

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 11, 12, 13 e 14 vengono risolti correttamente. Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).

PRIMA PARTE

1. ** Applicare un passo del metodo di Newton per risolvere l'equazione

$$4 \arctg x - x^2 = 1/2 \quad x \in [0, 1] .$$

2 pt.

Se x_0 è l'estremo di Fourier, allora $x_1 =$ _____ .

2. ** Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx \approx a f(0) + b f(2)$$

2 + 2 pt.

Determinare i pesi a, b in modo che la formula sia almeno di ordine 1.

$a =$ _____ , $b =$ _____ ,

(b) Determinare l'ordine della formula trovata. Ordine = _____

3. ** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 3} .$$

2 pt.

Sia $r(x)$ la retta di regressione per f rispetto ai nodi $\{-1, 0, 1\}$. Allora $r(2)$ vale _____ .

4. ** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 3} .$$

2 pt.

Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{-1, 0, 1\}$.

Allora $P_2(2) - f(2)$ vale _____

5. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = (t+1)x(t) + y(t) & x(0) = -1/2 \\ y'(t) = -y(t) + x(t) & y(0) = 1/2. \end{cases}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ sono: $x_1 =$ _____ e $y_1 =$ _____ .

6. Dato il parametro reale a , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3a \\ a & 3a & 1/4 \end{pmatrix} .$$

2 + 2 pt.

(a) Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione LU ?

(b) Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Cholesky $A = BB^T$ con B triangolare inferiore? _____

7. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Si ottiene:
 $x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

8. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Si ottiene:
 $x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ $x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

SECONDA PARTE

9. ** Formule di integrazione: scrivere la formula dei trapezi e la formula di Cavalieri-Simpson per una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

3 pt.

10. Scrivere il metodo di Eulero implicito per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy in forma normale.

3 pt.

11. ** Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
clear
close all
xnodi=-4:3;
y=[-0.3 0.4 -1 1.2 2 -0.5 1.34 -0.4] ;
figure
plot(xnodi,y,'x')
hold on
pol=polyfit(xnodi,y,7) ;
r=roots(pol) ;
plot(-4:0.2:3,polyval(pol,-4:0.2:3),'r')
grid
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) `xnodi` è un vettore colonna
- (b) `xnodi` è vettore riga
- (c) la figura contiene una retta
- (d) la figura contiene il grafico di un polinomio
- (e) `pol` è un vettore

12. ** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) `pol` è un vettore costituito da 8 elementi
- (b) `pol` è un vettore costituito da 6 elementi
- (c) l'istruzione `size(xnodi)` restituisce `[1 8]`
- (d) la figura contiene solo il grafico di una funzione
- (e) `r` è un vettore
- (f) l'istruzione `polyval(pol,r(2))` dà come risultato 0

3 pt.

13. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
A=[-2 0 1; 0 2 1; 0 0 4] ;
b=[1 1 1]';
K=0 ;
n=length(b) ;
x=zeros(n,1) ;
disp(x)

x(n)=b(n)/A(n,n) ;

for i=n-1:-1:1
    somma=0 ;
    for j=i+1:n
        somma=somma+A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-somma)/A(i,i) ;
end
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) `A` è una matrice quadrata
- (b) `A` è una matrice rettangolare
- (c) `x` è un vettore
- (d) `somma` è un vettore
- (e) il codice visualizza il vettore `x`

14. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno croccate **tutte e sole le risposte esatte**)

3 pt.

- (a) \mathbf{A} è una matrice triangolare inferiore
- (b) al termine dell'esecuzione del codice, \mathbf{x} è un vettore nullo
- (c) il primo ciclo for esegue 2 iterazioni
- (d) il primo ciclo for esegue 3 iterazioni
- (e) il codice sopra riportato implementa la risoluzione di un sistema triangolare superiore
- (f) il codice sopra riportato implementa il metodo di Jacobi