

1. M-F Riportare solo il risultato

Risolvere i due problemi di Cauchy dati dall'equazione differenziale $y' = 2t + 3t^2(y - t^2)^2$ associata, rispettivamente, alle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

2. M-F Riportare solo il risultato

Si definisca $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha \sin x}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}}$ per $(x,y) \neq (0,0)$. Dire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f risulta continua in $(0,0)$.

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

Posto $K := \overline{B}(0,3)$ e data $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$, determinare i valori minimo assoluto e massimo assoluto di f su K . Determinare inoltre tutti i punti di minimo e massimo, sia assoluto che relativo, di f su K .

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

(a) Si consideri la curva $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \cos 2t)$. Calcolare $\text{lung}(\gamma)$.

(b) Sia $\Gamma = \gamma([0, \pi])$ il sostegno di γ . Detto C il più piccolo insieme convesso di $\mathbb{R}^2$ contenente Γ , calcolare

$$\iint_C y \, dx \, dy.$$

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Enunciare e dimostrare il teorema del gradiente nullo su aperti connessi.

T2. (Fisici) Enunciare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$. Data una funzione $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, è possibile esprimere

$$\int_{\Omega} (f_{xx} - 2f_{yy}) \, dx \, dy$$

come un integrale di bordo?

T3. (Fisici) Dare la definizione di spazio metrico completo. Dimostrare che se X è uno spazio metrico completo, allora un sottoinsieme $C \subset X$ è chiuso se e solo se è a sua volta completo con la metrica “ereditata” da X .

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M (a) Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy.$$

Determinare una funzione f tale che $df = \omega$ sul semipiano $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e una funzione g tale che $dg = \omega$ sul semipiano $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Trovare inoltre una funzione F tale che $dF = \omega$ su $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times (-\infty, 0])$.

(b) Si ponga ora $\omega_1(x, y) := \omega(x, y) - \omega(x, y + 1)$. Dire se ω_1 è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [-1, 0])$ e, in caso affermativo, determinare una primitiva di ω_1 .

(c) Si consideri, infine,

$$\omega_2(x, y) := \omega(x, y) + 2\omega(x, y + 1) - 3\omega(x, y + 2) - 4\omega(x, y + 3) + \lambda\omega(x, y + 4).$$

Dire per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ la forma ω_2 risulta esatta su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [-4, 0])$. Per tale valore di λ è possibile trovare un aperto *strettamente* più grande di Ω su cui ω_2 risulta comunque esatta?