

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI A.M. 1

Scritto del 15 settembre 2022

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2} + e^{\lambda y^2} - 2}{x^2 + y^2},$$

cercando di giustificare la risposta in modo il più possibile rigoroso.

Esercizio 2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Dimostrare che $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ definisce allora una distanza su \mathbb{R} . Si consideri ora il caso specifico in cui

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ x - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sia d la distanza associata alla funzione φ . Descrivere la palla chiusa

$$\overline{B}(1, 1) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, 1) \leq 1\}.$$

Dire inoltre se \mathbb{R} è completo rispetto alla distanza d . Infine si indichi con \mathbb{R}_d (rispettivamente \mathbb{R}_E) l'insieme dei numeri reali visto come spazio metrico utilizzando la distanza d (rispettivamente la distanza Euclidea). Dire se la funzione $f(x) = x$ è continua da \mathbb{R}_d a \mathbb{R}_E e se è continua da \mathbb{R}_E a \mathbb{R}_d .