

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+3}}{3^{2n+1} (2n+1)!}$$

Possiamo riscrivere la serie come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{3} \right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} = \operatorname{Sh} \left(\frac{x^3}{3} \right)$$

Quanto all'insieme di convergenza è chiaro che è tutto $\mathbb{R}$, dal momento che la serie di potenze del seno iperbolico ha raggio di convergenza infinito

$$\textcircled{2} f = 4 + 8x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ poiché è un polinomio.

Applichiamo la CN. Abbiamo

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 16xy^2 - 4x = 0 \\ 16x^2y - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x(4y^2 - 1) = 0 \\ 4y(4x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1/2 \\ y=1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1/2 \\ y=-1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=-1/2 \end{cases}$$

Passiamo alla CS.

$$f_{xx} = 16y^2 - 4$$

$$f_{xy} = 32xy$$

$$f_{yy} = 16x^2 - 4$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ è punto di max locale}$$

$$H_f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 8 \\ \pm 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tutti i quattro punti } \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) \text{ sono punti di sella}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = (1 + \cos\theta) \cos\theta \\ y = (1 + \cos\theta) \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -2 \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \\ y' = \cos\theta (1 + \cos\theta) - \sin^2\theta \end{cases}$$

Pertanto, più semplicemente

$$r(\theta) = (p(\theta) \cos\theta, p(\theta) \sin\theta)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |r'| &= \left[(p'(\theta) \cos\theta - p(\theta) \sin\theta)^2 + (p'(\theta) \sin\theta + p(\theta) \cos\theta)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[p'^2 \cos^2\theta + p^2 \sin^2\theta - 2pp' \sin\theta \cos\theta + p'^2 \sin^2\theta + p^2 \cos^2\theta + 2pp' \sin\theta \cos\theta \right]^{1/2} \\ &= [p'^2 + p^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Nel nostro caso, dunque

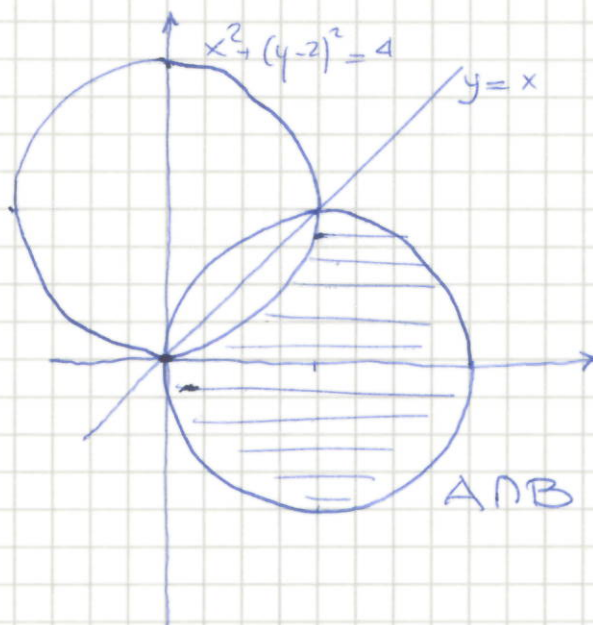
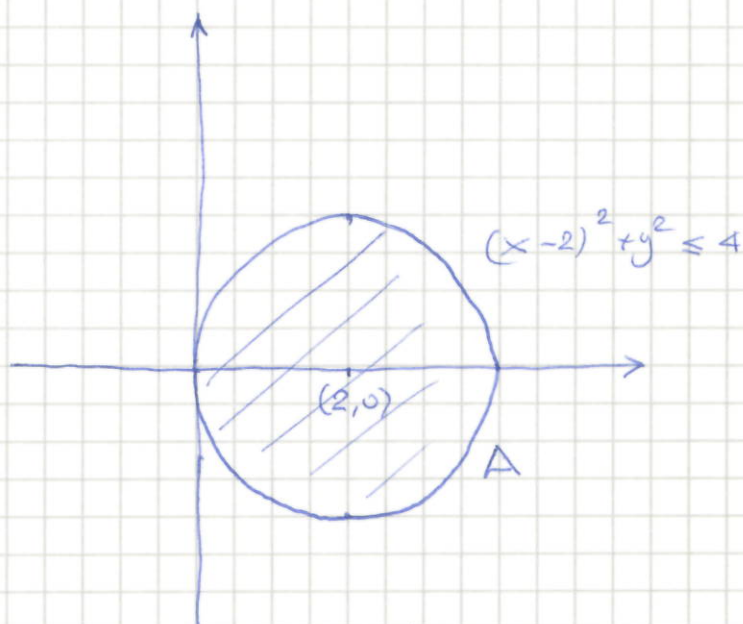
$$\begin{aligned} |r'(\theta)| &= \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} = \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, d\sigma_1 &= \int_0^{\pi} \frac{(1 + \cos\theta) \sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos\theta} \, d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + \cos\theta}} \, d\theta = \left(\begin{array}{l} \cos\theta = t \\ -\sin\theta \, d\theta = dt \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \int_1^{-1} \frac{-dt}{\sqrt{1+t}} = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{2\sqrt{1+t}} dt$$

$$= 2\sqrt{2} \left[\sqrt{1+t} \right]_{-1}^1 = 4$$

④



Se passiamo in coordinate polari

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad (p \cos \theta - 2)^2 + p^2 \sin^2 \theta = 4$$

$$p = 4 \cos \theta, \quad \text{con } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

e quindi

$$A: \begin{cases} 0 \leq p \leq 4 \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \cos \theta} p^2 \cdot p dp \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{p^4}{4} \right]_0^{4\cos\theta} d\theta = \frac{4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \theta d\theta$$

$$= 2.64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{128}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{128}{4} \left[\theta + \sin 2\theta + \frac{\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 32 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right] = \frac{32 \cdot 3}{2} \frac{\pi}{2} = 24\pi$$

Per quanto riguarda $A \cap B$, non è difficile vedere che
 $A \cap B = E_1 \cup E_2$

dove

$$E_1: \begin{cases} 0 \leq p \leq 4\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

$$E_2: \begin{cases} 4\sin\theta \leq p \leq 4\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Quindi

$$\int_{A \cap B} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{E_1} (x^2 + y^2) dx dy + \int_{E_2} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\int_0^{4\cos\theta} p^3 dp \right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{4\sin\theta}^{4\cos\theta} p^3 dp \right) d\theta$$

$$= \frac{4^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 \theta d\theta + \frac{4^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= 12\pi \text{ (essendo la metà dell'integrale esteso ad } A, \text{ prima calcolato)} + 64 \int_0^{\pi/4} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= 12\pi + 64 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 12\pi + 64 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} \\
 &= 12\pi + 32
 \end{aligned}$$

⑤ La linea γ ha equazione

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z - 16 = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 - z^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

ed è ottenuta dall'intersezione di due superfici regolari.
 Il modo più diretto per scrivere l'equazione della retta tangente,
 è considerare l'intersezione dei due piani tangenti

$$S_1: \quad x^2 + y^2 - z - 16 = 0 \quad f_1(x, y, z) = 0$$

$$\pi_1: \quad \left\langle \nabla f_1 \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}, 0 \right), \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}, y + \frac{9}{4}, z \right) \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
 \nabla f_1 \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}, 0 \right) &= \left(2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{4}, 2 \left(-\frac{9}{4} \right), -1 \right) \\
 &= \left(\frac{5\sqrt{7}}{2}, -\frac{9}{2}, -1 \right)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\pi_1: \quad \left\langle \left(\frac{5\sqrt{7}}{2}, -\frac{9}{2}, -1 \right), \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}, y + \frac{9}{4}, z \right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{5\sqrt{7}}{2} \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4} \right) - \frac{9}{2} \left(y + \frac{9}{4} \right) - z = 0$$

$$S_2: 9x^2 + 25y^2 - z^2 - 225 \quad f_2(x, y, z) = 0$$

$$\pi_2: \langle \nabla f_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}, 0\right), \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}, y + \frac{9}{4}, z\right) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla f_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}, -\frac{9}{4}, 0\right) &= \left(18 \frac{5\sqrt{7}}{4}, 50\left(-\frac{9}{4}\right), -2 \cdot 0\right) \\ &= \left(\frac{45\sqrt{7}}{2}, -\frac{225}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\pi_2: \left\langle \left(\frac{45\sqrt{7}}{2}, -\frac{225}{2}, 0\right), \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}, y + \frac{9}{4}, z\right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{45\sqrt{7}}{2} \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}\right) - \frac{225}{2} \left(y + \frac{9}{4}\right) = 0$$

Concludendo

$$\Gamma_{tg}: \begin{cases} \frac{5\sqrt{7}}{2} \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}\right) - \frac{9}{2} \left(y + \frac{9}{4}\right) - z = 0 \\ \frac{45\sqrt{7}}{2} \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{4}\right) - \frac{225}{2} \left(y + \frac{9}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

⑥ Detto Γ il bordo della superficie Σ , avremo

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1\}$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = \sqrt{3} \sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} dx = -\sqrt{3} \sin t \, dt \\ dy = \sqrt{3} \cos t \, dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

Per il teorema di Stokes

$$\int_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} F, \underline{m} \rangle d\sigma_2 = \int_{\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle d\tau$$

dove $\underline{m}$ è la normale orientata verso l'alto e $\underline{\tau}$ è il corrispondente orientamento della tangente, antioraria in questo caso.

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \langle \text{rot } \underline{F}, \underline{n} \rangle d\sigma_2 &= \int_{\Gamma} (x-y+z) dx + (-x+y+z^2) dy + \\ &+ 5h(x^2+y^2+z^2) dz \\ &= \int_0^{2\pi} [(\sqrt{3} \cos t - \sqrt{3} \sin t + 1)(-\sqrt{3} \sin t) + (-\sqrt{3} \cos t + \sqrt{3} \sin t + 1)(\sqrt{3} \cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t - \sqrt{3} \sin t - 3 \cos^2 t + 3 \sin t \cos t + \sqrt{3} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -3 \cos 2t dt = -\frac{3}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

⑦ a) $\underline{r} = (t^2, t^2), \quad t \in [-1, 1]$

$\underline{r}$ è di classe C^∞ ed è definita in un intervallo chiuso. Tuttavia, $\underline{r}' = (2t, 2t)$ e $\underline{r}'(0) = (0, 0)$. Poiché esiste un punto dell'intervallo in cui $\underline{r}'$ si annulla, non si tratta di un arco regolare.

b) $\underline{r} = (\cosh t, \sinh t) \quad t \in [-1, 1]$

$\underline{r}$ è di classe C^∞ ed è definita in un intervallo chiuso. Inoltre $\underline{r}' = (\sinh t, \cosh t)$ non si annulla mai. Si tratta, dunque, di un arco regolare.

c) $\underline{r} = \begin{cases} (t, t \sin \frac{1}{t}) \\ (0, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in (0, 1] \\ t = 0 \end{matrix}$

È immediato verificare che $\underline{r} \in C^0([0, 1])$, ma non è di classe C^1 in $[0, 1]$. Pertanto, non è un arco regolare.

d) $r = (t, t^2) \quad t \in [-4, 4]$

r è di classe C^∞ , in un intervallo chiuso e $r' = (1, 2t)$ non si annulla mai. Pertanto, è un arco regolare

8

$$F = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{|x| + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

a) Abbiamo $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$0 \leq F(x, y) \leq \frac{x^2 y^2}{y^2} = x^2$$

Per il Teorema del confronto, dunque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y) = 0$$

$$F(x, y) = 0$$

Infatti, è immediato vedere che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 = 0$

$$b) F_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla F(0,0) = (0,0)$$

$$F_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = 0.$$

c) Il piano tangente è ben definito se F è differenziabile. Controlliamo, dunque se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$$

$$\frac{F(h,k) - F(0,0) - \langle \nabla F(0,0), (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Abbiamo

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^2}{|h| + k^2} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Come prima, abbiamo

$$0 \leq \frac{h^2 + k^2}{(|h| + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Poiché

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{\rho} = 0 \end{aligned}$$

per il Teorema del confronto, concludiamo che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k^2}{(|h| + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

e la funzione è differenziabile. Il piano tangente in $(0,0)$ ha equazione

$$Z - F(0,0) = \langle F_x(0,0), F_y(0,0) \rangle \cdot (x, y) >$$

$$Z = 0$$

(10) Nelle ipotesi date $h(x) = f(x, g(x))$ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{d}{dx} f(x, g(x)) = f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x).$$

(11) (a) int $\Delta \equiv \Delta$

$$(b) \quad \partial \Delta = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\} \cup \{ y = 0 \quad 0 \leq x < 3 \}$$

$$(c) \quad \overline{\Delta} = \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$