

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 23.09.2008*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $\pi_1$  il piano di equazione  $x + 3y - z + 2 = 0$ ,  $S$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 2z + 12 = 0$  e  $P_1, P_2$  e  $P_3$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, 0)$  e  $(4, 3, -1)$  e  $(-1, 1, 2)$ .

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per il punto  $Q$  di coordinate  $(-1, 1, 1)$  e avente giacitura generata dal vettore  $(2, 1, 5)^t$  e per il piano  $\pi_2$  passante per  $P_1, P_2$  e  $P_3$ ;
2. calcolare la distanza tra  $\pi_1$  e  $S_1$  e determinare la posizione relativa di  $r$  e  $\pi_1$  e quella di  $r$  e  $\pi_2$ ;
3. trovare equazioni cartesiane per le sfere aventi centro su  $r$  e tangenti sia a  $\pi_1$  che a  $\pi_2$ , se esistono.

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$F_t(1, 1, 0) = (-t, -2t^2, -2t), F_t(1, 0, 1) = (-t + 1, 0, -2t), F_t(1, 1, 1) = (-t + 1, -2t^2, -2t),$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  $A_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $M$  lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 3. Date  $A \in M$  e  $B \in M$  simmetriche non nulle,  $B$  definita positiva.

*Vero o Falso:*

1.  $A + B$  e  $A - B$  sono mai simili
2.  $A + B$  e  $A - B$  non sono mai congrue.
3.  $AB - BA$ , non è congrua ad  $AB$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 23.09.2008*

**Compito B**

**Esercizio 1.**

Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $\pi_1$  il piano di equazione  $x+3y-z+2=0$ ,  $S$  la sfera di equazione  $x^2+y^2+z^2-4x+8y+2z+12=0$  e  $P_1, P_2$  e  $P_3$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, 0)$  e  $(4, 3, -1)$  e  $(-1, 1, 2)$ .

1. Determinare equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per il punto  $Q$  di coordinate  $(-1, 1, 1)$  e avente giacitura generata dal vettore  $(2, 1, 5)^t$  e per il piano  $\pi_2$  passante per  $P_1, P_2$  e  $P_3$ ;
2. calcolare la distanza tra  $\pi_1$  e  $S_1$  e determinare la posizione relativa di  $r$  e  $\pi_1$  e quella di  $r$  e  $\pi_2$ ;
3. trovare equazioni cartesiane per le sfere aventi centro su  $r$  e tangenti sia a  $\pi_1$  che a  $\pi_2$ , se esistono.

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che:

$$F_t(1, 1, 0) = (-2t, 0, 1), F_t(1, 0, 1) = (0, -2t^2, 0), F_t(1, 1, 1) = (-t + 1, -2t^2, -2t),$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  $A_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $M$  lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 3. Date  $A \in M$  e  $B \in M$  simmetriche non nulle,  $B$  definita negativa.

*Vero o Falso:*

1.  $A + B$  e  $A - B$  sono mai simili
2.  $A + B$  e  $A - B$  non sono mai congrue.
3.  $AB - BA$ , non è congrua ad  $AB$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008**

*Prova scritta del 23.9.2008* Risultati

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**  
  
**Compito**      **A**                      **B**                      **(crocettare)**

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

1. V          F
2. V          F
3. V          F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}$$