STATISTICA Prova scritta: (A) 3/7/2017	Cognome e Nome	firma

1. **[10 pt]** Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con funzione di ripartizione F. Si assuma: $F = 0$ su $(-\infty,\, 0)$, $F = 1/2$ su $[1/2,\, 1)$, $F = 1$ su $[\sqrt{2},\, +\infty)$, ed altrimenti $F(x) = x$ se $x \in [0,\, 1/2)$ ed $F(x) = x^2/2$ se $x \in [1,\, \sqrt{2})$. Si determini una densita' di X e si calcolino $E(X)$ e $P\big(X > 5/4 \mid X > 1/2\big)$.

2. **[8 pt]** Si determini la covarianza tra Y/X ed X, dove X, Y sono variabili aleatorie indipendenti e tali che $X > 0$, $E(X) = E(Y) = 1$, $E(1/X) = 2$.

3. **[6 pt]** Un'urna contiene 3 palline bianche e 2 nere. Dopo ogni estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Si determini la probabilita' di ottenere pallina bianca alla seconda prova.

4. **[6 pt]** Sia $x_1, \ldots, x_n$ un campione, composto da osservazioni i.i.d., proveniente da una popolazione con media μ e varianza $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Si ponga: $x^* = (1/3)\sum_{i=1}^{3} x_i$ ed $x^{**} = (x_1 + x_5 + x_6 + x_8)/4$. Allo scopo di stimare μ, quale tra x^* ed x^{**} preferiresti e perche' ?

5. [**10 pt**] Si enunci il teorema di Bayes, si definisca la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X, e si esprima $P(X = x)$ in termini di tale funzione di ripartizione.

6. [**10 pt**] Si determini $P(X = Y)$, dove X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti, X ha legge di Poisson, $E(X) = 1$, e $P(Y = n) = 2^{-n-1}$ per ogni n intero non negativo.

7. [**4 pt**] Si dia la definizione di stima di massima verosimiglianza.

8. [**6 pt**] Sia $x_1, \dots, x_n$ un campione, composto da osservazioni i.i.d., proveniente da una $N(\mu, 4)$. Si determini n in modo da ottenere un'intervallo di confidenza per μ, di livello $1 - \alpha = 0.95$, di lunghezza ≤ 1.