Elementi di Calcolo Scientifico per l'Ingegneria Appello Cognome: ______________________
ESEMPIO - a.a. 2017-2018 Nome: ______________________

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: ______________________

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18, se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12, se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6, e se nell'esercizio 10 si ottengono almeno 3 punti. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).
Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $2+2$ pt.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad ,$$

dove $\beta \in \Re$.
(a) Per quali valori di β il metodo di Jacobi converge? ______________________
(b) Posto $\beta = 2$ determinare la fattorizzazione $A = LU$. $L =$

2. Scrivere l'iterata del metodo di Newton per approssimare lo zero della funzione $f(x) = e^{-x} - \log(x)$ dove $x > 0$: $2+2$ pt.
(a) ______________________ .
(b) Quindi calcolare un passo di tale metodo partendo da $x_0 = 1$. Si trova $x_1 =$ ______________

3. Approssimare l'integrale definito 2 pt.

$$\int_{-3}^{3} (e^{-x^2} + 1)\, dx$$

con la formula di quadratura del punto medio composita sui tre intervalli $[-3\ \ -1]$, $[-1\ 1]$, $[1\ 3]$.

Il risultato vale: ______________________

4. Data la seguente formula di quadratura: 2 pt.

$$\int_{-1}^{2} f(x)\ dx \approx \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(1/2) + 2\,\omega_3 f'(2)\ .$$

determinare i parametri reali ω_1 , ω_2 e ω_3 in modo che la formula di quadratura abbia ordine di precisione massimo. Risulta: $\omega_1 =$ ______, $\omega_2 =$ ______, $\omega_3 =$ ______.

5. Dato il sistema differenziale: 2 pt.

$$\begin{cases} x'(t) = e^{3(t-1/2)} + 2y(t) & x(0) = \dfrac{1}{2} \\ y'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} + x(t) & y(0) = -1 \end{cases}$$

applicare un passo del metodo di Eulero Implicito con passo $h = 1/2$. Si ottengono i valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ pari a $u_1 =$ ____________ $v_1 =$ ____________ rispettivamente.

6. **(a)** Trovare la parabola $p_2(x)$ che interpola la funzione

2 + 2 pt.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}, \qquad con\ x \neq -2$$

nei nodi $\{0, 1, 2\}$. $p_2(x) =$ ____________________ .
(b) Il valore assoluto dell'errore di interpolazione nel punto $x = -1$ vale $|err(-1)| =$ __________ .

7. Considerata la funzione dell'esercizio precedente, determinare la retta di regressione $r(x)$ relativa ai punti $(0, f(0)),\ (1, f(1)),\ (2, f(2))$.
Si ottiene $r(x)=$ ____________________

2 pt.

SECONDA PARTE

8. Data la generica formula di quadratura $\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, f(x_i) \approx \int_a^b f(x)\, dx$ dove $x_i \in [a, b]$, scrivere cosa si intende per ordine di precisione p della formula.

3 pt.

Soluzione:

9. Enunciare una **condizione necessaria e sufficiente** per la convergenza di un generico metodo iterativo di splitting per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$.

3 pt.

Soluzione:

10. Commentare il seguente codice MatLab:

8 pt.

```
function x=risolve(A,b)
A=A*A';
n=length(A);
x=zeros(n,1);
szb=size(b);
if szb(1) ~= n || szb(2) ~= 1
    error('La dimensione del termine noto non è compatibile')
end
for i=1:n
  for j=i+1:n
    A(i,j)=0;
  end
```

```
end
if prod(diag(A))==0
   error('La matrice è singolare')
end
 for i=1:n
   x(i)=(b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i-1))/A(i,i);
 end
```

1. Illustrare cosa succede se si dà il comando:
   ```
   >> risolve([0 2 3; -1 0 1],[1 0 4]')
   ```

2. Illustrare cosa succede se si dà il comando:
   ```
   >> risolve([0 2 3; -1 0 1],[0 4]')
   ```