1. $$y'''(t) = 8(y(t) - t)$$

$$y'''(t) - 8y(t) = -8t$$

eq. caratteristica $\qquad z^3 - 8 = 0$

$$z_1 = 2 \quad , \quad z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$$

L'equazione omogenea associata ha pertanto le soluzioni:

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos\sqrt{3}t + c_3 e^{-t} \sin\sqrt{3}t \,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Si vede poi subito che $\bar{y}(t) = t$ è soluzione particolare dell'equazione completa.

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos\sqrt{3}t + c_3 e^{-t} \sin\sqrt{3}\, t + t \,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. $$\omega(x,y) = y^2 \sin xy\, dx + (xy \sin xy - \cos xy)\, dy$$

$$\gamma : [0, \tfrac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \gamma(t) := (2\pi + \cos t, \sin t)$$

Si verifica subito che ω è chiusa; pertanto è esatta (è definita su tutto $\mathbb{R}^2$).

Una primitiva f soddisfa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \sin xy \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xy \sin xy - \cos xy$$

Dalla prima

$$f(x,y) = -y \cos xy + \varphi(y) \quad , \text{ quindi } \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\cos xy + xy \sin xy + \varphi'(y).$$

Deve allora essere $\varphi'(y) \equiv 0$ cioè $\varphi(y) = \text{cost}$. Allora una primitiva è

$$f(x,y) = -y \cos xy.$$

Quindi

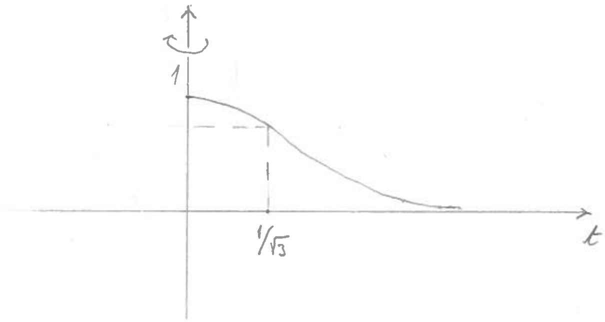
$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(\tfrac{3}{2}\pi)) - f(\gamma(0)) = f(2\pi, -1) - f(2\pi + 1, 0) = 1.$$

3.

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad , \qquad \text{con } g(t) = \frac{1}{1+t^2} .$$

$$g'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$g''(t) = -2\,\frac{(1+t^2)^2 - t\,2\,(1+t^2)\,2t}{(1+t^2)^4} = -2\,\frac{1+t^2-4t^2}{(1+t^2)^3} = 2\,\frac{3t^2-1}{(1+t^2)^3}$$



Ne segue che f è concava sul cerchio di centro l'origine e raggio $1/\sqrt{3}$.

Al di fuori di tale regione f non è né concava né convessa nell'intorno di ogni punto (il piano tangente attraversa il grafico della funzione).

— — —

Volendo procedere analiticamente, calcoliamo la matrice hessiana $H_f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2} = -2x(1+x^2+y^2)^{-2} \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\,(1+x^2+y^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\left[(1+x^2+y^2)^{-2} + x\cdot(-2)(1+x^2+y^2)^{-3}\cdot 2x\right] =$$

$$= -2\,(1+x^2+y^2)^{-3}\,(1+x^2+y^2-4x^2) = -2\,\frac{1-3x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,\frac{1+x^2-3y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2x\,(-2)\,(1+x^2+y^2)^{-3}\,2y =$$

$$= \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} .$$

Allora:

$$\det H_f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^6} \cdot \left[4(1-3x^2+y^2)(1+x^2-3y^2) - 64x^2y^2\right]$$

$$\frac{1}{4}[\ldots] = 1+x^2-3y^2-3x^2-3x^4+9x^2y^2+y^2+x^2y^2-3y^4-16x^2y^2 =$$

$$= 1-2x^2-2y^2-3x^4-3y^4-6x^2y^2$$

$$= 1-2(x^2+y^2) - 3(x^4+y^4+2x^2y^2) =$$

$$= 1-2(x^2+y^2)-3(x^2+y^2)^2$$

Sia $P(t) = -3t^2-2t+1$; $P(t)$ si annulla per

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{-3} = \frac{1 \pm 2}{-3} = \begin{cases} -1 \\ 1/3 \end{cases}.$$

Quindi

$$P(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad -1 \leq t \leq 1/3 .$$

Allora

$$\det H_f(x,y) \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad x^2+y^2 \leq 1/3 .$$

Guardiamo il segno di $\partial^2 f/\partial x^2$ in tale insieme; poiché $1-3x^2 \geq 3y^2$, si ha

$$1-3x^2+y^2 \geq 4y^2 \geq 0$$

da cui

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,\frac{1-3x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^3} \leq 0 .$$

Allora f è concava su $B_{1/\sqrt{3}}(0,0)$.

4 bis.

$$f(x,y)=x^4+y^4-\alpha x^2y^2-xy$$

$$Z(f): \qquad x^4+y^4-\alpha x^2y^2-xy=0.$$

a) Individuiamo i punti di $Z(f)$ in cui ∇f si annulla.

$$\begin{cases} 4x^3-2\alpha xy^2-y=0 \\ 4y^3-2\alpha x^2y-x=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo le prime due equazioni per x e y, rispettivamente, e sottraiamo; si ottiene

$$4(x^4-y^4)=0 \qquad \text{cioè } y=\pm x$$

Allora

$$\begin{cases} y=x \\ 4x^3-2\alpha x^3-x=0 \\ f(x,x)=0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y=-x \\ 4x^3-2\alpha x^3+x=0 \\ f(x,-x)=0 \end{cases}$$

Oltre la soluzione $(0,0)$ vi è

$$\begin{cases} y=x \\ (4-2\alpha)x^2-1=0 \\ 2x^4-\alpha x^4-x^2=0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y=-x \\ 2(2-\alpha)x^2+1=0 \\ 2x^4-\alpha x^4+x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ 2(2-\alpha)x^2-1=0 \\ (2-\alpha)x^2-1=0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y=-x \\ 2(2-\alpha)x^2+1=0 \\ (2-\alpha)x^2+1=0 \end{cases}$$

nessuna soluzione $\qquad\qquad$ nessuna soluzione.

Pertanto, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, vi è soltanto l'origine come punto cui non si può applicare il Teorema della funzione implicita.

b) $(\alpha=-2)$ $\qquad x^4+y^4+2x^2y^2-xy=0$

La funzione f è

$$(x^2+y^2)^2-xy\ ,$$

che in coordinate polari diventa

$$\rho^2(\rho^2-\cos\vartheta\sin\vartheta)\ \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow}\ +\infty\ .$$

Allora $Z(f)$ è limitato.

Se invece $\alpha=1$:

$$f(x,y)=\underbrace{x^4+y^4}_{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}-x^2y^2-xy=$$

$$=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2-xy$$

e, in coordinate polari

$$\rho^4-3\rho^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta-\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

quindi, a meno di un fattore ρ^2

$$\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\vartheta\right)\rho^2-\cos\vartheta\sin\vartheta\ \geq\ \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\rho^2-\cos\vartheta\sin\vartheta\ \underset{\rho\to+\infty}{\to}\ +\infty$$

Ancora, $Z(f)$ è limitato.

c) Se ora $\alpha=2$: $\qquad f(x,y)=x^4+y^4-2x^2y^2-xy$

$$=(x^2-y^2)^2-xy\ .$$

Intersechiamo $Z(f)$ con la retta $y=mx$:

$$(1-m^2)^2x^4-mx^2=0$$

da cui $x=0$ (quindi $y=0$) e, se $m\neq 1$

$$x^2=m/(1-m^2)^2 \qquad \text{cioè, se } m>0,\quad x=\frac{\pm\sqrt{m}}{|1-m^2|}$$

Si consideri, ad esempio, il punto

$$P_m=(x_m,\ m x_m) \qquad \text{con} \qquad x_m=\sqrt{m}/|1-m^2|\ .$$

Risulta

$$P_m\in Z(f)\qquad ,\qquad x_m\to+\infty\quad \text{per } m\to 1$$

Concludiamo che $Z(f)$ non è limitato.

5.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua

$$F(x,y) = \int_0^y ds \int_0^x f(r,s)\,dr, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione $F(x_0, \cdot)$, cioè

$$F(x_0,y) = \int_0^y g(x_0,s)\,ds \quad , \quad \text{con } g(x,s) = \int_0^x f(r,s)\,dr .$$

La funzione $g(x_0,\cdot)$ è continua (integrali dipendenti da parametro), quindi $F(x_0,\cdot)$ è derivabile (teorema fondamentale del calcolo integrale) e risulta:

$$F_y(x_0,y) = g(x_0,y) = \int_0^{x_0} f(r,y)\,dr .$$

Quindi, comunque preso $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_y(x,y) = \int_0^x f(r,y)\,dr .$$

Per il teorema di riduzione degli integrali multipli (su un rettangolo), possiamo anche scrivere

$$F(x,y) = \int_0^x dr \int_0^y f(r,s)\,ds$$

Quindi, come sopra:

$$F_x(x,y) = \int_0^y f(x,s)\,ds .$$

b) Dimostriamo che F_y è continua (analogamente si procede per F_x).

Fissiamo (x_0,y_0); per ogni (x,y) si ha

$$F_y(x,y) - F_y(x_0,y_0) = \int_0^x f(r,y)\,dr - \int_0^{x_0} f(r,y_0)\,dr$$

Sia $(-R,R)$ un intervallo contenente x_0 e x; per l'uniforme continuità di f su $[-R,R]\times\overline{V}$ con V intervallo aperto di y_0, si ha:

fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{matrix} (r,y) \in [-R,R]\times\overline{V} \\ |y-y_0| < \delta \end{matrix} \implies |f(r,y) - f(r,y_0)| < \varepsilon .$$

Allora

$$F_y(x,y)-F_y(x_0,y_0)=\int_0^x f(z,y_0)\,dz-\int_0^{x_0} f(z,y_0)\,dz+\int_0^x\big(f(z,y)-f(z,y_0)\big)\,dz$$

$$|F_y(x,y)-F_y(x_0,y_0)|\le\left|\int_{x_0}^x f(z,y_0)\,dz\right|+\left|\int_0^x |f(z,y)-f(z,y_0)|\,dz\right|\le$$

$$\le M|x-x_0|+\varepsilon|x|,$$

dove M è un maggiorante per $|f|$ su $[-R,R]\times\bar V$. Da qui segue subito che per $|(x,y)-(x_0,y_0)|$ sufficientemente piccolo il valore $|F_y(x,y)-F_y(x_0,y_0)|$ può essere reso sufficientemente piccolo.

---

c) $f(x,y)=x^2+y^2$

Possiamo calcolare esplicitamente $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\int_0^y ds\int_0^x(z^2+s^2)\,dz=\int_0^y\left(\frac{1}{3}x^3+s^2x\right)ds=\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{3}xy^3$$

$$=\frac{1}{3}xy(x^2+y^2)$$

In coordinate polari:

$$\frac{1}{3}\rho^4\cos\vartheta\sin\vartheta=\frac{1}{6}\rho^4\sin 2\vartheta$$

Il valore massimo su $\overline{B}(0,1)$ si ottiene pertanto per

$\rho=1 \qquad \sin 2\vartheta=1$ cioè

cioè $2\vartheta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\vartheta=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad : \quad \vartheta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

Si hanno i punti $(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

Analogamente i punti di minimo si trovano per

$$(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right).$$