

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 30.01.2006*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia  $S$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z - 8 = 0$  e  $P$  e  $Q$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, 0)$  e  $(-1, 3, 1)$ .

1. Trovare il centro  $C$  ed il raggio  $R$  della sfera  $S$  e scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P$  e  $Q$ ;
2. scrivere un'equazione cartesiana per il piano ortogonale ad  $r$  e passante per  $C$  e determinare se  $r$  è secante, tangente o esterna a  $S$ ;
3. scrivere equazioni cartesiane per le sfere (se esistono) con centro che appartiene a  $r$ , passanti per  $C$  e di raggio  $\sqrt{13}$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $F_t(1, 1, 0) = (2, 1 + t, 1)$ ,  $F_t(t, 0, 1) = (3t, 0, 1 + 2t)$ ,  $F_t(1, 3, 0) = (2, 3 + 3t, 1)$ .

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Calcolare al variare di  $t \in \mathbb{R}$  la dimensione del nucleo di  $A_t$
- c) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- d) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- e) Dire per quali valori del parametro  $t$ ,  $A_t + A_t$  è definita positiva.

**Punti (4+2+4+2+4)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$ , e  $C$ . matrici reali quadrate di ordine 3. Supponiamo  $A$  una matrice nilpotente di rango 2 e  $C$  una matrice simmetrica di rango 1.

*Vero o Falso:*

1.  $A^2 + C^2$  non ha mai traccia nulla.
2.  $A + C^2$  è sempre diagonalizzabile sui reali.

**Punti (2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 30.01.2006*

**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia  $S$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0$  e  $P$  e  $Q$  i punti di coordinate rispettivamente  $(0, 1, 2)$  e  $(1, -1, 3)$ .

1. Trovare il centro  $C$  ed il raggio  $R$  della sfera  $S$  e scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r$  passante per  $P$  e  $Q$ ;
2. scrivere un'equazione cartesiana per il piano ortogonale ad  $r$  e passante per  $C$  e determinare se  $r$  è secante, tangente o esterna a  $S$ ;
3. scrivere equazioni cartesiane per le sfere (se esistono) con centro che appartiene a  $r$ , passanti per  $C$  e di raggio  $3\sqrt{2}$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $F_t(t, 0, 1) = (4t, 0, 1 + 3t)$ ,  $F_t(1, -1, 0) = (2, -1 - 2t, 1)$ ,  $F_t(1, 3, 0) = (2, 3 + 6t, 1)$ .

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Calcolare al variare di  $t \in \mathbb{R}$  la dimensione del nucleo di  $A_t$
- c) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- d) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- e) Dire per quali valori del parametro  $t$ ,  ${}^tA_t + A_t$  è definita positiva.

**Punti (4+2+4+2+4)**

**Esercizio 3.** Siano  $A$ , e  $C$ . matrici reali quadrate di ordine 3. Supponiamo  $A$  una matrice nilpotente di rango 2 e  $C$  una matrice simmetrica di rango 1.

*Vero o Falso:*

1.  $A^2 - C^2$  ha sempre traccia non nulla.
2.  $C^2 + A^3$  può essere non diagonalizzabile sui reali.

**Punti (2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 30.1.2006 Risultati*

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

**Compito**      **A**      **B**      **(crocettare)**

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- 1) V      F
- 2) V      F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.