ANALISI 2 — 20/6/2024



1) Sostituendo ho

$z'' = 2z' - y' + 1 = 2z' - z - 1 + 1$

Anche $y'' = 2y' - y + t - 2$

da cui $z(t) = ae^t + bte^t$

$z'(t) = (a+b)e^t + bte^t$

Le C.I. in $z$ diventano $z(1) = 0$

$z'(1) = -3e - 1 + 1 = -3e$

Sostituendo, ho $(a+b)e = 0$

$(a+2b)e = -3e$, da cui $a = 3$, $b = -3$

$z(t) = 3e^t - 3te^t = 3(1-t)e^t$

2) Parametrizzando la curva, ho

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi \left[(a\cos t + b\sin t)(-\sin t) + \cos^2 t\right] dt$$

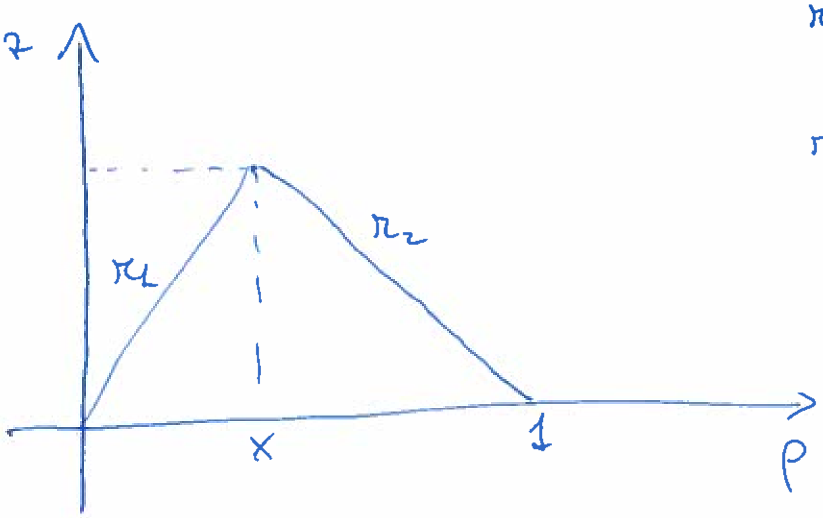
$$= \int_0^\pi \left[-b\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) + \frac{1+\cos 2t}{2}\right] dt$$

$$= \left[-\frac{b}{2}t + \frac{1}{2}\right]_0^\pi = \frac{(-b+1)\pi}{2}, \text{ da cui}$$

$-b+1 = -7 \qquad b = 8$

Segue $P(x,y) = ax + 8y \quad \forall a \in \mathbb{R}$

3)




$r_1: \; z = \frac{\rho}{x} \qquad \rho = zx$

$r_2: \; z = \frac{\rho - 1}{x-1} \qquad \rho = 1 + z(x-$

$$Vol(A_x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_{zx}^{1+z(x-1)} \rho \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{zx}^{1+z(x-1)} dz = \frac{\pi}{3}(x+1)$$

$Area(\partial A_x) = Area(S_1) + Area(S_2) + Area(Base)$

ove $S_1, S_2$ sono date dalla rotazione di $r_1, r_2$ rispettivam.

$$Area(S_1) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x |\alpha_t \wedge \alpha_\theta| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x \left( \frac{t^2}{x^2} + t^2 \right)^{1/2} dt = 2\pi \frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} = \pi x \sqrt{x^2+1}$$

$$Area(S_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_x^1 \left( \frac{t^2}{(x-1)^2} + t^2 \right)^{1/2} dt$$

$$= \pi(1+x)\sqrt{1+(1-x)^2}$$

$Area(Base) = \pi$

$S_1$) $\alpha : [0,x] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\alpha(t,\theta) = \left( t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{t}{x} \right)$

$S_2$) $\alpha : [x,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\alpha(t,\theta) = \left( t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{t-1}{x-1} \right)$

3) Metodo 2 (formula di Guldino)

Area (triangolo) $= \frac{1}{2}$ (indipendente da $x$)

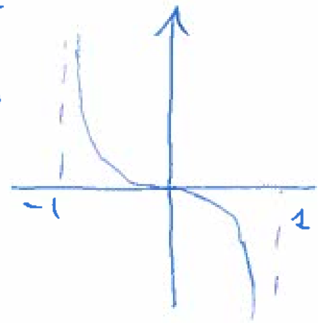
$$x_B = \frac{1}{|T|} \iint_T \xi \, d\xi = 2 \int_0^1 \int_{zx}^{1+z(x-1)} \xi \, d\xi = \int_0^1 (1+z(x-1))^2$$

$$- z^2 x^2 \, dz = \int_0^1 1 + 2z(x-1) + z^2x^2 - 2z^2x + z^2 - z^2x^2 \, dz$$

$$= \left[ z + z^2 x - z^2 - \frac{2}{3} z^3 x + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = 1 + x - 1 - \frac{2}{3} x + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1+x}{3} \quad - \quad \text{Segue } \mathrm{Vol} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi x_B = \pi \frac{(1+x)}{3}$$

4) Posto $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|} & \dots \\ 0 & \dots \end{cases}$, osservo che $\varphi \in C^1 \in (-1,1)$ e inoltre ha grafico



Osservo anche che $\forall\, x,y \in \overline{B}(0,1)$ si ha che $|xy| \leq \frac{1}{2} < 1$

→ Utilizzando l'espressione di $\varphi$ si dimostra facilmente che in ogni punto $(x,0)$ con $x \neq 0$ e in ogni $(0,y)$, $y \neq 0$ tutte le derivate direzionali di $f$ sono nulle. Lo stesso vale a maggior ragione in $(0,0)$ dove $|f(x,y)| \leq c\rho^2$

→ Per mostrare che $f$ è diff. in ogni punto $(a,0)$, $a \neq 0$ osservo che

$$\left| \frac{f(a+h,k) - f(a,0) - \underline{0}\cdot(h,k)}{(h^2+k^2)^{1/2}} \right| = \frac{|a+h|\,|k|}{(h^2+k^2)^{1/2}\,\big|\ln\big(|a+h|\,|k|\big)\big|}$$

$$\leq \frac{C}{\big|\ln|a+h| + \ln|k|\big|} \quad \left(\text{poiché } \frac{|k|}{(h^2+k^2)^{1/2}} \leq 1\right) =: \odot$$

Ora, per $|k| \ll$, $\ln|k| \leq \ln\left|\sqrt{h^2+k^2}\right|$; dunque

$$\big|\ln|k|\big| \geq \left|\ln\left|\sqrt{h^2+k^2}\right|\right|$$ – Segue

$$\odot \sim \frac{C}{\left|\ln\sqrt{h^2+k^2}\right|} \longrightarrow 0$$ – Dunque $f$ diff. in $(a,0)$ –

Una verifica simile (ma più semplice) mostra $f$ diff. in $(0,0)$

→ La regolarità $C^1$ segue mostrando in un modo simile la continuità delle derivate parziali e applicando il teorema del differenziale totale

5] (a) Poiché $|x-x_0| \le |x-y| + |y-x_0|$ si ha

$f(x) - f(y) = |x-x_0| - |y-x_0| \le |x-y|$ ; invertendo $x$ e $y$

si arriva a $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

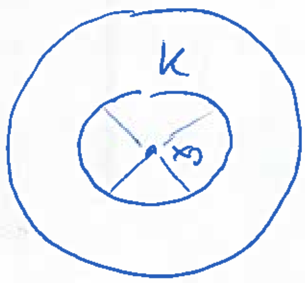
È evidente che $f$ non è diff. in $x_0$. In ogni altro punto si ha

$$df(x) = \frac{x_1 - x_{01}}{|x-x_0|}\, dx_1 + \frac{x_2 - x_{02}}{|x-x_0|}\, dx_2$$

(b) Poiché $f$ è continua e $K$ compatto, l'esistenza del minimo assoluto segue dal teorema di Weierstrass

(c) Supponiamo che $x, y \in K$ siano punti di minimo assoluto di $f$ con $x \neq y$. Poiché $K$ è convesso si ha che $\frac{x+y}{2} \in K$. È evidente che $\left|x_0 - \frac{x+y}{2}\right| < |x_0 - x|$

(d)




(e) $\forall x \in \mathbb{R}^2\ \exists k_0 \in K$, non nec. unico, t.c. $\varphi(x) = |x - k_0|$

$\forall y \in \mathbb{R}^2$ si ha $\varphi(y) \le |y - k_0| \le |y-x| + |x-k_0|$

$= |y-x| + \varphi(x)$. Di qui si procede come in (a)

Se $K$ non è compatto, la proprietà resta vera; infatti $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in K$ t.c. $\varphi(x) \ge |x - k_\varepsilon| - \varepsilon$. Segue

$\varphi(y) \le |y-x| + |x-k_\varepsilon| \le |y-x| + \varphi(x) + \varepsilon$, da cui $|\varphi(y) - \varphi(x)| \le |y-x| + \varepsilon$ $\quad \forall \varepsilon > 0$, da cui la tesi per arbitrarietà di $\varepsilon$