

Analisi B

Prova scritta 14/09/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)
---	--	-----------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■

L'esercizio contrassegnato con • è diverso per i matematici e i fisici.

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3, Bianca = 0, Errata = -1.**

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

1. Sia $g(x, y, z, t) = y \cos x + z^2$ per $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Allora ☐a g ha almeno un punto di minimo relativo; ☐b g non ha punti di massimo locale; ☐c g ha un numero finito di punti stazionari; ☐d $g|_{[0,1]^4}$ non ha minimo assoluto.
2. Siano $g, f \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $|g(x) - g(y)| \leq f(|x - y|)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Allora ☐a g è lipschitziana se f è limitata; ☐b g è uniformemente continua se f è continua; ☐c g è limitata se f è continua; ☐d g è lipschitziana se f è continua.
3. Sia $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 e si ponga per brevità $\psi_{ij} = D_i D_j \psi$ per $i, j = 1, 2$. Allora perché ψ sia convessa è ☐a $necessario che $\psi_{11}(x) > 0$ per ogni x ; ☐b $necessario che $\psi_{12}^2(x) \leq \psi_{11}(x)\psi_{22}(x)$ per $x = (0, 0)$; ☐c $sufficiente che $\psi_{12}^2(x) \leq \psi_{11}(x)\psi_{22}(x)$ per ogni x ; ☐d $sufficiente che $\psi_{11}(x) > 0$ e $\psi_{22}(x) > 0$ per ogni x .$$$$
- 4. **Matematici:** Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / (2n)!$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora ☐a $la serie converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$; ☐b $$f(-1) < 1$; ☐c $$f(1) > 1$; ☐d $$f$ è limitata in $(0, +\infty)$ ma non in $\mathbb{R}$.$$$$
5. Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante $u''(t) + u(t) = -2 \sin t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$. Allora $u(\pi)$ vale ☐a $1; ☐b $-1; ☐c $$-\pi$; ☐d $$\pi$.$$$$
6. Sia $J = \int_S y^2 ds(x, y)$ ove S è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Allora J vale ☐a $$4/3$; ☐b $$9\sqrt{2}$; ☐c $$2\sqrt{2}/3$; ☐d $$9$.$$$$
- 7. **Matematici:** Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ data dalle formule $\omega(x, y) = y^2 dx + (2xy + 3y^2) dy$ se $y > 0$ e $\omega(x, y) = 0$ altrimenti. Allora ω è ☐a $chiusa ma non esatta se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; ☐b $esatta se e solo se Ω non contiene l'origine; ☐c $esatta se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; ☐d $esatta se e solo se Ω è semplicemente connesso.$$$$
8. Siano $\Sigma = \{(x, y) \in [0, +\infty)^2 : x + y = 2\}$ e $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ data da $v(x, y) = x^2 + y^2$. Allora ☐a $$\min v = 3$ e v non ha massimo; ☐b $$\min v = 3$ e $\max v = 5$; ☐c $$\min v = 2$ e $\max v = 4$; ☐d $$\min v = 2$ e $\max v = 5$.$$$$
9. Per $x \in \mathbb{R}$ sia $f(x) = x^2 - x/2 + \int_0^1 \sin(xy) dy$. Allora esiste un intorno di 0 in cui f ☐a $cresce; ☐b $è convessa; ☐c $è concava; ☐d $decresce.$$$$
10. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia u la soluzione massimale del problema di Cauchy $u' = u^+$ e $u(0) = \alpha$. Allora, per ogni α , si ha che ☐a $$u$ non è limitata; ☐b $$u$ è convessa; ☐c $$u$ è limitata; ☐d $$u$ è strettamente monotona.$$$$

spazio riservato alla commissione