Elementi di Calcolo Scientifico per l'Ingegneria, 2018–2019
Tipologia di esercizi di programmazione in Matlab

1. Approssimare il valore di π mediante il calcolo dell'integrale approssimato della funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$ nell'intervallo [0,1] con il metodo del punto medio composito.

   Calcolare l'errore rispetto al valore *"pi"* fornito da Matlab e farne il grafico al variare del numero di sottointervalli.

   v. codice

   Curiosità: le prime 30 cifre decimali di *pi greco* sono . . . , 1415926535 8979323846 2643383279

2. Si vuole calcolare numericamente l'integrale

$$I = \int_0^2 |x(x-\sqrt{2})(2x-1)|dx$$

   applicando la formula di Simpson.

   a) Sapendo che $I = \dfrac{319}{48} - 47\dfrac{\sqrt{2}}{12}$, dire quanti intervalli servono affinchè la formula di Simpson composita fornisca un valore numerico che dista dall'integrale esatto al più di un errore pari a 10^{-6}.

   Incrementando di 10 il numero di intervalli e partendo da N=10, servono 150 sottointervalli. Fare anche altre prove modificando l'incremento e l'N iniziale.

   b) Sapendo che tale formula integra esattamente polinomi di grado 3, proporre una strategia (ed utilizzarla) per calcolare numericamente ed in maniera esatta l'integrale I con la formula di Simpson composita su 3 intervalli.

   Si devono scegliere gli intervalli $[0 \;\; 0.5]$, $[0.5 \;\; \sqrt{2}]$, $[\sqrt{2} \;\; 2]$. V. codice.

3. Si vuole approssimare la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Dire se il seguente metodo iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \quad \textit{assegnato} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \;\; k \geq 0 \end{cases}$$

   con $B = I - A$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$ produce una successione convergente alla soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e spiegarne il perchè.

   La matrice di iterazione ha raggio spettrale maggiore di 1 e pertanto il metodo iterativo non converge.

   Richiamando le *function* "jacobi" e "gaussseidel" implementate a lezione verificare che i metodi di Jacobi e Gauss Seidel non convergono alla soluzione del sistema, ma che esiste una permutazione della matrice A per cui è garantita la convergenza. Permutare la matrice e verificare che Jacobi e Gauss Seidel producono due successioni convergenti. Fissata una tolleranza $\epsilon = 10^{-8}$ per il test d'arresto e preso un dato iniziale random, dire in quante iterazioni convergono i due metodi.

Si osservi che scambiando tra di loro la prima e la quarta colonna, la matrice A diventa a dominanza diagonale stretta e questo garantisce la convergenza di Jacobi e Gauss–Seidel. La matrice di permutazione è pertanto data da:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scegliendo $x^{(0)} = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ e la tolleranza pari a 10^{-8}, Jacobi converge in 40 iterazioni, Gauss–Seidel in 21.