Esercizi di Programmazione Lineare

1 Soluzione grafica

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & +2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & +x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Risolvere il problema per via grafica. Specificare il valore delle variabili (la soluzione), e il valore della funzione obiettivo dato dalla soluzione ottima.

b) Determinare le soluzioni di base associate a tutti i vertici del poliedro delle soluzioni ammissibili.

c) Indicare la successione delle basi visitate dall'algoritmo del simplesso a partire dall'origine.

d) Verificare geometricamente che il gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come combinazione lineare non negativa dei gradienti dei vincoli attivi solo nel vertice ottimo. Trovare il valore di tale combinazione lineare.

e) Determinare per quali valori del termine noto del primo vincolo, la base ottima non cambia.

f) Per quali valori del primo coefficiente della funzione obiettivo esistono multiple soluzioni ottime?

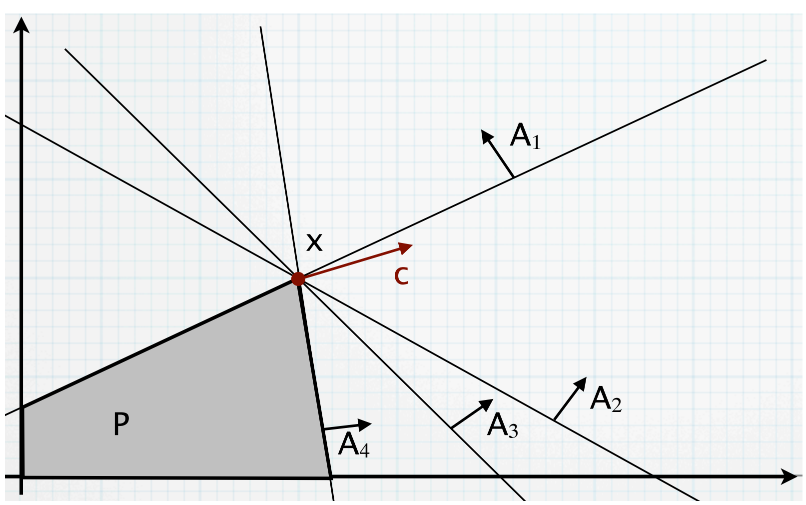
Illustrare i procedimenti utilizzati.

2 Soluzioni di basi e soluzione ottima

Dato il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ e un suo vertice $\bar{x}$, come in figura, si risponda alle seguenti domande:

a) Quante sono le soluzioni di base associate al punto $\bar{x}$?

b) **[facoltativo]** Quali tra le soluzioni di base ammissibili sono ottime? Quante sono esprimibili come combinazione lineare non negativa dei vincoli attivi?



3 Direzione di crescita e passo di spostamento

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

Data la soluzione $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -2)$:

a) Individuare l'insieme dei vincoli attivi.

b) Il punto $\bar{x}$ è una soluzione di base?

c) Scrivere il problema ristretto e il problema duale ristretto riferiti a $\bar{x}$ e darne una rappresentazione geometrica.

d) Costruire una direzione di crescita ammissibile.

e) Trovare il massimo passo di spostamento lungo la direzione trovata.

f) Trovare una soluzione duale ammissibile.

Illustrare i procedimenti utilizzati.

4 Direzione di crescita e passo di spostamento

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{aligned}$$

Data la soluzione $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 7)$:

a) Individuare l'insieme dei vincoli attivi.

b) Il punto $\bar{x}$ è una soluzione di base?

c) Scrivere il problema ristretto e il problema duale ristretto riferiti a $\bar{x}$ e darne una rappresentazione geometrica.

d) Costruire una direzione di crescita ammissibile.

e) Trovare il massimo passo di spostamento lungo la direzione trovata.

f) Trovare una soluzione duale ammissibile.

Illustrare i procedimenti utilizzati.

5 Scarti complementari

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Si scrivano le equazioni degli scarti complementari e si verifichi l'ottimalità dei seguenti punti:

$$\bar{x}_1 = (4/5, 6) \qquad \bar{x}_2 = (1, 6)$$