1. Si determini l'insieme dei valori $\lambda \geq 0$ per i quali la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t)\,y'(t) = (t^2+1)^{-1} \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2}\,y(t)^2 = \operatorname{arctg} t + c$$

$$y(t)^2 = 2(\operatorname{arctg} t + c)$$

$$y(0) = \lambda \quad \Rightarrow \quad 2c = \lambda^2 .$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy soddisfa

$$y(t)^2 = 2 \operatorname{arctg} t + \lambda^2$$

L'insieme naturale di definizione è tutto $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\lambda^2 \geq -2 \inf_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{arctg} t = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

Quindi

$$\lambda \geq \sqrt{\pi} .$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della seguente funzione relativo al punto (0,0):

$$f(x,y) = \frac{2}{2x^2 - y + 2}.$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + x^2 - \frac{1}{2}y} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}y - x^2\right)}$$

Ricordiamo che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \sigma(t) \qquad \text{con} \quad \sigma(t) = o(t^3) \quad \text{per } t \to 0.$$

Quindi

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}y - x^2\right)} = 1 + \left(\frac{1}{2}y - x^2\right) + \left(\frac{1}{2}y - x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - x^2\right)^3 + \sigma\left(\frac{1}{2}y - x^2\right)$$

Poiché (coord. polari)

$$\frac{1}{2}y - x^2 = \rho\left(\frac{1}{2}\sin\vartheta - \rho\cos^2\vartheta\right)$$

risulta

$$\sigma\left(\frac{1}{2}y - x^2\right) = o(\rho^3).$$

Allora

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}y - x^2\right)} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}y - x^2 + \frac{1}{4}y^2 - yx^2 + \frac{1}{8}y^3}_{\text{polinomio di grado 3}} + o(\rho^3), \qquad \rho = |(x,y)|.$$

Allora

$$P_3(x,y) = 1 + \frac{1}{2}y - x^2 + \frac{1}{4}y^2 - yx^2 + \frac{1}{8}y^3.$$

3.

a) $$\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{(\pi+t)^\alpha}(\cos t, \sin t) \quad , \quad t \in [0,T] \qquad (\alpha > 0)$$

Sia $l_T(\gamma_\alpha)$ la lunghezza di γ_α. Per quali valori di α si ha che

$$\lim_{T\to+\infty} l_T(\gamma_\alpha) < +\infty \,?$$

b) Determinare l'area della porzione di piano limitata dalle due spirali

$$\gamma(t) = \frac{1}{(\pi+t)^{1/2}}(\cos t, \sin t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\eta(t) = \frac{1}{(2\pi+t)^{1/2}}(\cos t, \sin t)$$

e dai segmenti $[(4\pi)^{-1/2}, (3\pi)^{-1/2}] \times \{0\}$, $[(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2}] \times \{0\}$.

---

a) $$l_T(\gamma_\alpha) = \int_0^T |\gamma'_\alpha(t)|\,dt$$

$$\gamma'_\alpha(t) = \left(-\frac{\sin t}{(\pi+t)^\alpha} - \alpha\frac{\cos t}{(\pi+t)^{\alpha+1}} \, , \, \frac{\cos t}{(\pi+t)^\alpha} - \alpha\frac{\sin t}{(\pi+t)^{\alpha+1}} \right)$$

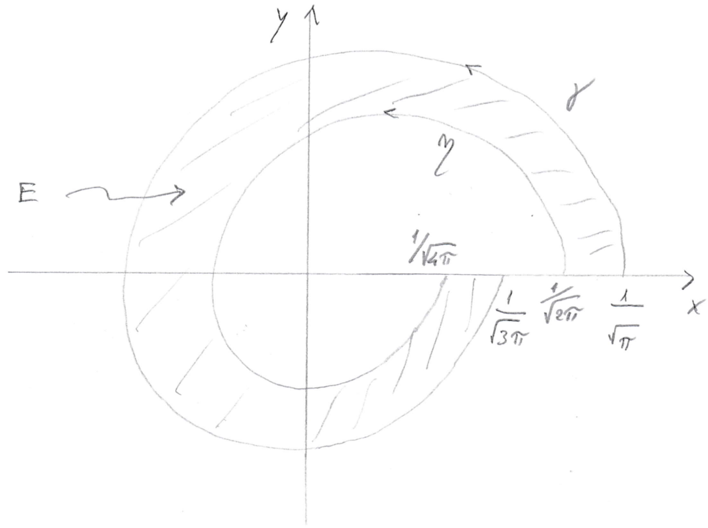
$$|\gamma'_\alpha(t)|^2 = \frac{1}{(\pi+t)^{2\alpha}} + \frac{\alpha^2}{(\pi+t)^{2\alpha+2}}$$

$$|\gamma'_\alpha(t)| = \frac{1}{(\pi+t)^\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2}{(\pi+t)^2}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{(\pi+t)^\alpha} \quad \text{per } t \to +\infty$$

allora

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T |\gamma'_\alpha(t)|\,dt < +\infty \quad \text{se e solo se} \quad \alpha > 1.$$

b)



$E: \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$

$$\frac{1}{(2\pi+\vartheta)^{1/2}} \le \rho \le \frac{1}{(\pi+\vartheta)^{1/2}}$$

$$\text{area } E = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/\sqrt{2\pi+\vartheta}}^{1/\sqrt{\pi+\vartheta}} \rho \, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{\pi+\vartheta} - \frac{1}{2\pi+\vartheta}\right] d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{\vartheta+\pi}{\vartheta+2\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{4} - \log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

4. a) Sia

$$\omega_0(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

ω_0 è chiusa, ma non esatta. Infatti:

$$\int_{C_1} \omega_0 = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,(-\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,\cos\theta \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi \neq 0.$$

b) Sia $P = (x_P, y_P) \neq (0,0)$ e

$$\omega_P(x,y) = \omega_0(x-x_P, y-y_P).$$

Sia poi

$$\omega = \omega_0 - \omega_P .$$

Allora ω è chiusa e, se $r > |P|$,

$$\int_{C_2} \omega = \int_{C_2} \omega_0 - \int_{C_2} \omega_P$$

entrambi gli integrali valgono 2π (per omotopia, in ciascuno dei due possiamo integrare sulla circonferenza di raggio 1 centrata in $(0,0)$ e P rispettivamente)

Allora

$$\int_{C_2} \omega = 0.$$

c) Siano $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con $|P| = |Q|$. Sia

$$\omega = \omega_P - \omega_Q \qquad (\omega_P \text{ e } \omega_Q \text{ definite come in (b)}).$$

ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(P,Q)\}$, per cui se $r < |P| = |Q|$ allora $\int_{C_r} \omega = 0$.

Se invece $r > |P| = |Q|$ allora, come in (b)

$$\int_{C_2} \omega = \int_{C_2} \omega_P - \int_{C_2} \omega_Q = 2\pi - 2\pi = 0.$$

5. $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\quad g(x,y)=f(x)f(y)$.

a) Se s è un punto di massimo relativo per f, allora (s,s) è un punto di massimo relativo per g.

FALSO ; si pensi a:

$$f(x)=-x^2 \quad , \quad s=0$$

$$g(x,y)=x^2y^2$$

b) Se (s,s) è un punto di massimo relativo per g, allora s è un punto di massimo relativo per f.

FALSO ; si pensi a

$$f(x)=-1+x^2 \qquad x=0 \text{ è punto di minimo}$$

$$g(x,y)=(-1+x^2)(-1+y^2)=1-(x^2+y^2)+x^2y^2 \qquad : (0,0) \text{ è punto di massimo locale}$$

c) Se (s,s) è un punto di massimo relativo per g allora $f'(s)=0$.

VERA.

Dim. Poiché g è C^1, deve essere

$$\nabla g(s,s)=0 \qquad \text{cioè} \qquad f'(s)f(s)=0.$$

Se $f(s)\neq 0$ allora $f'(s)=0$. Sia $f(s)=0$, quindi $g(s,s)=0$.
Per ipotesi esiste un intorno di (s,s) in cui 0 è il valore massimo; in particolare, per x in un opportuno intorno di s:

$$g(x,x)\leq 0 \qquad \text{cioè} \qquad f(x)^2\leq 0 \qquad \text{cioè} \qquad f\equiv 0 \quad \text{in un intorno di } s.$$

Allora $f'(s)=0$.

d) Se (x_0,y_0) è un punto di estremo relativo per g allora x_0 e y_0 sono punti di estremo relativo per f.

FALSO ; si pensi a f come in figura, con $x_0=-1$, $y_0=1$

$g\equiv 0$ in un intorno di $(-1,1)$

$y_0=1$ non è di estremo per f.