Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2023/2024

Scritto del 18 settembre 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Determinare la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione $y' + 2ty \ln y = ty$ con la condizione iniziale $y(0) = 1$ (*Suggerimento:* può essere utile un cambiamento di variabile).

2. M-F Riportare solo il risultato

Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \big(t \cos t, t \sin t, t^3/6\big)$. Calcolare la lunghezza di γ e l'integrale su γ della forma differenziale $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + \left(z + \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\right)\mathrm{d}z$.

3. M-F Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Sia A la porzione di piano definita come segue:

$$A = \big\{(x,y) : y > 0,\ x^2 + y^2 \leq 2, y^2 - x^2 \geq 1\big\}.$$

Calcolare i seguenti integrali:

$$\iint_A x \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y, \qquad \iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y.$$

4. M-F   Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Detto $Q = (0,1) \times (0,1)$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy\ln(xy)$ su Q e da $f(x,y) = 0$ su $\mathbb{R}^2 \setminus Q$.

(a) Dire se f è continua su $\mathbb{R}^2$; in caso contrario determinare quali sono i punti di discontinuità di f.

(b) Dire se la restrizione di f a Q è Lipschitziana.

(c) Discutere la differenziabilità di f nei punti $(0,0)$, $(0,1/2)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange per funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Discutere la situazione nel caso di $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con $M > 1$.

T2. (Fisici) Dati X, Y spazi metrici, $x_0 \in X$ e $f : X \to Y$, dare la definizione di continuità di f in x_0 e discutere la caratterizzazione della continuità in termini di successioni.

T3. (Fisici) Dimostrare che ogni curva regolare in $\mathbb{R}^2$, nell'intorno di ogni punto, può essere rappresentata come grafico di una funzione di una variabile. Come si formalizza l'analogo di questa proprietà nel caso delle superfici regolari in $\mathbb{R}^3$?

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$.

(a) Dimostrare che φ è Lipschitziana e biettiva.

(b) Si consideri la distanza su $\mathbb{R}$ definita da $\mathrm{d}_\varphi(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Dimostrare che d_φ è, effettivamente, una distanza.

(c) D'ora in avanti si indichino con $\mathbb{R}_\mathrm{d}$ e $\mathbb{R}_\varphi$ gli spazi metrici ottenuti considerando su $\mathbb{R}$ rispettivamente la distanza euclidea e la distanza d_φ. Dire se $\mathbb{R}_\varphi$ è completo.

(d) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si supponga che f sia Lipschitziana da $\mathbb{R}_\mathrm{d}$ a $\mathbb{R}_\mathrm{d}$. È vero che allora f è Lipschitziana da $\mathbb{R}_\varphi$ a $\mathbb{R}_\mathrm{d}$? E da $\mathbb{R}_\mathrm{d}$ a $\mathbb{R}_\varphi$? Da $\mathbb{R}_\varphi$ a $\mathbb{R}_\varphi$? (Per ciascuna delle tre proprietà fornire una dimostrazione oppure un controesempio).