

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009

Prova scritta del 30.06.2009

Compito A

Esercizio 1.

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(2, -1, 0)$ e $(6, -1, 3)$, s la retta di equazioni

$$\begin{cases} y - 3x = -2 \\ z - y = -1 \end{cases} \quad \text{e}$$

S_1 la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 10 = 0$; poniamo infine $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (2, 2, 3)$.

- 1) Trovare centro e raggio della sfera S_1 , un'equazione parametrica della retta s ed un'equazione cartesiana per il piano π passante per P ed avente giacitura generata da v_1 e v_2 ;
- 2) determinare la posizione relativa di s e π e trovare equazioni cartesiane per la retta r ortogonale a π e passante per Q ;
- 3) trovare un'equazione cartesiana per la sfera S_2 di raggio minimo che abbia centro in P e sia tangente a S_1 .

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$F_t(0, 1, 1) = (2, -1 - t, 1 - t), F_t(1, 3, 0) = (4, -4t, 0) \text{ e } F_t(1, 0, 1) = (2, -t - 1, 1 - t).$$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
2. Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_5 .
4. Calcolare la segnatura di $A_1 + A_1$ e di $A_2 + A_2$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici 4×4 nilpotenti non nulle di rango tre *Vero o Falso*:

- a) $AB + BA$ non è mai invertibile.
- b) AB può essere diagonalizzabile.
- c) AB e BA sono sempre simili.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009

Prova scritta del 30.06.2009

Compito B

Esercizio 1.

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(-2, -1, 1)$ e $(-2, 2, 5)$, s la retta di equazioni

$$\begin{cases} y - 3z = 1 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

S_1 la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 7 = 0$; poniamo infine $v_1 = {}^t(-1, 0, 1)$ e $v_2 = {}^t(2, 3, 2)$.

- 1) Trovare centro e raggio della sfera S_1 , un'equazione parametrica della retta s ed un'equazione cartesiana per il piano π passante per P ed avente giacitura generata da v_1 e v_2 ;
- 2) determinare la posizione relativa di s e π e trovare equazioni cartesiane per la retta r ortogonale a π e passante per Q ;
- 3) trovare un'equazione cartesiana per la sfera S_2 di raggio minimo che abbia centro in P e sia tangente a S_1 .

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$F_t(0, 1, 1) = (2, -1 + t, 1 + t), \quad F_t(1, 3, 0) = (4, 4t, 0) \quad \text{e} \quad F_t(1, 0, 1) = (2, t - 1, 1 + t).$$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
2. Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_5 .
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_1 + A_1$ e di ${}^tA_2 + A_2$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici 4×4 nilpotenti non nulle di rango tre *Vero o Falso*:

- a) AB può essere nulla.
- b) AB può essere simmetrica.
- c) AB e BA sono sempre simili.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009

Prova scritta del 30.06.2009 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Data nascita: _____
Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)
Compito **A** **B** **C** _____ (crocettare)

ESERCIZIO 1

- a)
- b)
- c)

ESERCIZIO 2

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

- a) V F
- b) V F
- c) V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.