Modelli 2

1 Google Street View [17/11/2011]

Il manager di Google Street View deve aggiungere una nuova città al database di Google. Per farlo, la Google Car deve percorrere tutte le strade della città almeno una volta, raccogliendo le immagini. La Google Car inizialmente si trova in una data posizione, a cui deve tornare dopo avere visitato ogni strada della città. L'insieme di strade può essere rappresentato come un grafo orientato $G = (N, A)$ in cui i nodi rappresentano gli incroci e gli archi le strade (con le loro direzioni). Il manager conosce il tempo necesssario per percorrere ogni strada, ovvero ogni arco del grafo ha associato un tempo t_{ij}. Si noti che il tempo necessario per viaggiare lungo una strada è indipendente dal fatto che la macchina stia raccogliendo immagini o si stia solo spostando tra due punti diversi della città.

Si formuli il problema di trovare il giro più corto in termini di tempo che visiti ogni strada almeno una volta. Formulare il problema specificando le variabili decisionali, i vincoli, e la funzione obiettivo.

1.1 Soluzione

Insiemi e Parametri:

1. Viene dato il grafo $G = (N, A)$
2. Per ogni arco $(i, j) \in A$ si conosce il tempo di percorrenza t_{ij}

Variabili Decisionali:

1. $x_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ è una variabile intera che indica quante volte viene visitato l'arco (i, j) dalla Google Car

Funzione obiettivo: Si deve minimizzare la durata totale del giro:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij}$$

Vincoli:

- Ogni strada a doppio senso di marcia deve essere visitata almeno una volta:

$$x_{ij} \geq 1 \qquad \forall (i, j) \in A$$

- Ogni volta che la macchina "entra" in un incrocio, deve "uscirne": si ha quindi una sorta di vincolo di bilancio di flusso ai nodi, in cui si pone che il numero di volte che la macchina entra in un nodo e pari al numero di volte che la macchina esce dal nodo:

$$\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \qquad \forall i \in N$$

2 L'uragano Sandy [29/11/2012]

L'uragano Sandy ha distrutto la rete di trasporto della città di New York. Prima dell'uragano la mappa stradale era descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$, in cui la lunghezza di ogni arco $(i, j) \in A$ era pari a l_{ij}. Inoltre si conosceva la lunghezza d_{hk} del cammino minimo dal nodo h al nodo k nel grafo originario, per ogno coppia di nodi h e k di N. Le autorità di New York vorrebbero riparare alcune strade rotte dall'uragano in modo da garantire una connettività minima della rete stradale. I lavori di riparazione sono mono-direzionali, ovvero se si ripara la strada dal nodo i al nodo j, si ripara solo l'arco (i, j) ma non l'arco (j, i). Le autorità hanno posto il vincolo che il nuovo cammino minimo tra due nodi h e k a seguito di una riparazione non sia superiore di α volte il cammino minimo originale, dato dal parametro d_{hk}. Il costo per riparare la strada (i, j) è pari a c_{ij}, per ogni arco $(i, j) \in A$.

Formulare il problema di realizzare le riparazioni che realizzano la connetività richiesta minimizzando i costi come un problema di programmazione lineare intera.

Variante: Come cambia la formulazione se si assume l'ipotesi che le riparazione sono valide in entrambe le direzioni, ovvero che riparando il tratto (i, j) si ripara anche il tratto (j, i)?

2.1 Soluzione

Insiemi e Parametri:

- Il grafo orienato $G = (N, A)$ della rete stradale
- La lunghezza di ogni arco l_{ij} con $(i, j) \in A$
- Costo di riparazione di ogni arco c_{ij} con $(i, j) \in A$
- Lunghezza originale d_{hk} dal nodo h al nodo k in G, prima dell'uragano
- α distanza massima dopo la riparazione tra ogni coppia di nodi

Variabili: Le variabili decisionali sono le seguenti:

1. $x_{ij} \in \begin{cases} 1 & \text{se viene riparato l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
2. $y_{ij}^{hk} \in \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è nel cammino minimo da } h \text{ a } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obiettivo: Si vuole minimizzare il costo di riparazione complessivo:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Vincoli:

- Il cammino minimo dal nodo h al nodo k non deve essere superiore di α volte la lunghezza del cammino minimo che si aveva prima dell'uragano:

$$\sum_{(i,j) \in A} l_{ij} y_{ij}^{hk} \le \alpha d_{hk} \qquad \forall h, k \in N$$

- Le variabili di flusso y_{ij}^{hk} danno un flusso unitario dal nodo h al nodo k in G:

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^{hk} - \sum_{(j,i) \in A} y_{ji}^{hk} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ sorgente per cammino } hki = h \\ -1 & \text{if } i \text{ destinazione per cammino } hki = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per tutte le coppie di nodi $h, k \in N$, e per tutti i nodi $i \in N$.

- Se l'arco (i,j) è nel cammino minimo di una qualsiasi coppia di archi, allora deve essere stato riparato:

$$x_{ij} \geq y_{ij}^{hk} \qquad \forall h,k \in N, \forall (i,j) \in A$$

- **Variante**. Se riparo l'arco (i,j), allora si ripara anche l'arco (j,i), ovvero posso usare l'arco (i,j) per il cammino da h a k (i.e., $y_{ij}^{hk} = 1$), se ho riparato l'arco (i,j) oppure l'arco (j,i):

$$x_{ij} + x_{ji} \geq y_{ij}^{hk} \qquad \forall h,k \in N, \forall (i,j) \in A$$

3 Tariffe Telefoniche [Marzo 2007]

Quasi tutti gli operatori telefonici hanno delle offerte interessanti per i nuovi clienti che lasciano il vecchio operatore. Consideriamo il caso di due compagnie *Vuotafon* e *Rim* (V e R). Un cliente di V vuole minimizzare il costo delle sue chiamate, e sta meditando di cambiare nei prossimi mesi diverse volte l'operatore telefonico in modo da sfruttare al meglio le offerte disponibili. Sia t il traffico totale mensile del cliente, e siano c_V e c_R il costo in euro al minuto delle chiamate dei due operatori. Lo sconto fisso offerto dai due operatori corrisponde a s_V e s_R euro. Tuttavia, per poter usufruire dello sconto, il cliente che cambia operatore, è vincolato al nuovo operatore per 6 mesi. L'obiettivo del cliente è di pianificare i cambi di operatore per i prossimi due anni.

Si formuli il problema come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno. Si descrivano le caratteristiche del grafo: l'insieme di nodi, l'insieme di archi, la lunghezza di ogni arco, la sorgente e la destinazione del cammino.

3.1 Soluzione

Si costruisce un grafo orientato aciclico e pesato $G = (N, A)$ come segue:

- Si aggiungono a N i seguenti nodi:
  - Un nodo sorgente s e un nodo destinazione t
  - Un nodo v_i per ogni mese del periodo considerato, ovvero si aggiunge l'insieme di nodi $V = \{v_1, \dots, v_{24}\}$. Questi sono nodi associati all'operatore Vuotafon.
  - Un nodo r_i per ogni mese del periodo considerato, ovvero si aggiunge l'insieme di nodi $R = \{r_1, \dots, r_{24}\}$. Questi sono nodi associati all'operatore Rim.

  In pratica, l'insieme di nodi di G è pari a $N = \{s,t\} \cup V \cup R$. In pratica non è necessario aggiunge tutti i nodi, ma teniamo la descrizione il più generale possibile.

- Si aggiunge un arco tra ogni coppia di nodi secondo le regole seguenti:
  - un arco (s, v_i) rappresenta la decisione di rimanere con l'operatore V sino al mese i. Il costo dell'arco è pari a tc_V.
  - un arco (s, r_i) rappresenta la decisione di passare subito all'operatore R. Il costo dell'arco è pari a $\max\{0, tkc_R - s_R\}$.
  - gli archi (v_i, v_{i+1}) e (r_i, r_{i+1}), di costo rispettivamente tc_V e tc_R. Questi archi rappresentano il fatto di stare un mese in più con lo stesso operatore.
  - tra v_i e r_j se $i < j$ e $j - i \geq k$. Il costo dell'arco (v_i, r_j) è pari a $\max\{0, tkc_R - s_R\}$. Se t è piccolo il costo potrebbe andare a zero.
  - tra r_i e v_j se $i < j$ e $j - i \geq k$. Il costo dell'arco (r_i, v_j) è pari a $\max\{0, tkc_V - s_V\}$. Se t è piccolo il costo potrebbe andare a zero.

4 Presidential Election [Febbraio 2008]

Uno dei candidati alle elezioni del presidente degli Stati Uniti decide di fare la sua campagna elettorale viaggiando in bus sulla storica Route 66 da Chicago a Los Angeles. Il viaggio è in una direzione, ovvero il candidato non vuole mai tornare indietro. Lungo la strada si trovano n città che sono numerate in base al loro ordine (la prima è Chicago, l'ultima è Los Angeles). Il candidato non può fare un comizio in ogni città, ma deve decidere in quale sottoinsieme di città vuole tenere un comizio. La distanza tra due città consecutive è pari a $c_{i,i+1}$. Nel suo viaggio, il candidato vuole viaggiare almeno d miglia e al massimo D miglia tra ogni coppia di soste successive. Ovviamente, il candidato vuole massimizzare il numero di voti guadagnati nei suoi comizi. Il suo staff ha stimato che dare un comizio nella città i, porta ad un guadagno di v_i voti.

Formulare il problema di pianificare il viaggio del candidato da Chicago a Los Angeles come una ricerca di un cammino massimo su grafo opportuno. Si descriva come viene costruito il grafo.

5 Il Problema dello Zaino

Si consideri il problema di zaino segunte:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Formulare il problema di zaino come un problema di cammino minimo o cammino massimo su un grafo opportuno. Descrivere come avviene la costruzione del grafo.