Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Scritto del 22 gennaio 2025

---

1. M-F   Riportare solo il risultato

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e si supponga f differenziabile in $(0,0)$. Siano dati i versori $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ e $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$; si supponga inoltre che $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}(0,0) = 2$. Determinare il gradiente di f nell'origine e trovare un versore $\boldsymbol{z}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}(0,0) = 0$.

2. M-F   Riportare solo il risultato

Data la forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definita da

$$\omega(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}x + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y$$

si calcoli l'integrale sulla circonferenza unitaria di centro l'origine percorsa una volta in senso antiorario. Stabilire inoltre se ω è esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.

3. M-F   Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Si consideri il trapezio $T \subset \mathbb{R}^2$ di vertici $(\sqrt{3}/2, 0)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$. Calcolare

$$(a)\quad \iint_T x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \qquad\qquad (b)\quad \iint_T \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

(per il secondo integrale si consiglia l'uso delle coordinate polari).

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

(a) Si consideri il problema di Cauchy (P) dato dall'equazione differenziale (**non** in forma normale) $(y'(t))^2 = (y(t)+t)^2$ con la condizione iniziale $y(0) = 1$. Determinare l'espressione di *due distinte* funzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ che risolvono entrambe, in un intorno di 0, il problema (P).

(b) Dire se y_1 e y_2 si possono estendere in maniera C^1 in modo tale che risolvano (P) e siano **strettamente monotone** su tutto $\mathbb{R}$. Qual è l'espressione analitica di tali estensioni?

(c) Risolvere il problema dato dall'equazione (in forma normale) $y'' = (y+t)\Big(1+\dfrac{1}{y'}\Big)$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Dare la definizione di integrale di una forma differenziale lungo un cammino. Come si comporta l'integrale rispetto a riparametrizzazioni?

T2. (Fisici) Enunciare il teorema di riduzione degli integrali doppi dapprima su un rettangolo e poi su un generico insieme misurabile e limitato.

T3. (Fisici) Dare la definizione di spazio metrico compatto e compatto per successioni. Dimostrare che se X è uno spazio metrico compatto per successioni, allora X è completo. Uno spazio metrico completo e limitato rispetto alla sua distanza può non essere compatto?

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia A un aperto regolare connesso di classe C^1 e tale che $\overline{A} \subset \Omega$. Ricordiamo la notazione

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$$

per $u \in C^2(\Omega)$.

(a) Utilizzando il teorema della divergenza, dimostrare che, se $v \in C^1(\Omega)$ e $u \in C^2(\Omega)$, allora

$$\int_A v \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_A \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial A} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_e} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{n}_e$ è il versore normale esterno a ∂A e $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_e}$ denota la derivata di u nella direzione $\boldsymbol{n}_e$ calcolata nei punti di ∂A. L'ultimo integrale in (1) è da intendersi come un integrale di linea: osserviamo infatti che, essendo A regolare e connesso, la sua frontiera si può interpretare come sostegno di una curva chiusa regolare che "racchiude" A stesso.

(b) Dimostrare che se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $\Delta u = 0$ in Ω, allora

$$\int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_e} \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

(c) Utilizzando la formula (1), dimostrare che se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $\Delta u = 0$ in A e $u = 0$ su ∂A, allora $u = 0$ su A.

(d) Dimostrare che se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $\Delta u = 0$ in A e $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_e} = 0$ su ∂A, allora u è costante su A.

(e) Data $f \in C(\Omega)$, dimostrare che esiste al massimo una funzione u che risolve il problema dato dall'equazione $\Delta u = f$ in A con la condizione "al bordo" $u = 0$ su ∂A.