ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI A.M. 1

Scritto del 16 giugno 2022

Esercizio 1. (a) Si consideri la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$, dove $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, +\infty)$, definita da $F(t, z) = \ln(1 + z) - e^{t+z}$. Detto $Z(F)$ l'insieme in cui F si annulla, ovvero $Z(F) = \{(t, z) \in \Omega : F(t, z) = 0\}$, studiare l'applicabilità del teorema delle funzioni implicite nei punti di $Z(F)$ rispetto a ciascuna delle variabili.

(b) Sia inoltre data l'equazione differenziale

$$F(t, y') = \ln(1 + y') - e^{t+y'} = 0 \tag{1}$$

e si considerino i problemi di Cauchy (P_1) e (P_2) ottenuti associando l'equazione (1) rispettivamente alle condizioni iniziali $y(2) = 0$ e $y(-2) = 0$. Per ciascuno dei due problemi (P_1) e (P_2) dire se esiste, almeno localmente rispetto alla variabile tempo, una soluzione. In caso positivo, discutere l'unicità di tale soluzione.

Esercizio 2. (a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, continua e non negativa. Siano $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ due successioni di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan tali che

(i) A_n è limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$ e B_m è limitato per ogni $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $B_m \subset B_{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$;

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$;

(iv) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $A_n \subset B_m$; analogamente, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $B_m \subset A_n$.

Dimostrare che esistono (non necessariamente finiti) e sono uguali tra loro i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \quad \lim_{m\to\infty} \iint_{B_m} f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y. \tag{2}$$

(b) Si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la regione di piano

$$A_n = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ 0 < x \leq n,\ \ln x \leq y \leq \ln(1 + x), \Big\}.$$

Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{A_n} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{(1 + y)^\alpha}.$$