Modelli di Programmazione Lineare
e Programmazione Lineare Intera

1 Azienda Dolciaria

Un'azienda di cioccolatini deve pianificare la produzione per i prossimi m mesi. In ogni mese l'azienda ha a disposizione Q ore di manodopera (espresse in minuti). L'azienda produce K tipi di cioccolatini diversi. Ogni singolo cioccolatino di tipo k richiede h_k minuti di lavoro e ha un costo di produzione c_k. Per ogni mese $i = 1, \dots, m$ e per ogni tipo di cioccolatino è nota la domanda di mercato d_{ik} che deve essere soddisfatta. In ogni mese è possibile produrre e immagazzinare una parte del prodotto, per venderlo nei mesi successivi, ad un costo g_k per ogni cioccolatino di tipo k. Oltre alla produzione ordinaria è possibile produrre cioccolatini richiedendo straordinari alla manodopera. Per ogni mese i è possibile richiedere S ore di straordinario. Attivare gli straordinari in un mese i ha un costo fisso f_i. Gli straordinari possono essere richiesti in al più b mesi e mai in due mesi consecutivi.

Formulare il problema di pianificare la produzione in modo da soddisfare la domanda minimizzando il costo complessivo della produzione (produzione, straordinari, e magazzino) come un problema di programmazione lineare.

Soluzione

Insiemi e Parametri:

$M = \{1, \dots, m\}$: insieme dei mesi di produzione

K : insieme dei tipi di cioccolatini prodotti

Q : ore di manodopera (espresse in minuti) disponibili in ogni mese di produzione

h_k : minuti richiesti per la produzione di un cioccolatino di tipo k

c_k : costo unitario per la produzione di un cioccolatino tipo k

g_k : costo unitario per l'immagazzinamento di un cioccolatino tipo k

d_{ik} : domanda nel mese i del un cioccolatino di tipo k

f_i : costo fisso di attivazione dello straordinario nel mese i

S : numero di ore di straordinario (espresse in minuti) disponibili ogni mese

b : numero massimo di mesi consecutivi in cui è possibile usare lo straordinario

Variabili Decisionali: Nel problema dobbiamo prendere tre tipi di decisioni:

1. Quanti cioccolatini produrre ogni mese
2. Quanti cioccolatini destinare al magazzino
3. Quante ore (in minuti) di straordinario usare, che ha la conseguenza che devo pagare dei costi fissi

Introduciamo quindi quattro insiemi di variabili:

$x_{ik} \in \mathbb{Z}^+$ che indica la quantità di cioccolatini di tipo k prodotti nel mese i

$y_{ik} \in \mathbb{Z}^+$ che indica la quantità di cioccolatini di tipo k presenti nel magazzino nel mese i. Introduciamo anche le variabili y_{0k} che indicano le quantità disponibili per tipo all'inizio della pianificazione

$z_{ik} \in \mathbb{Z}^+$ che indica i minuti di straordinario usati al mese i per produrre i cioccolatini di tipo k

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{se uso lo straordinario nel mese } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo: Si devono minimizzare i costi totali di produzione:

$$\min \sum_{i \in M} \sum_{k \in K} c_k(x_{ik} + z_{ik}) + \sum_{i \in M} \sum_{k \in K} g_k y_{ik} + \sum_{i \in M} f_i u_i$$

Vincoli: Descriviamo di seguito un vincolo del problema alla volta. Si tenga presente che abbiamo un problema noto come problema di produzione multi-periodo.

- Abbiamo prima di tutto il vincolo di multi-periodo:

$$y_{i-1,k} + x_{ik} + z_{ik} = d_{ik} + y_{ik}, \quad \forall i \in M, k \in K.$$

- In ogni mese, ho un limite temporale massimo sull'utilizzo della manodopera (fare sempre attenzione alle unitá di misura, i questo caso minuti):

$$\sum_{k \in K} h_k x_{ik} \leq Q, \quad \forall i \in M.$$

- In ogni mese, ho un limite sul possibile utilizzo di straordinario. Inoltre devo anche avere che se nel mese i uso straordinario per un produrre un qualsiasi tipo di cioccolatino, allora la variabile u_i deve essere posta ad uno. Infine, se $u_i = 0$, allora nel mese i non posso usare straordinario.

$$\sum_{k \in K} h_k z_{ik} \leq S u_i, \quad \forall i \in M.$$

- In totale posso usare manodopera straordinario in al più b mesi:

$$\sum_{i \in M} u_i \leq b.$$

- Non posso mai usare la manodopera in due mesi consecutivi:

$$u_i + u_{i+1} \leq 1, \quad \forall 2, \ldots, m.$$

2 Disgregazione di un partito [19/11/2011]

Un partito politico in fase di disgregazione ha n esponenti politici. Ogni esponente i ha un bacino di voti sicuri v_i. La disgregazione del partito comporta la creazione di alcuni nuovi partiti, il cui numero non è precisato a priori. Il problema del presidente del vecchio partito consiste nell'assegnare gli esponenti politici ai nuovi partiti in modo che la somma dei voti di ciascun partito superi la sogli di V voti. Formulare il problema di massimizzare il numero di nuovi partiti in grado di superare la soglia minima.

Variante: Gli esponenti del vecchio partito sono noti per la loro litigiosità e la presenza di due esponenti che non vanno d'accordo nello stesso nuovo partito avrebbe effetti deleteri sull'immagine del partito. Dato l'insieme A di coppie di esponenti politici che hanno avuto un diverbio nel recente passato, il presidente nel decidere l'assegnamento ai nuovi partiti deve fare in modo che nello stesso nuovo partito non vi siano coppie di politici in A. Si noti che con questo vincolo qualche esponente politico potrebbe non venire assegnato ad alcun nuovo partito. Come cambia la formulazione?

Soluzione

Insiemi e Parametri:

$I = \{1, \ldots, n\}$ insieme di esponenti politici

$J = \{1, \ldots, n\}$ insieme dei possibili nuovi partiti (al più ho un partito per ogni esponente politico)

v_i bacino di voti sicuri del politico i

V soglia minima di voti per ogni nuovo partito

$A \subset I \times I$ insieme di coppie di esponenti politici litigiosi

Variabili: Le variabili decisionali sono le seguenti:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il politico } i \text{ viene assegnato al nuovo partito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene formato il nuovo partito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo: La funzione obiettivo richiede di massimizzare il numero di nuovi partiti:

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

Vincoli:

- Ogni esponente politico può essere assegnato al più ad un solo nuovo partito:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I.$$

- Si chiede che la somma dei voti sicuri di un nuovo partito superi una data soglia V:

$$\sum_{i \in I} v_i x_{ij} \geq V y_j, \quad \forall j \in J.$$

- Si può introdurre anche il vincolo (ridondante) che se non apro un nuovo partito allora nessun politico può essere assegnato al quel partito:

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i \in I, j \in J.$$

Variante: Nella variante viene richiesto che ogni coppia di esponenti politici $\{i, j\} \in A$, non puó appartenere allo stesso nuovo partito. Abbiamo quindi i seguenti vincoli di tipo logico:

$$x_{ip} + x_{jp} \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in A, \forall p \in J.$$

3 Matrimonio [7/7/2006]

Una giovane ricercatrice di ricerca operativa deve convolare a nozze in una torrida estate. I laboriosi ed estenuanti preparativi del ricevimento prevedono anche la composizione dei tavoli dei convenuti. Gli invitati sono suddivisi in k gruppi $G_1, \ldots, G_k$ (per esempio: parenti sposo, parenti sposa, colleghi sposa, amici sposo, ...). I tavoli hanno una capacità di p posti. Nella composizione si deve tener conto della eterogeneità della composizione (le persone in ogni tavolo devono appartenere ad almeno q gruppi diversi), e del fatto che ognuno deve avere almeno altri r compagni di gruppo al proprio tavolo per non sentirsi abbandonato. Formulare il problema della composizione dei tavoli con l'obiettivo di minimizzare il numero di tavoli.

Variante: Considerare come funzione obiettivo quella di minimizzare il massimo numero di componenti di uno stesso gruppo ad un tavolo.

Soluzione

Insiemi e Parametri:

I : insieme degli invitati

K : insieme dei gruppi di persone

$G = G_1, \ldots, G_{|K|}$: composizione dei gruppi (ogni invitato appartiene ad un solo gruppo)

T : insieme dei tavoli

c_t : capienza del tavolo t

r : numero minimo di persone dello stesso gruppo allo stesso tavolo

q : numero minimo di gruppi per tavolo

Variabili: Le decisioni da prendere in questo problema sono dove far sedere ogni invitato. In base all'assegnamento degli invitati ai tavoli, come conseguenza sappiamo anche quali gruppi sono presenti a quali tavoli, e quanti tavoli sono usati. Quindi oltre alle variabili di assegnamento (invitato, tavolo), abbiamo bisogno di variabili di assegnamento (gruppo, tavolo) e delle variabili logiche (0-1) che indicano se un dato tavolo viene usato o meno.

Si introducono quindi le seguenti variabili:

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se l'invitato } i \text{ siede al tavolo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{se il gruppo } j \text{ è presente al tavolo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{se al tavolo } t \text{ siede almeno un invitato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo: Per minimizzare il numero di tavoli usati si usa la seguente funzione obiettivo:

$$\min \quad \sum_{t \in T} z_t$$

Vincoli:

- Ogni invitato deve essere assegnato ad un tavolo:

$$\sum_{t \in T} x_{it} = 1, \quad \forall i \in I$$

- Ogni tavolo deve rispettare la sua capienza massima:

$$\sum_{i \in I} x_{it} \leq c_t, \quad \forall t \in T$$

- Ad ogni tavolo devono essere presenti almeno r persone dello stesso gruppo k, se il gruppo k é presente a quel tavolo (ovvero solo se y_{kt}):

$$\sum_{i \in G_k} x_{it} \geq r y_{kt}, \quad \forall k \in K, t \in T$$

- Se il gruppo k è presente al tavolo t, allora dobbiamo avere $y_{kt} = 1$:

$$x_{it} \leq y_{kt}, \quad \forall k \in K, i \in G_k, t \in T$$

- Se il tavolo t viene usato da almeno un gruppo, allora il tavolo t lo devo considerare come usato:

$$y_{kt} \leq z_t$$

4 Ambulanze [03/02/2006]

La centrale operativa del 118 della provincia di Milano deve collocare k ambulanze nell'area metropolitana in modo da poterle mandare dove necessario. Sono dati un insieme di punti $C = \{1, \ldots, n\}$ che rappresentano possibili chiamate di emergenza, e sono dati un insieme di siti $P = \{1, \ldots, m\}$ in cui le ambulanze possono sostare aspettando la chiamata. Sono anche noti i tempi t_{ij} di percorrenza da un sito i in P ad un possibile punto di chiamata j in C.

Formulare il problema di determinare in quali siti candidati posizionare le ambulanze. L'obiettivo è minimizzare il massimo tempo di risposta.

Variante: Modificare la formulazione in modo tale che ogni sito di possibile emergenza sia servito da almeno due ambulanze. L'obiettivo è minimizzare il secondo miglior tempo di risposta.

Soluzione

Insiemi e Parametri:

$C = \{1, \ldots, n\}$ insieme di luoghi di possibili chiamate d'emergenza

$P = \{1, \ldots, m\}$ insieme di siti candidati

t_{ij} tempo di percorrenza da i a j

k numero di ambulanze disponibili

Variabili Decisionali: Nel problema dobbiamo prendere due tipi di decisioni:

1. Dove situare le ambulanze
2. Come assegnare le chiamate alle ambulanze

Introduciamo quindi due insiemi di variabili:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un'ambulanza nel sito } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la chiamata } j \text{ è assegnata all'ambulanza nel sito } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo: Si deve minimizzare il tempo massimo di risposta:

$$\min \max_{i \in P, j \in C} t_{ij} x_{ij}$$

Poichè questa funzione è non lineare, si deve linearizzare introducendo una nuova variabile z libera in segno, ed $n \times m$ vincoli, e riscrivendo la funzione obiettivo come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq t_{ij} x_{ij}, \quad \forall j \in C, i \in P. \end{aligned}$$

Vincoli: Descriviamo di seguito un vincolo del problema alla volta.

- Ogni chiamata deve essere servita da un ambulanza:

$$\sum_{i \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in C.$$

- Il numero di ambulanze dislocate non può superare il numero di ambulanze disponibili:

$$\sum_{j \in P} y_j \leq k.$$

- Ogni chiamata deve essere servita da un ambulanza che é stata effettivamente dislocata (e quindi si ha $y_i = 1$):

$$x_{ij} \leq y_i, \quad \forall i \in P.$$

In alternativa questi vincoli possono essere sostituiti dai vincoli seguenti, che hanno lo stesso significato logico, ma sono di numero inferiore:

$$\sum_{j \in C} x_{ij} \leq n y_i, \quad \forall i \in P.$$

Variante: Se si vuole minimizzare il secondo miglior tempo di risposta alle chiamate, basta modificare il primo vincolo, imponendo che ogni chiamata sia servita da due ambulanze:

$$\sum_{i \in P} x_{ij} = 2, \quad \forall j \in C.$$

Poichè nella funzione obiettivo si minimizza il massimo dei tempi di percorrenza, anche il secondo miglior tempo di risposta sarà minimizzato.

5 Futuro in Ricerca [12/2/2013]

Il ministero della ricerca del paese dell'ottimismo deve selezionare tra n proposte di ricerca quale finanziare. Ogni proposta di ricerca i ha una richiesta di finanziamento R_i. Tuttavia, a causa dei limiti di spesa, in ogni proposta viene anche indicato un finanziamento minimo r_i $(< R_i)$ per poter produrre dei risultati e sotto al quale la ricerca non viene condotta. Sia B la cifra totale a disposizione del ministero. Formulare il problema di selezionare tra i progetti quelli da finanziare e per ogni progetto selezionato decidere l'effettivo finanziamento in modo che vengano rispettati i limiti minimi e massimi indicati e che il finanziamento del ministero venga completamente utilizzato. L'obiettivo è quello di massimizzare il numero di progetti finanziati. Si proponga un modello lineare e si spieghi il significato di variabili, vincoli, e funzione obiettivo.

Variante: Si assuma che le proposte siano in ordine decrescente di rilevanza scientifica ($i < j$ significa che la proposta i ha maggiore valore scientifico della proposta j). Se un progetto i viene finanziato, il rapporto tra il reale finanziamento ricevuto e il massimo richiesto R_i deve essere superiore rispetto ad ogni altro progetto finanziato j con $j > i$.

Soluzione

Insiemi e Parametri:

$I = \{1, \ldots, n\}$ insieme delle proposte dei progetti di ricerca

R_i richiesta di finanziamento del progetto i

r_i richiesta minima di finanziamento del progetto i

B cifra totale a disposizione del ministero per finanziare progetti

Variabili: Nel problema dobbiamo prendere essenzialmente due decisioni:

1. Quali progetti finanziare
2. Con quale cifra finanziare i progetti scelti

Introduciamo quindi due insiemi di variabili:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se finanzio il progetto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$y_i \geq 0$ cifra con cui finanzio il progetto i

Funzione obiettivo: Nel testo dell'esercizio viene richiesto di massimizzare il numero di progetti finanziati, ovvero:

$$\max \quad \sum_{i \in I} x_i.$$

Vincoli:

- La cifra a disposizione del ministero deve essere usata interamente:

$$\sum_{i \in I} y_i = B$$

- Ogni progetto finanziato, se viene finanziato (ovvero se e solo se $x_i = 1$), deve ricevere un finanziamento entro il minimo e la cifra richiesta:

$$y_i \geq r_i x_i,$$
$$y_i \leq R_i x_i.$$

Variante: Poiché i progetti sono giá ordinati per rilevanza scientifica, basta imporre i seguenti vincoli:

$$\frac{y_i}{R_i} \geq \frac{y_j}{R_j}, \quad \forall i, j \in I, i < j.$$