Esercizi di Programmazione Intera

1 Tagli di Gomory

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

a) Si individui per via grafica una soluzione di base ottima del rilassamento continuo, la corrispondente matrice di base A_B, e la sua inversa A_B^{-1}.

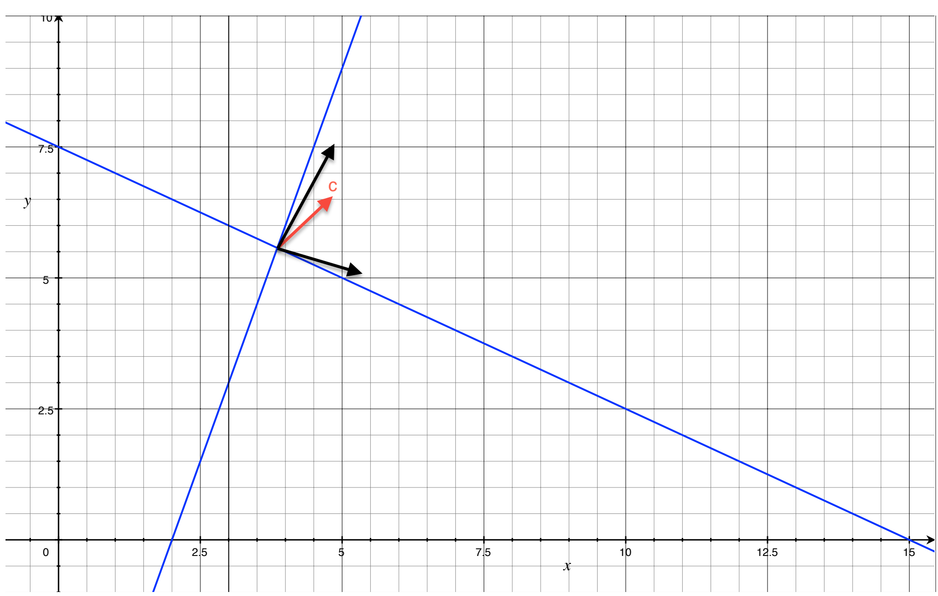
b) Si calcolino i tagli di Gomory relativi alle componenti frazionarie della soluzione ottima di base trovata.

c) Si dia la rappresentazione grafica delle disuguaglianze trovate.

Soluzione

a) Prima di poter trovare i tagli di Gomory il problema deve essere riscritto nella forma $\min\{cx \mid Ax = b, x \in \mathbb{Z}\}$, introducendo eventualmente delle variabili di scarto:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$



Il gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come una combinazione lineare non negativa del primo e del secondo vincolo, la cui intersezione da il punto $x^* = (\frac{27}{7}, \frac{39}{7})$, soluzione ottima del rilassamento del problema di programmazione lineare intera proposto. Tale soluzione individua la soluzione di base data dal primo e dal secondo vincolo e individua le seguenti matrici di base:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

b) Si noti come la variabile di base trovata al punto precedente, implica che le variabili fuori base (che all'ottimo prendono un valore nullo) siano x_3 e x_4, dando come matrice delle variabili fuori base la matrice

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I tagli di Gomory corrispondenti alla soluzione di base ottima sono ottenuti come segue:

$$\begin{aligned}
Ax &= b && (1)\\
A_B x_B + A_N x_N &= b && (2)\\
x_B + A_B^{-1} A_N\, x_N &= A_B^{-1}\, b && A_B \text{ invertibile (di base)} \quad (3)\\
x_B + \lfloor A_B^{-1} A_N \rfloor\, x_N &\leq A_B^{-1}\, b && \text{poichè } x \geq 0 \quad (4)\\
x_B + \lfloor A_B^{-1} A_N \rfloor\, x_N &\leq \lfloor A_B^{-1}\, b \rfloor && x \text{ è intera} \quad (5)
\end{aligned}$$

applicando la diseguaglianza (3) alla soluzione di base ottima, e usando la matrice inversa della matrice di base, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

facendo i conti e riscrivendo i vincoli per ogni variabile di base frazionaria si ottiene:

$$\begin{aligned}
x_1 + 1/7x_3 + 2/7x_4 &= 27/7 && (6)\\
x_2 + 3/7x_3 - 1/7x_4 &= 39/7 && (7)
\end{aligned}$$

e applicando gli operatori di arrotondamento per difetto (vedi (4) e (5)):

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq 3 && (8)\\
x_2 - x_4 &\leq 5 && (9)
\end{aligned}$$

Osservazione: I tagli di Gomory vanno generati applicando la (5), solo a quelle variabili di base che hanno un coefficiente frazionario. Si veda il prossimo esercizio per un esempio di questa osservazione.

c) Per poter dare la rappresentazione grafica dei tagli trovati, dobbiamo scrivere il secondo taglio in funzione delle prime due variabili (senza le variabili di scarto x_3 e x_4). Usando il secondo vincolo otteniamo:

$$x_4 = 6 - 3x_1 + x_2$$

da cui otteniamo $x_1 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$ uguale al primo taglio di Gomory trovato.

Aggiungendo il taglio di Gomory trovato alla soluzione grafica, otteniamo come nuova soluzione di base ottima il punto $x^* = (3, 6)$ che essendo intero è anche la soluzione ottima del problema di partenza.

2 Tagli di Gomory

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + x_2\\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 5x_2 \leq 20\\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 19\\
& x_1 - x_2 \leq 1\\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

a) Dopo aver introdotto le opportune variabili di scarto, si individui una soluzione ottima di base, la corrispondente matrice di base A_B, e la sua inversa A_B^{-1}.

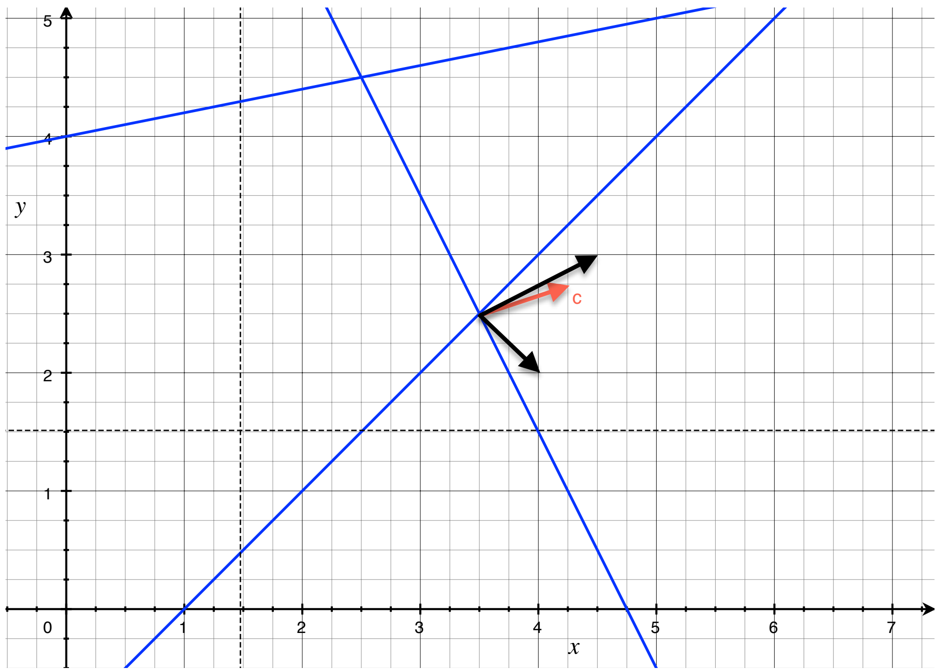
b) Si calcolino i tagli di Gomory relativi alle componenti frazionarie della soluzione.

c) Si dia la rappresentazione grafica delle disuguaglianze trovate.

Soluzione

a) Prima di poter trovare i tagli di Gomory il problema deve essere riscritto nella forma $\min\{cx \mid Ax = b, x \in \mathbb{Z}\}$, introducendo eventualmente delle variabili di scarto:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 19 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$



Il gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come una combinazione lineare non negativa del secondo e del terzo vincolo, la cui intersezione da il punto $x^* = (x_1, x_2) = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$, soluzione ottima del rilassamento del problema di programmazione lineare intera proposto. Le variabili (di scarto) x_4 e x_5 in tale punto prendono valore nullo, e saranno variabili fuori base. Si noti che per essere ammissibile, la soluzione deve avere anche il primo vincolo attivo, e quindi si avrà $x_3 = 11 > 0$. La soluzione ottima $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 11, 0, 0)$ individua la soluzione di base $B = \{1, 2, 3\}$ e individua le seguenti matrici:

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Applicando la diseguaglianza (3) alla soluzione di base ottima, e usando la matrice inversa della matrice di base, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

facendo i conti e riscrivendo i vincoli per ogni variabile di base frazionaria si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_5 &= 19/6 + 2/6 = 21/6 = 7/2 = 3.5 \\ x_2 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{2}{3}x_5 &= 19/6 - 4/6 = 15/6 = 5/2 = 2.5 \\ x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{11}{3}x_5 &= 20 - 38/3 + 11/3 = 20 - 27/3 = 20 - 9 = 11 \end{aligned}$$

da cui si ottengono i tagli:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 - x_5 &\leq 2 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 &\leq 11 \end{aligned}$$

I conti per il taglio di Gomory associati a x_3 sono fatti a solo scopo didattico, essendo il valore ottimo di x_3 intero.

c) Per poter rappresentare per via grafica il secondo taglio di Gomory, dobbiamo scriverlo come funzione delle sole variabili x_1 e x_2. Usando il vincolo della quinta variabile di scarto abbiamo:

$$x_5 = 1 - x_1 + x_2$$

e sostituendo nel secondo taglio di Gormory:

$$x_2 - x_5 \leq 2 \quad \rightarrow \quad x_2 - 1 + x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad x_1 \leq 3$$

Rappresentando questo taglio nel piano, si vede come effettivamente riduca lo spazio delle soluzione ammissibili, rendono non più valida la soluzione di base individuata al punto precedente.

Volendo provare a generare un taglio di Gomory anche per la variabile di base x_3 che all'ottimo assume valore intero, abbiamo:

$$x_3 - x_4 + 3x_5 \leq 11 \quad \rightarrow \quad (20 + x_1 - 5x_2) + (4x_1 - 2x_2 - 19) + 3 - 3x_1 + 3x_2 \leq 11$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 7$$

Andando a rappresentare questo taglio nel piano, si nota subito essere un taglio ridondante.

3 Branch-and-Bound Grafico

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

a) Risolvere il rilassamento continuo del problema per via geometrica.

b) Ricavare una stima per eccesso della soluzione ottima.

c) Risolvere il problema originale con un metodo di branch-and-bound risolvendo per via geometrica i problemi corrispondenti ai vari nodi dell'albero di decisione corrispondente.

Soluzione

a) La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema dato è il punto $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Il valore della funzione del punto di ottimo è pari a $\frac{15}{2}$.

b) Poichè tutte le variabili sono intere e i coefficienti della funzione obiettivo sono interi, anche il valore ottimo del problema sarà un numero intero. Il massimo valore della funzione obiettivo è $\lceil \frac{15}{2} \rceil = 7$.

c) DA FARE