Esercizi di Programmazione Lineare

1 Soluzione di Base: Forma Matriciale

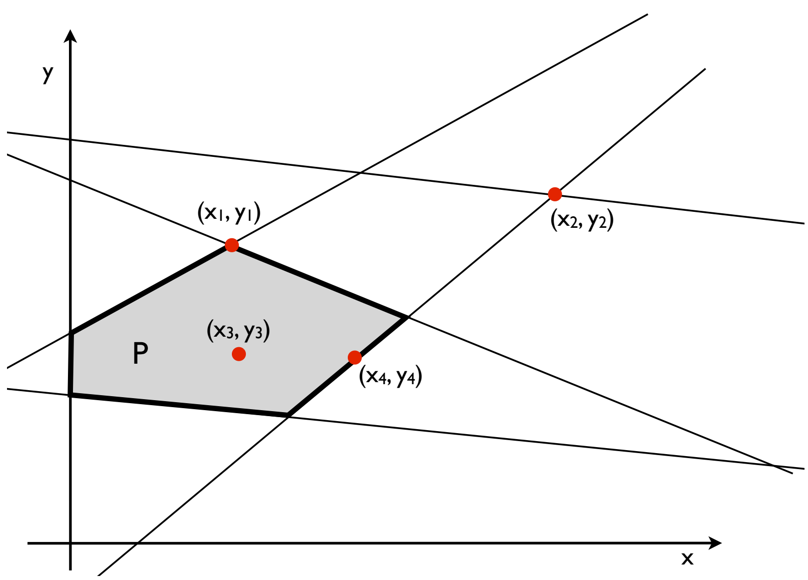
Si consideri il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \le b\}$ in cui:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{3}{2} \\ +\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I vettori $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ rappresentano delle soluzioni di base? Sono ammissibili? Perchè?

2 Soluzioni di Base: Via Grafica

Dato il poliedro P descritto graficamente in figura (in grigio la regione ammissibile), dire quali dei punti dati sono soluzioni ammissibile e/o di base giustificando la risposta:



3 Esercizi sul duale: riconoscimento

Dato il problema lineare:

$$\begin{array}{lll} (P_1) & \max & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & \text{s.t.} & x_1 + x_2 \le 1 \\ & & x_1 + x_3 \le 4 \end{array}$$

dire quale dei due seguenti problemi è il duale di (P_1):

$$(P_2)\quad \begin{array}{ll} \min & y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 = 2 \\ & y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$(P_3)\quad \begin{array}{ll} \min & y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq 2 \\ & y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

4 Passaggio al duale 1

Scrivere il duale dei seguenti problemi di programmazione lineare, usando la tabella riportata sotto.

$$(a)\quad \begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 0 \\ & x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & -x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{ll} \max & -x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & -x_2 - x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq -3 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

min	max
variabili	vincoli
vincoli	variabili
vettore costi c	vettore termini noti b
vettore termini noti b	vettore costi c
$A_i x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$A_i x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \gtrless 0$
$x_i \geq 0$	$yA^i \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$yA^i \geq c_i$
$x_i \gtrless 0$	$yA^i = c_i$

5 Passaggio al duale

Scrivere il duale del seguente problema di programmazione lineare con variabili x_{ij} e y_j:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{m} c_j y_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = b_i & i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq y_j & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \geq 0 & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

6 Passaggio al duale

Si consideri il grafo orientato $G = (N, A)$ e si scriva il duale del seguente problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} \leq 1 & \forall i \in N \\
& \sum_{(i,j)\in BS(j)} x_{ij} \leq 1 & \forall j \in N \\
& \sum_{(i,j)\in A} D_{hij} x_{ij} \geq b_h & h = 1, \ldots, H \\
& x_{ij} \geq 0 & (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

7 Passaggio al duale

Scrivere il duale del seguente problema definito sulle variabili x, y e w:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} q_{jl} y_{jl} + \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{m} a_{il} y_{jl} \geq x_j & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\
& w_{jl} \leq x_j & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m \\
& w_{jl} \leq x_l & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m \\
& w_{jl} \geq x_j + x_l - 1 & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, m \\
& y_{jl} \geq 0 & j = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$