UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE

***Correzione prova scritta***
***Esame di Fisica Matematica***
*22 febbraio 2011*

**1.** *Considerare il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2,1,-1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,0,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 4\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1,1). \end{cases}$$

1. *Calcolare il risultante ed il momento risultante del sistema.*
2. *Calcolare il trinomio invariante del sistema.*
3. *Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema.*
4. *(per studenti che hanno frequentato nel corrente anno accademico) Determinare un sistema di vettori applicati equivalente a quello assegnato e formato da due vettori, di cui uno applicato in* $(-3, 1, 2)$.

Il risultante vale $\boldsymbol{R} = 7\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z$ ed il momento risultante rispetto ad $O$ è $\boldsymbol{M}_O = -(7\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z)$ e dunque il trinomio invariante vale $\mathcal{I} = -72$. Per trovare l'equazione dell'asse centrale calcoliamo $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -11\boldsymbol{e}_x + 28\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$ e $|\boldsymbol{R}|^2 = 62$ per cui i punti $Q$ dell'asse centrale sono del tipo $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ e soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{62} + 7\lambda \\ \\ y = \frac{14}{31} + 2\lambda \\ \\ z = \frac{7}{62} + 3\lambda. \end{cases}$$

Dal teorema del trasporto sappiamo che

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = 6(-\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z).$$

Un sistema equivalente che soddisfi le richieste del testo può essere $\Sigma := \{(\boldsymbol{R}, Q), (-\boldsymbol{v}, Q), (\boldsymbol{v}, P)\}$ dove

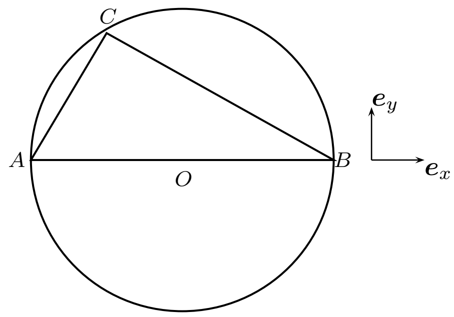
$$(P - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q = 6(-\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z).$$

Questa equazione si può sempre soddisfare prendendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z$, cosicché $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$, e

$$P - Q = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{M}_Q = \frac{1}{2}(-24\boldsymbol{e}_x - 24\boldsymbol{e}_z) = -12(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z)$$

per cui

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = -15\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 10\boldsymbol{e}_z.$$




**2.** *Un corpo rigido piano è formato da un anello omogeneo di massa $2m$ e raggio $R$ e da tre aste: $AB$, di massa $m$ e lunghezza $2R$ disposta lungo un diametro dell'anello, $AC$ di massa $2m$ e lunghezza $R$ e $BC$, di massa $m$ e lunghezza $R\sqrt{3}$ disposte in modo da avere il vertice comune $C$ coincidente con un punto dell'anello. Ad un certo istante $t = t_0$ il corpo occupa la configurazione indicata in figura e la velocità di $C$ è $\boldsymbol{v}_C = v_0\boldsymbol{e}_x$ e quella di $B$ è $\boldsymbol{v}_B = v_0(2\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)$, dove $v_0$ è una velocità caratteristica.*

1. Determinare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ del corpo;
2. trovare la velocità $\boldsymbol{v}_A(t_0)$ del punto $A$ all'istante $t_0$;
3. trovare analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione all'istante $t_0$, rispetto al centro $O$ dell'anello;
4. determinare il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto $O$ e diretto lungo $\boldsymbol{e}_y$.

Scritto $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ ed osservato che $B - C = R\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y)$, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_C = v_0(\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y) = \omega\boldsymbol{e}_z \wedge (B - C) = \omega R\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x\right)$$

da cui otteniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2v_0}{\sqrt{3}R}\boldsymbol{e}_z.$$

Utilizzando ancora la formula fondamentale della cinematica rigida ed osservando che $A-C = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y)$ otteniamo

$$\boldsymbol{v}_A = v_0(2\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_y).$$

Se $Q$ indica il centro di istantanea rotazione e poniamo $Q - A = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, siccome deve essere $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$ abbiamo

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q - A)$$

e ricaviamo $x = \frac{R}{2}$ ed $y = \sqrt{3}R$. Per determinare la posizione di $Q$ rispetto ad $O$ è sufficiente scrivere

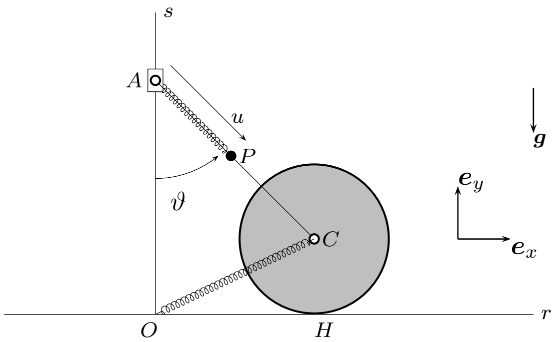
$$Q - O = (Q - A) + (A - O) = -\frac{R}{2}\boldsymbol{e}_x + R\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y.$$

Per il calcolo del momento di inerzia $I_{O,\boldsymbol{e}_y}$ osserviamo che la direzione $\boldsymbol{e}_y$ è autovettore per il tensore centrale di inerzia sia di $AB$ che dell'anello, con momenti di inerzia, rispettivamente $\frac{1}{3}mR^2$ ed $mR^2$. Qualche accortezza in più occorre esercitare per il calcolo del momento di inerzia relativo ad $AC$ e $CB$. Siccome la distanza delle rette dirette lungo $\boldsymbol{e}_y$, una passante per $O$ e l'altra passante per il punto medio di $AC$ è $3R/4$ mentre quella tra le rette dirette lungo $\boldsymbol{e}_y$, una passante per $O$ e l'altra passante per il punto medio di $BC$ è $R/4$ per cui, applicando il teorema di Huygens-Steiner

$$I_{O,\boldsymbol{e}_y} = mR^2\left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{24} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{105}{48}mR^2.$$

**3.** *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $m$ e raggio $R$ rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale $r$. Incernierata al centro $C$ del disco vi è l'estremo di un'asta $AC$ di massa $2m$ e lunghezza $3R$ che ha l'estremo $A$ vincolato a scorrere senza attrito su una guida verticale $s$ tramite un carrello bilatero. Su $AC$ è mobile senza attrito un punto materiale $P$ di massa $m$, richiamato verso $A$ da una molla ideale di costante elastica $mg/R$. Un'altra molla ideale di costante $mg/R$ e lunghezza a riposo nulla attrae $C$ verso il punto $O$ di intersezione delle guide $r$ ed $s$. Utilizzando come coordinate libere l'angolo $\vartheta$ che l'asta forma con la verticale, orientato come in figura, e l'ascissa $u$ di $P$ su $AC$:*

1. *trovare l'espressione dell'energia cinetica $T$ del sistema;*
2. *trovare l'espressione dell'energia potenziale $V$ del sistema;*
3. *scrivere le equazioni di Lagrange;*
4. *nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ il sistema parta in quiete con $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$ ed $u(0) = R$, calcolare $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{u}(0)$.*




L'energia cinetica dell'asta $AC$ si calcola facilmente osservando che il suo centro di istantanea rotazione si trova all'intersezione tra la verticale per $C$ e l'orizzontale per $A$. Abbiamo allora

$$T^{(AC)} = 3mR^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per l'energia cinetica del disco, osserviamo che il punto $H$ di contatto istantaneo con $r$ è centro di istantanea rotazione; occorre determinare la velocità angolare del disco in funzione di $\vartheta$ e $\dot{\vartheta}$. Per questo consideriamo il centro $C$ del disco. Da una parte abbiamo

$$\boldsymbol{v}_C = \omega\boldsymbol{e}_z \wedge (C - H) = -\omega R\boldsymbol{e}_x;$$

D'altra parte, siccome $C - O = 3R\sin\vartheta\boldsymbol{e}_x + R\boldsymbol{e}_y$, abbiamo anche

$$\boldsymbol{v}_C = 3R\dot\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_x$$

e dunque, uguagliando le due espressioni di $\boldsymbol{v}_C$ occorre che sia

$$\omega = -3\dot\vartheta\cos\vartheta.$$

In questo modo, grazie all'impiego del teorema di Huygens-Steiner, otteniamo

$$T^{(\mathcal{D})} = \frac{27}{4}mR^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta.$$

Infine, per l'energia cinetica di $P$ introduciamo la terna mobile con $AC$ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_z\}$, con $\boldsymbol{e}_1$ diretto lungo $AC$, orientato da $A$ verso $C$ e con $\boldsymbol{e}_2$ orientato in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Abbiamo allora

$$P - O = R(1 + 3\cos\vartheta)\boldsymbol{e}_y + u\boldsymbol{e}_1$$

per cui, derivando rispetto al tempo ed osservando che la terna mobile introdotta ruota con la velocità angolare $\dot\vartheta\boldsymbol{e}_z$ dell'asta, abbiamo dalle formule di Poisson

$$\boldsymbol{v}_P = -3R\dot\vartheta\sin\vartheta\boldsymbol{e}_y + \dot u\boldsymbol{e}_1 + u\dot\vartheta\boldsymbol{e}_2$$

per cui

$$T_P = \frac{m}{2}\left[9R^2\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta + \dot u^2 + \dot\vartheta^2u^2 + 6R\dot\vartheta\dot u\sin\vartheta\cos\vartheta - 6Ru\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta\right].$$

L'energia cinetica complessiva è dunque

$$T = 3mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{27}{4}mR^2\dot\vartheta^2\cos^2\vartheta + \frac{m}{2}\left[9R^2\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta + \dot u^2 + \dot\vartheta^2u^2 + 6R\dot\vartheta\dot u\sin\vartheta\cos\vartheta - 6Ru\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta\right].$$

Quanto all'energia potenziale $V$ dobbiamo considerare i contributi dell'energia gravitazionale per asta e punto $P$ ed i termini elastici. A conti fatti si ottiene

$$V = 3mgR\cos\vartheta + mg(3R - u)\cos\vartheta + \frac{9mgR}{2}\sin^2\vartheta + \frac{mg}{2R}u^2.$$

Introdotta la lagrangiana $L = T - V$ l'equazione di Lagrange relativa alla variabile $\vartheta$ è

$$\begin{aligned}
&6mR^2\ddot\vartheta + \tfrac{27}{2}mR^2\left(\ddot\vartheta\cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta\sin\vartheta\dot\vartheta^2\right) + m\left(9R^2\sin^2\vartheta\ddot\vartheta + 18R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot\vartheta^2 + u^2\ddot\vartheta + 2u\dot u\dot\vartheta\right)\\
&+3mR(\ddot u\sin\vartheta\cos\vartheta + \dot u\dot\vartheta(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)) - 6mR(\ddot\vartheta u\sin^2\vartheta + \dot u\dot\vartheta\sin^2\vartheta + 2u\dot\vartheta^2\sin\vartheta\cos\vartheta) =\\
&-\tfrac{9}{2}mR^2\dot\vartheta^2\sin\vartheta\cos\vartheta + 3mR(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\dot u\dot\vartheta - 6mRu\sin\vartheta\cos\vartheta\dot\vartheta^2 + mg(6R - u)\sin\vartheta - 9mgR\sin\vartheta\cos\vartheta
\end{aligned}$$

mentre quella realtiva alla variabile $u$ è

$$m\ddot u + 3mR[\sin\vartheta\cos\vartheta\ddot\vartheta + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\dot\vartheta^2] = mu\dot\vartheta^2 - 3mR\sin^2\vartheta\dot\vartheta^2 + mg\cos\vartheta - \frac{mg}{R}u.$$

Inserendo i valori iniziali forniti dal testo otteniamo

$$\left(4R + \frac{27}{4}R + \frac{9}{2}R\right)\ddot\vartheta(0) + \frac{3}{2}\ddot u(0) = g(\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{9}{2})$$

ovvero

$$\frac{61}{4}R\ddot{\vartheta}(0) + \frac{3}{2}\ddot{u}(0) = g(\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{9}{2}) \tag{1}$$

e, nella seconda equazione di Lagrange,

$$\frac{3}{2}R\ddot{\vartheta}(0) + \ddot{u}(0) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \tag{2}$$

Combinando le due equazioni (1) ed (2) ricaviamo

$$13R\ddot{\vartheta}(0) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 3\right)$$

da cui si ottiene

$$\ddot{\vartheta}(0) = \frac{g}{13R}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4} - 3\right)$$

che, sostituita a sua volta in (2) consente di concludere che

$$\ddot{u}(0) = \frac{g}{26}\left(5\sqrt{4} - 17\right).$$