

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 22.09.2015

Compito A

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C_1, C_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1, 3, 5)$, $(5, -1, 3)$ e $(4, 1, 5)$; inoltre, chiamiamo v il vettore ${}^t(1, -1, 4)$, π_1 il piano di equazione cartesiana $-2x + 2y + z - 5 = 0$ e S_1 la sfera di equazione $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 4$.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per C_1 e C_2 , per il piano π_2 contenente r e la cui giacitura è ortogonale al vettore v e per la sfera S_2 con centro in C_2 e passante per Q ;
- determinare le posizioni relative di π_1 e S_1 , π_1 e r , π_1 e π_2 ;
- dimostrare che esistono (o che non esistono) rette che sono contemporaneamente tangenti sia a S_1 , sia ad S_2 .

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$F_t(1, 1, 1) = (3t, 3 - t, t), F_t(1, 1, 0) = (2t, -t, -3), F_t(2, 1, t) = (3t + t^2, 2t, 4t).$$

- Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- Dire per quali valori del parametro t la molteplicità geometrica degli autovalori di A_t non è 1.
- Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+4+4+4)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici reali di ordine 3 con B ortogonale e $A^2 = 0$, $A \neq 0$. *Vero o Falso:*

- Se AB è sempre invertibile.
- se $A + B$ non è mai diagonalizzabile sui complessi.
- $A + B$ è sempre invertibile.

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 06.07.2015

Compito B

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P il punto di coordinate $(2, 1, -2)$, v il vettore ${}^t(2, -2, -1)$ e S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$. Siano poi A, B e C i punti di coordinate rispettivamente $(1, 1, 9)$, $(0, -2, 5)$ e $(5, 1, 1)$.

- a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P e avente giacitura generata da v , equazioni parametriche per il piano π passante per A, B e C e trovare centro O e raggio R della sfera S ;
- b) determinare le posizioni relative di r e S , di r e π , di π e S ;
- c) Scegliere (se esistono) un punto E nell'intersezione di π e S e un punto F nell'intersezione di r e S e calcolare l'area del triangolo EOF .

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$F_t(1, 1, 2) = (3 - t, 3 + 2t, 6), F_t(1, 1, 0) = (3 + t, 3, 0), F_t(2, 1, -t) = (6 + 2t + t^2, 3 - t^2, -4t).$$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
2. Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Dire per quali valori del parametro t la molteplicità geometrica degli autovalori di A_t non è 1.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+4+4 +4)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici reali di ordine 3 con B ortogonale e $A^2 = 0$ $A \neq 0$. *Vero o Falso:*

1. Se AB non è mai invertibile.
2. se $A - B$ non è mai diagonalizzabile sui complessi.
3. $A - B$ è sempre invertibile.

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 06.07.2015 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____
Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)
Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

- a)
- b)
- c)

ESERCIZIO 2

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

- 1. V F
- 2. V F
- 3. V F

- La mancata restituzione o compilazione del modulo comporta l'esclusione dall'esame.
- L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente.
- Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo.
- Il foglio del testo degli esercizi **NON** deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 3-t & 0 & t \\ 0 & 3 & -t \\ t & -t & 3 \end{pmatrix}$$