x^2$$

e per ottenere le equazioni di Lagrange calcoliamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 5m\dot{x} - 16mR\dot{\vartheta}\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2mg}{R}x$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{32}{3}mR^2\dot{\vartheta} + 96mR^2\dot{\vartheta}\sin^2\vartheta - 16mR\dot{x}\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 96mR^2\dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - 16mR\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - 4mgR\cos\vartheta$$

per cui, dopo qualche semplificazione algebrica, abbiamo

$$5m\ddot{x} - 16mR\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - 16mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta = -\frac{2mg}{R}x$$

e

$$\frac{32}{3}mR^2\ddot{\vartheta} + 96mR^2\ddot{\vartheta}\sin^2\vartheta + 96mR^2\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 16mR\ddot{x}\sin\vartheta = -4mgR\cos\vartheta$$

per le equazioni di Lagrange. Se inseriamo le condizioni iniziali fornite dal testo $x(0) = R$, $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\dot{\vartheta} = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 5\ddot{x}(0) - 8\sqrt{2}R\ddot{\vartheta}(0) = -2g \\ 88R\ddot{\vartheta}(0) - 12\sqrt{2}\ddot{x}(0) = -3\sqrt{2}g \end{cases}$$

e, moltiplicando la prima equazione per 11 e sottraendole la seconda moltiplicata per $\sqrt{2}$ ricaviamo

$$\ddot{x}(0) = -\frac{28}{31}g$$

e quindi, per sostituzione,

$$\ddot{\vartheta}(0) = -\frac{39\sqrt{2}}{248}\frac{g}{R}.$$