Elementi di Calcolo Scientifico per l'Ingegneria Appello 26/01/2018

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: ____________________

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18, se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12, se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6, e se nell'esercizio 11 si ottiene almeno 3 come punteggio. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).
Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con **2 + 2 pt.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 11/2 \\ 11/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Jacobi partendo dal dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$.
$\mathbf{x}^{(1)} =$ ____________________

(b) Scrivere la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Gauss - Seidel partendo dallo stesso vettore $\mathbf{x}^{(0)}$.
$\mathbf{x}^{(1)} =$ ____________________

2. Effettuare un passo del metodo di Newton per approssimare la radice dell'equazione non lineare $x^3 - 5 = 0, \quad x \in [1, 2]$. Calcolare $x^{(1)}$ considerando come $x^{(0)}$ l'estremo di Fourier dell'intervallo considerato. $x^{(1)} =$ ____________________ **2 pt.**

3. Trovare i coefficienti a, b della retta $y = ax+b$ che approssima i punti $(0, 2),\ (1, 0),\ (2, 1),\ (3, 0)$ nel senso dei minimi quadrati. $a =$____________________ $b =$____________________ **2 pt.**

4. Dire per quali valori del parametro reale α la matrice **2 pt.**

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

ammette fattorizzazione LU. ____________________

5. Dato il sistema di equazioni differenziali lineari

2 pt.

$$\begin{cases} x' + 2x - 2y = 0, \\ y' - x + 3y = 0, \\ x(0) = y(0) = 1, \end{cases}$$

scrivere le approssimazioni $u_1,\ v_1$ dei valori $x(1/2),\ y(1/2)$ fornite da un passo del metodo di Eulero Implicito. Il risultato vale: ____________________

6. Approssimare l'integrale

2 pt.

$$\int_0^{3\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx$$

con la formula del punto medio composita su 3 intervalli di uguale ampiezza. Il risultato vale: ____________________

7. Determinare il polinomio che interpola la funzione

2 + 2 pt.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}\cos(\pi x)$$

rispetto ai nodi $\{0, 1, 2\}$.

(a) Il polinomio è dato da $p(x) =$____________________

(b) L'errore di interpolazione, in valore assoluto, nel punto $x = 3$ è pari a: ____________________

8. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

2 pt.

$$y'(t) = \sin(\pi t) + y^3(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}y(t)\right); \qquad y(0) = 2$$

Effettuare un passo del metodo di Eulero Esplicito con passo $h = 1$. Il valore approssimato di $y(h)$ vale: ____________________

SECONDA PARTE

9. Descrivere il metodo di Crank - Nicolson (o dei Trapezi) per l'approssimazione numerica di equazioni differenziali. Dire inoltre se tale metodo appartiene alla famiglia dei metodi di Runge - Kutta o dei metodi multistep lineari (MML).

3 pt.

Soluzione:

10. Descrivere un passo del metodo di Newton per l'approssimazione numerica della soluzione di un'equazione non lineare ed enunciarne le proprietà di convergenza. | 3 pt.

Soluzione:

11. Commentare il seguente codice *Matlab*: | 8 pt.

```
function [t,u]=gennaio2018(odefun,tspan,y0,Nh,varargin)
if nargin == 4
    tol=1.e-8;
    kmax=20;
else
    tol=varargin{1};
    kmax=varargin{2};
end
h=(tspan(2)-tspan(1))/Nh;
h2=h/2;
t=linspace(tspan(1),tspan(2),Nh+1)';
y0=y0(:);
d=length(y0);
u=zeros(Nh+1,d);
B0=eye(d);
u(1,:)=y0';
for n=1:Nh
    wn=u(n,:)';
    F=@(x)x-wn-h2*(odefun(t(n),wn)+odefun(t(n+1),x));
    w=broyden(F,B0,wn,tol,kmax);[1]
    u(n+1,:)=w';
end
```

Quale metodo è implementato nel codice riportato sopra?

[1] La funzione **broyden** trova uno zero di un sistema di funzioni. w=broyden(FUN,B0,X0,TOL,KMAX) assegna a *w* il valore approssimato dello zero del sistema di funzioni definite nella function FUN, calcolato usando il metodo di Broyden.