

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(n+n^2) 5^{2n}}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) + (n+1)^2} \frac{1}{25^{n+1}}}{\frac{1}{(n+n^2) 25^n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{(n+1) + (n+1)^2} \cdot \frac{25^n}{25^{n+1}} = \frac{1}{25}$$

$$R = \frac{1}{L} = 25$$

Inoltre se $x-3 = \pm 25$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+n^2}$$

che converge per il criterio di Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+n^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$$

che converge per il criterio del ~~rapporto~~ confronto

Quindi l'insieme di convergenza è dato da

$$-25 \leq x-3 \leq 25$$

$$-22 \leq x \leq 28$$

$$\textcircled{2} f = 2x - 3y \quad E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 7y^2 = 3 \}$$

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$L = 2x - 3y + \lambda (4x^2 + 7y^2 - 3)$$

$$\begin{cases} L_x = 2 + 8\lambda x = 0 \\ L_y = -3 + 14\lambda y = 0 \\ L_\lambda = 4x^2 + 7y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4\lambda} \\ y = \frac{3}{14\lambda} \\ 4 \frac{1}{16\lambda^2} + 7 \frac{9}{196\lambda^2} = 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{\lambda \cdot 9}{\lambda^2 4 \cdot 49} = 3$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4 \cdot 7\lambda^2} = 3$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{7+9}{7} \right) = 3$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{4}{7} = 3$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{21}}{8} \\ y_1 = 3 \frac{\sqrt{21}}{28} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{21}}{8} \\ y_2 = -\frac{3\sqrt{21}}{28} \end{cases}$$

Poiché E è un compatto, per determinare il punto di massimo ed il punto di minimo, basta sostituire

$$f\left(-\frac{\sqrt{21}}{8}, \frac{3\sqrt{21}}{28}\right) = -2 \frac{\sqrt{21}}{8} - 3 \frac{3\sqrt{21}}{28} < 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{21}}{8}, -\frac{3\sqrt{21}}{28}\right) = 2 \frac{\sqrt{21}}{8} + 3 \frac{3\sqrt{21}}{28} > 0$$

Quindi (x_1, y_1) è punto di minimo, (x_2, y_2) è punto di massimo

$$(3) \int_{\Gamma} \frac{2x}{\pi} \sin(\pi y) dx + x^2 \cos(\pi y) dy$$

dove $\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$

Osserviamo che F è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$\bullet \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x \cos \pi y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Quindi F è conservativo e il lavoro è semplicemente dato dal valore di un potenziale nel punto finale meno il valore dello stesso potenziale nel punto iniziale.

È immediato verificare che un potenziale è

$$U = \frac{x^2}{\pi} \sin \pi y$$

$$\bullet \quad A(x(0), y(0)) = (0, 0)$$

$$B(x(1), y(1)) = (1, 1/2)$$

$$\text{Pertanto} \quad L = U(1, 1/2) - U(0, 0)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$\textcircled{4} \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\bullet \quad f = z$$

$$d\sigma_2 = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{2} \, dx \, dy$$

$$\bullet \quad \int_{\Sigma} z \, d\sigma_2 = \int_{\{x^2 + y^2 \leq 4\}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dx \, dy =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \, \rho d\rho$$

$$= \sqrt{2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 2\pi = 16 \frac{\pi \sqrt{2}}{3}$$

⑤ $f = \operatorname{Ch} x^2 + \ln(xy) \quad P(1,1)$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$f(x,y) = f(1,1) + \langle \nabla f(1,1), (x-1, y-1) \rangle + \frac{1}{2} \langle H f(1,1)(x-1, y-1), (x-1, y-1) \rangle + \dots$$

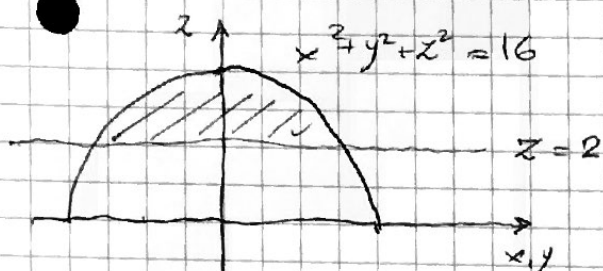
$$f(1,1) = \operatorname{Ch} 1$$

$$\begin{cases} f_x = 2x \operatorname{Sh} x^2 + \frac{1}{x} \\ f_y = \frac{1}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} f_x(1,1) = 2 \operatorname{Sh} 1 + 1 \\ f_y(1,1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 2 \operatorname{Sh} x^2 + 4x^2 \operatorname{Ch} x^2 - \frac{1}{x^2} \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{xx}(1,1) = 2 \operatorname{Sh} 1 - 4 \operatorname{Ch} 1 - 1 \\ f_{xy}(1,1) = 0 \\ f_{yy}(1,1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(x,y; (1,1)) &= 1 + (2 \operatorname{Sh} 1 + 1)(x-1) + (y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (2 \operatorname{Sh} 1 - 4 \operatorname{Ch} 1 - 1)(x-1)^2 - \frac{1}{2} (y-1)^2 \end{aligned}$$

⑥ $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 2 \}$



Possiamo integrare per strati

$$T(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 - z^2 \}$$

$$V(D) = \int_D dx dy dz = \int_2^4 \left(\int_{T(z)} dx dy \right) dz$$

$$= \int_2^4 \left(\int_{x^2 + y^2 \leq 16 - z^2} dx dy \right) dz$$

$$= \int_2^4 \pi (16 - z^2) dz = \pi \left[16z - \frac{z^3}{3} \right]_2^4$$

$$= \pi \left[64 - \frac{64}{3} - 32 + \frac{8}{3} \right] = \frac{\pi}{3} (192 - 64 - 96 + 8)$$

$$= \frac{40\pi}{3}$$

⑦ $I = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\cos t, \sin t) (-\sin t, \cos t) dt$

Posto

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

risulta

$$I = \int_{\Gamma} \langle F, \tau \rangle ds = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy$$

dove Γ è un circuito (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, percorsa in senso antiorario).

a) e b) sono falsi: il fatto che l'integrale sia nullo, non implica che $\underline{F}$ sia conservativo o irrotazionale

c) è vero: se $\underline{F}$ è conservativo, l'integrale di $\underline{F}$ su un circuito è nullo.

d) è ~~vero~~: Se $\underline{F}$ è irrotazionale, essendo di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ che è un aperto semplicemente connesso, è conservativo e, dunque, per il punto precedente, l'integrale di linea nullo.

$$\underline{F} = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underline{F} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\rho^3 \cos^2 \theta |\sin \theta|}{\rho^2}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sqrt{\cos^2 \theta |\sin \theta|} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$F_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

$$\text{Quindi } \nabla F(0,0) = 0$$

Poiché $F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$, se il $\pi_{\underline{F}}$ esistesse allora necessariamente esso sarebbe $\mathbb{Z} = 0$.

Tuttavia, ~~per~~ ad esempio verifichiamo che la funzione non è differenziabile, ossia il $\pi_{\underline{F}}$ non esiste.

Infatti

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{F(h,k) - F(0,0) - \langle \nabla F(0,0), (h,k) \rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{\frac{h^2 |k|}{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\rho^3 \cos^2 \theta |\sin \theta|}{\rho^2 \cdot \rho}} \neq 0$$

⑩ $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, g(x, y)) = f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y)) \cdot g_y(x, y)$

⑪ $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 2 \leq x \leq 4 \}$

$$\text{int } \Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \}$$

$$\partial \Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 2 \leq x \leq 4 \}$$

$$\bar{\Delta} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 2 \leq x \leq 4 \}$$

