12/06/2017

PARTE A

1. [6 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n \frac{1}{n!}$,

(a) determinare l'insieme di convergenza;

 $\mathbb{R}$

(b) calcolare la somma della serie $f(x)$;

$$f(x) = e^{\frac{x+2}{3}}$$

(c) calcolare $f^{(10)}(-2)$.

$$f^{(10)}(-2) = \frac{1}{3^{10}}$$

2. [6 pt] Classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = xye^{2x+y}$.

$0(0,0)$ punto di sella
 $(-\frac{1}{2}, -1)$ punto di massimo locale

3. [6 pt] Siano $f(x, y) = 8x + 8$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (2-x)(x+4)\}$. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie

$$\int_{\partial D} f ds = 0$$

4. [6 pt] Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ il poligono di vertici $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 4)$, $D = (-3, 4)$. Calcolare

$$\iint_E y dx dy = 24$$

5. [3 pt] Scrivere l'equazione del piano tangente in $P = (1, \frac{1}{3}, 0)$ alla superficie $z = g(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $x^2 + 3y^2 + xe^{yz} = \frac{7}{3}$.

$$3x + 2y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

6. [7 pt] Dati il campo $F(x, y, z) = (y, -x+1, z+xy)$ e la superficie Σ di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$, definita su $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, calcolare il flusso di F attraverso Σ , orientata verso l'alto, riportando i passaggi salienti.

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} (F) &= \int_{\Sigma} \langle (y, -x+1, z+xy), \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \rangle d\sigma_2 \\ &= \int_D (-2xy + 2xy - y + x^2 + y^2 + y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho^3 d\rho = \frac{81}{2} \pi \end{aligned}$$

PARTE B

7. [± 10 pt] Vero o Falso (Attenzione: una risposta giusta vale 2.5 punti, una sbagliata -2.5, una lasciata in bianco 0.) Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) f è continua in $(0,0)$ VERO FALSO
 (b) f è derivabile in $(0,0)$ VERO FALSO
 (c) f è derivabile in $(1,-2)$ VERO FALSO
 (d) f è differenziabile in $(0,0)$ VERO FALSO

8. [9 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcolare il lavoro di F lungo

(a) La curva $\gamma(t) := (2 + \cos(t), -4 + \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) La frontiera del quadrato $[-2, 2] \times [2, 2]$, orientata in senso orario;

(c) La curva $r(t) := (5 \cos(t), 5 \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$.

9. [5 pt] Enunciare il teorema della divergenza, in $\mathbb{R}^3$.

10. [4 pt] Per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente formula:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right\} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad x \in \text{$$

11. [6 pt] Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 5, 1 < y \leq 5\}$. Indicare

(a) La parte interna di A

(b) La frontiera di A

(c) La chiusura di A

12/06/2017

PARTE A

1. [6 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x+3}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$,

(a) determinare l'insieme di convergenza;

 $\mathbb{R}$

(b) calcolare la somma della serie $f(x)$;

$$f(x) = e^{\frac{x+3}{2}}$$

(c) calcolare $f^{(10)}(-3)$.

$$f^{(10)}(-3) = \frac{1}{2^{10}}$$

2. [6 pt] Classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = xye^{x+3y}$.

$(0, 0)$ punto di sella
 $(-1, -1/3)$ punto di massimo locale

3. [6 pt] Siano $f(x, y) = 8x - 8$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (2+x)(4-x)\}$. Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie

$$\int_{\partial D} f \, ds = 0$$

4. [6 pt] Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ il poligono di vertici $A = (0, 0)$, $B = (-2, -2)$, $C = (0, 4)$, $D = (3, 4)$. Calcolare

$$\iint_E y \, dx \, dy = \frac{56}{3}$$

5. [3 pt] Scrivere l'equazione del piano tangente in $P = (1, \frac{1}{3}, 0)$ alla superficie $z = g(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione $x^2 + 3y^2 + xe^{yz} = \frac{7}{3}$.

$$3x + 2y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

6. [7 pt] Dati il campo $F(x, y, z) = (y, -x+1, z+xy)$ e la superficie Σ di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$, definita su $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$, calcolare il flusso di F attraverso Σ , orientata verso l'alto, riportando i passaggi salienti.

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(F) &= \int_{\Sigma} \langle (y, -x+1, z+xy), \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \rangle d\sigma_2 \\ &= \int_D (-2xy + 2xy - 2y + x^2 + y^2 + xy) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi \end{aligned}$$

PARTE B

7. [± 10 pt] Vero o Falso (Attenzione: una risposta giusta vale 2.5 punti, una sbagliata -2.5, una lasciata in bianco 0.) Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) f è continua in $(0,0)$ VERO FALSO
 (b) f è derivabile in $(0,0)$ VERO FALSO
 (c) f è derivabile in $(1,-2)$ VERO FALSO
 (d) f è differenziabile in $(0,0)$ VERO FALSO

8. [9 pt] Sia dato il campo $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcolare il lavoro di F lungo

- (a) La curva $\gamma(t) := (4 + \cos(t), -2 + \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; 0
 (b) La frontiera del quadrato $[-1, 1] \times [1, 1]$, orientata in senso orario; 2π
 (c) La curva $r(t) := (3 \cos(t), 3 \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. $-\pi$

9. [5 pt] Enunciare il teorema della divergenza, in $\mathbb{R}^3$.

10. [4 pt] Per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente formula:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right\} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad x \in \text{ } (-1, 1)$$

11. [6 pt] Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 1 < y \leq 5\}$. Indicare

- (a) La parte interna di A $\text{int } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 1 < y < 5\}$
 (b) La frontiera di A $\partial A = \{x=0, y \in [1, 5]\} \cup \{y=1, x \in [0, 2]\} \cup \{x=2, y \in [1, 5]\} \cup \{y=5, x \in [0, 2]\}$
 (c) La chiusura di A $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 5\}$