Esercizi di Programmazione Lineare

1 Soluzione di Base: Forma Matriciale

Si consideri il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ in cui:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{3}{2} \\ +\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I vettori $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ rappresentano delle soluzioni di base? Sono ammissibili? Perchè?

Soluzione

($\bar{x}_1$) il primo punto valutato con i vincoli del poliedro da:

$$\begin{array}{lccclll}
i = 1: & -1/2 & & +5/2 & = 2 & & \text{attivo} \\
i = 2: & -1/2 & +3/2 & & = 1 & & \text{attivo} \\
i = 3: & & +3/2 & +5/2 & = 4 & & \text{attivo} \\
i = 4: & -1/2 & +3/2 & +5/2 & = 7/2 & > 3 & \text{violato}
\end{array}$$

La sotto matrice di A indotta dai vincoli attivi $I(\bar{x}_1) = \{1, 2, 3\}$ è la seguente:

$$A_{I(\bar{x}_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è pari a 2, quindi è una matrice invertibile, e di conseguenza i 3 vincoli attivi sono linearmente indipendenti. La soluzione $\bar{x}_1$ è una soluzione di base, ma non è ammissibile, in quanto il quarto vincolo è violato.

($\bar{x}_2$) il secondo punto valutato con i vincoli del poliedro da:

$$\begin{array}{lccccl}
i = 1: & & +2 & = 2 & & \text{attivo} \\
i = 2: & +1 & & = 1 & & \text{attivo} \\
i = 3: & +1 & +2 & = 3 & < 4 & \text{ammissibile} \\
i = 4: & +1 & +2 & = 3 & & \text{attivo}
\end{array}$$

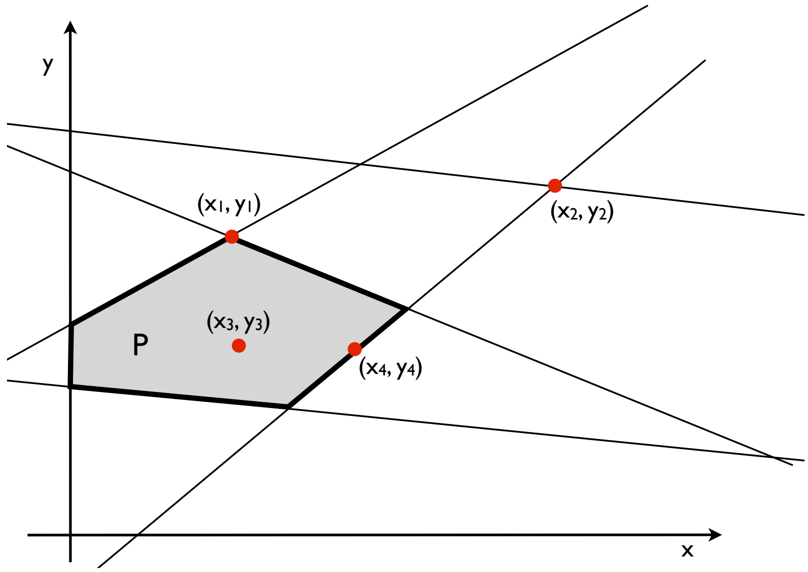
La sotto matrice di A indotta dai vincoli attivi $I(\bar{x}_2) = \{1, 2, 4\}$ è la seguente:

$$A_{I(\bar{x}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è pari a 1, quindi è una matrice invertibile, e di conseguenza i 3 vincoli attivi sono linearmente indipendenti. La soluzione $\bar{x}_2$ è una soluzione di base ed è ammissibile, in quanto l'unico vincolo non attivo è ammissibile in $\bar{x}_2$.

2 Soluzioni di Base: Via Grafica

Dato il poliedro P descritto graficamente in figura (in grigio la regione ammissibile), dire quali dei punti dati sono soluzioni ammissibile e/o di base giustificando la risposta:



Soluzione

1. (x_1, y_1): soluzione di base ammissibile, data dalla combinazione lineare di due vincoli attivi nel punto dato (siamo in $\mathbb{R}^2$, quindi bastano 2 vincoli linearmente indipendenti)

2. (x_2, y_2): soluzione di base in quanto combinazione di due vincoli attivi nel punto dato, ma non ammissibile in quanto $(x_2, y_2) \notin P$

3. (x_3, y_3): soluzione ammissibile, ma non di base (nessun vincolo attivo)

4. (x_4, y_4): soluzione ammissibile, ma non di base, in quanto si ha un solo vincolo attivo (ne servono due per avere una soluzione di base)

3 Esercizi sul duale: riconoscimento

Dato il problema lineare:

$$\begin{array}{rrl} (P_1) & \max & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & & x_1 + x_3 \leq 4 \end{array}$$

dire quale dei due seguenti problemi è il duale di (P_1):

$$\begin{array}{rrl} (P_2) & \min & y_1 + 4y_2 \\ & \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & & y_1 = 2 \\ & & y_2 = 1 \\ & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} (P_3) & \min & y_1 + 4y_2 \\ & \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & & y_1 \leq 2 \\ & & y_2 \leq 1 \\ & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Soluzione

Si osservi che il problema (P_3) è ammissibile, per esempio per $(y_1, y_2) = (1, 0)$, in cui il valore della funzione obiettivo è pari a 1. Il duale del problema (P_3) (si rivedano le slides delle lezioni: $c\bar{x} \leq \bar{y}^T b$, dove $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono rispettivamente soluzioni ammissibili per il primale e il duale) quindi al più varrà 1.

Osservando invece il problema (P_1), si noti che è illimitato, in quanto le variabili sono libere in segno, e quindi qualsiasi soluzione del tipo $(x_1, x_2, x_3) = (-M, M, 0)$ è ammissibile e di valore pari a M. In pratica, possiamo continuare a far crescere M e avere sempre una soluzione ammissibile: (P_1) è illimitato. Quindi (P_3) non può essere il duale di (P_1).

Infine si noti che il problema (P_2) non è ammissibile, e quindi non pone nessun limite al valore di (P_1). Per verificare che effettivamente (P_2) sia il problema duale di (P_1) si utilizzi la tabella dell'esercizio 4.

4 Passaggio al duale 1

Scrivere il duale dei seguenti problemi di programmazione lineare, usando la tabella riportata sotto.

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 0 \\ & x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & -x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ll} \max & -x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & -x_2 - x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq -3 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

min	max
variabili	vincoli
vincoli	variabili
vettore costi c	vettore termini noti b
vettore termini noti b	vettore costi c
$A_i x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$A_i x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \gtrless 0$
$x_i \geq 0$	$yA^i \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$yA^i \geq c_i$
$x_i \gtrless 0$	$yA^i = c_i$

Soluzione

(a) Scriviamo prima i vettori c e b, e la matrice A:

$$c = (1, -1, 2, 0) \qquad b^T = (0, 1, 4) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché abbiamo tre vincoli nel primale, avremo tre variabili nel duale, ovvero y_1, y_2, y_3, e il problema duale risulta essere:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 - y_3 \leq 1 \\ & -3y_1 + y_2 = -1 \\ & y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + y_2 = 0 \\ & y_1 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Da fare come esercizio.

(c) Scriviamo prima i vettori c e b, e la matrice A:

$$c = (-1, 4, 1) \qquad b^T = (10, -3, 12, 2) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché abbiamo 4 vincoli nel primale, avremo 4 variabili nel duale, ovvero y_1, y_2, y_3, y_4, e il problema duale risulta essere:

$$\begin{aligned} \min \quad & 10y_1 - 3y_2 + 12y_3 + 2y_4 \\ \text{s.t.} \quad & y_2 + 2y_3 - 3y_4 \leq -1 \\ & -y_1 - 3y_3 + 2y_4 = 4 \\ & -y1 + 2y_3 \geq 1 \\ & y_1 \geq 0, y_4 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

5 Passaggio al duale

Scrivere il duale del seguente problema di programmazione lineare con variabili x_{ij} e y_j:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j y_j & & (1) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = b_i & i = 1, \ldots, n & \quad (2) \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq y_j & j = 1, \ldots, m & \quad (3) \\ & x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m & \quad (4) \\ & x_{ij} \geq 0 & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m & \quad (5) \end{aligned}$$

Soluzione

Per prima cosa scriviamo il problema di ottimizzazione in forma matriciale, identificando la matrice A e i vettori c e b. Il vettore dei costi è semplicemente:

$$c^T = (0_{11}, \ldots, 0_{nm}, c_1, \ldots, c_m)$$

Si noti che il vincolo (3) può essere riscritto come:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - y_j \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

e quindi il vettore dei termini noti può essere scritto come:

$$b^T = (b_1, \dots, b_n, 0_1, \dots, 0_m, 1_{11}, \dots, 1_{nm})$$

Dove abbiamo prima gli n termini per il vincolo (2), poi gli m termini per (3), ed infine gli $n \times m$ termini per (4).

Abbiamo tre tipi di vincoli, e quindi introduciamo le seguenti variabili duali:

- per il vincolo (2) la variabile duale $\rightarrow \alpha_i$
- per il vincolo (3) la variabile duale $\rightarrow \beta_j$
- per il vincolo (4) la variabile duale $\rightarrow \gamma_{ij}$

A questo punto dobbiamo identificare la matrice A: questa matrice ha una colonna per ogni variabile, e quindi avrà prima $n \times m$ colonne corrispondenti alle variabili x_{ij} e poi m colonne per le variabili y_j. Ogni riga della matrice corrisponde ad un vincolo, ad esclusione dei vincoli di segno. Per ogni riga (i.e. vincolo) della matrice, riportiamo nell'ultima colonna la variabile duale corrispondente.

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccc|cccc|c}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & \cdots & x_{n1} & \cdots & x_{nm} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & & & & \cdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\
0 & & \cdots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \beta_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & -1 & \beta_m \\
\hline
1 & 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & & 0 & 0 & & & 0 & \gamma_{11} \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & \cdots & & 1 & & & \cdots & & 0 & \vdots & & & \vdots & \gamma_{ij} \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & & \cdots & & & & & 1 & \vdots & & & \vdots & \gamma_{nm}
\end{array} \right)$$

Il duale del problema dato risulta quindi essere il seguente:

$$\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} & \\
\text{s.t.} & a_{ij}\alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \leq 0 & i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \\
& -\beta_j = c_j & j = 1, \dots, m \\
& \beta_j \leq 0 & j = 1, \dots, m \\
& \gamma_{ij} \leq 0 & i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.
\end{array}$$

6 Passaggio al duale

Si consideri il grafo orientato $G = (N, A)$ e si scriva il duale del seguente problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & & \qquad (6)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} \le 1 & \forall i \in N & \qquad (7)\\
& \sum_{(i,j)\in BS(j)} x_{ij} \le 1 & \forall j \in N & \qquad (8)\\
& \sum_{(i,j)\in A} D_{hij} x_{ij} \ge b_h & h = 1, \ldots, H & \qquad (9)\\
& x_{ij} \ge 0 & (i,j) \in A & \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Soluzione

Per prima cosa scriviamo il problema di ottimizzazione in forma matriciale, identificando la matrice A e i vettori c e b. Sia n il numero di nodi in N ed m il numero di archi in A.

Abbiamo tre tipi di vincoli, e quindi introduciamo le seguenti variabili duali:

- per il vincolo (7) la variabile duale $\rightarrow\ \alpha_i$
- per il vincolo (8) la variabile duale $\rightarrow\ \beta_j$
- per il vincolo (9) la variabile duale $\rightarrow\ \gamma_h$

Il vettore dei costi è semplicemente:

$$c = (\ldots, c_{ij}, \ldots)$$

in cui abbiamo il costo di ogni arco $(i, j) \in A$. Il vettore dei termini noti può essere scritto come:

$$b^T = (1_1, \ldots, 1_n, |\ 1_1, \ldots, 1_n, |\ b_1, \ldots, b_H)$$

Dove abbiamo prima gli n termini per il vincolo (7), poi gli n termini per (8), ed infine gli H termini per (9).

A questo punto dobbiamo identificare la matrice A: questa matrice ha una colonna per ogni variabile, e quindi avrà prima m colonne corrispondenti alle variabili x_{ij}. Ogni riga della matrice corrisponde ad un vincolo, ad esclusione dei vincoli di segno. Per ogni riga (i.e. vincolo) della matrice, riportiamo nell'ultima colonna la variabile duale corrispondente.

$$
A = \left(\begin{array}{cccccc|c}
\cdots & x_{ij} & \cdots & x_{kl} & \cdots & & \\
\hline
\cdots & \vdots & \cdots & & & & 0\\
\cdots & 1 & \cdots & 0 & & \cdots & \alpha_i\\
\cdots & 0 & & 1 & \cdots & & \alpha_k\\
\cdots & \vdots & \cdots & & & & 0\\
\hline
\cdots & \vdots & \cdots & & & & 0\\
\cdots & 1 & \cdots & 0 & & \cdots & \beta_j\\
\cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & & \beta_l\\
\cdots & \vdots & \cdots & & \cdots & & 0\\
\hline
\cdots & D_{1ij} & \cdots & D_{1lk} & \cdots & & \gamma_1\\
\cdots & \vdots & \cdots & & & & \vdots\\
\cdots & D_{hij} & \cdots & D_{hij} & & & \gamma_h\\
\cdots & \vdots & \cdots & & & & \vdots\\
\cdots & D_{Hij} & \cdots & D_{Hlk} & \cdots & & \gamma_H
\end{array}\right)
$$

In pratica, si deve riconoscere che ogni arco $(i,j) \in A$ appare nella colonna corrispondente alla variabile x_{ij} una sola volta come arco uscente dal nodo i (ovvero nel vincolo (7)), una sola volta come arco entrante dal nodo j (ovvero nel vincolo (8)), e appare in tutti i vincoli di tipo (9), ma ogni volta con un coefficiente diverso.

Il duale del problema dato risulta quindi essere il seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j + \sum_{h=1}^{H} \gamma_h & \\
\text{s.t.} & \alpha_i + \beta_j + \sum_{h=1}^{H} D_{hij}\gamma_h \le c_{ij} & \forall (i,j) \in A \\
& \alpha_j \le 0 & \forall i \in N \\
& \beta_j \le 0 & \forall j \in N \\
& \gamma_h \ge 0 & h = 1, \dots, H.
\end{array}
$$

7 Passaggio al duale

Scrivere il duale del seguente problema definito sulle variabili x, y e w:

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} q_{jl} y_{jl} + \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & & (11) \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \ge 1 & i = 1, \dots, n & (12) \\
& \sum_{j=1}^{m} a_{il} y_{jl} \ge x_j & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m & (13) \\
& w_{jl} \le x_j & j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m & (14) \\
& w_{jl} \le x_l & j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m & (15) \\
& w_{jl} \ge x_j + x_l - 1 & j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m & (16) \\
& x_j \ge 0 & j = 1, \dots, m & (17) \\
& y_{jl} \ge 0 & j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, m & (18)
\end{array}
$$

Soluzione

Abbiamo cinque tipi di vincoli, e quindi introduciamo le seguenti variabili duali:

- per il vincolo (12) la variabile duale $\rightarrow$ $\alpha_i \le 0$
- per il vincolo (13) la variabile duale $\rightarrow$ $\beta_{ij} \le 0$
- per il vincolo (14) la variabile duale $\rightarrow$ $\gamma^1_{jl} \ge 0$
- per il vincolo (15) la variabile duale $\rightarrow$ $\gamma^2_{jl} \ge 0$
- per il vincolo (16) la variabile duale $\rightarrow$ $\mu_{jl} \le 0$

Applicando lo stesso procedimento degli esercizi precedenti, il duale del problema dato risulta essere il seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \mu_{jl} & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} - \sum_{l=1}^{m} \gamma^1_{jl} - \sum_{l=1}^{m} \gamma^2_{lj} - \sum_{l=1}^{m} \mu_{lj} - \sum_{l=1}^{m} \mu_{lj} \geq c_j & j = 1, \ldots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_{il} \geq q_{jl} & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m \\
& \gamma^1_{jl} + \gamma^2_{jl} + \mu_{jl} = 0 & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m \\
& \alpha_i \leq 0,\ \beta_{ij} \leq 0,\ \gamma^1_{jl} \geq 0,\ \gamma^2_{jl} \geq 0,\ \mu_{jl} \leq 0. &
\end{array}
$$