

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 20.02.2006*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Q$  il punto di coordinate  $(3, 2, 2)$ ,  $r_1$  la retta passante per il punto  $P_1$  di coordinate  $(2, 1, 3)$  e avente giacitura generata da  ${}^t(-1, 1, 3)$  e  $r_2$  la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} .$$

1. Scrivere un'equazione per la sfera  $S$  di centro  $Q$  e raggio 3 ed equazioni parametriche e cartesiane per il piano  $\pi$  contenente  $r_1$  e passante per  $Q$ ;
2. Calcolare la distanza tra  $S$  e  $P_1$  e trovare, se esiste, il punto di intersezione tra  $\pi$  e  $r_2$  o, in caso contrario, la distanza tra  $\pi$  e  $r_2$ ;
3. Scrivere equazioni cartesiane per i piani tangenti (se esistono) a  $S$  contenenti  $r_2$ , o, in caso contrario, trovare i punti di intersezione tra  $S$  e  $r_2$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(1, 1, 1, 1) = (1, t, 3 + t, -1 - 2t), F_t(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 2, -t), F_t(1, -1, 0, 0) = (1, -t, -1, 0), F_t(1, 0, t, 0) = (1, 0, 2t, -t^2).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  ${}^tA_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 4, antisimmetrica e non nulla.

*Vero o Falso:*

1. Il rango di  $A$  può essere 2.
2. Il determinante di  $A + A^3$  può essere negativo.
3. La matrice  $A^2 - A^4$  può essere simmetrica di segnatura  $(2,2)$ .

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 20.01.2006*

**Compito B**

**Esercizio 1.**

Sia  $Q$  il punto di coordinate  $(4, 2, 3)$ ,  $r_1$  la retta passante per il punto  $P_1$  di coordinate  $(3, 1, 2)$  e avente giacitura generata da  ${}^t(-1, 3, 1)$  e  $r_2$  la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + y - 2z = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

1. Scrivere un'equazione per la sfera  $S$  di centro  $Q$  e raggio 4 ed equazioni parametriche e cartesiane per il piano  $\pi$  contenente  $r_1$  e passante per  $Q$ ;
2. Calcolare la distanza tra  $S$  e  $P_1$  e trovare, se esiste, il punto di intersezione tra  $\pi$  e  $r_2$  o, in caso contrario, la distanza tra  $\pi$  e  $r_2$ ;
3. Scrivere equazioni cartesiane per i piani tangenti (se esistono) a  $S$  contenenti  $r_2$ , o, in caso contrario, trovare i punti di intersezione tra  $S$  e  $r_2$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F_t(1, 1, 1, -1) = (1, t, 3 - t, 1), \quad F_t(0, 0, 0, 1) = (0, 0, t, -1 - t), \quad F_t(1, -1, 0, 0) = (1, -t, -1, 0), \\ F_t(1, 0, 0, t) = (1, 0, t^2, -t - t^2).$$

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_0$ .
- d) Calcolare al variare di  $t$  la segnatura di  ${}^tA_t + A_t$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 4, antisimmetrica e non nulla.

*Vero o Falso:*

1. rango di  $A$  può essere 1
2. il determinante  $A - A^3$  può essere negativo.
3. La matrice  $A^2 - A^4$  può essere simmetrica di segnatura (1,3).

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2005-2006**

*Prova scritta del 20.2.2006* Risultati

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

**Compito**      **A**      **B**      **(crocettare)**

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- 1) V      F
- 2) V      F
- 3) V      F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & t \\ 0 & 0 & -t & -1 - t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 - 2t \end{pmatrix}$$